ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 514.18

Є.О. АДОНЬЄВ
Запорізький національний університет
В.М. ВЕРЕЩАГА
Мелітопольський державний педагогічний університет ім. Б. Хмельницького

ОСОБЛИВОСТІ Б-ЛІНІЙ, Б-ПОВЕРХОНЬ, ВИЗНАЧЕННЯ, ПЕРЕВАГИ ТА МОЖЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ У КОМПОЗИЦІЙНОМУ МЕТОДІ ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Надано визначення Б-ліній, Б-поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша. Показано відмінність способу їхнього моделювання від методів моделювання ліній та поверхонь у традиційній математиці. Ця відмінність полягає у застосуванні геометричної інтерполяції замість інтерполяції з використанням традиційних алгебраїчних методів. Наведено приклади точкових рівнянь ліній та поверхонь. Вказано на переваги використання Б-ліній та Б-поверхонь у композиційному методі геометричного моделювання багатофакторних процесів. Однією з особливостей методу є те, що рівняння геометричних фігур отримуються у результаті встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки геометричної фігури, оминаючи, при цьому, аналітичні методи моделювання, тобто, встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури передує аналітичним ознакам фігури. Такий підхід авторами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку. Показані підходи до геометричної формалізації багатофакторних ситуацій та процесів. Вказані переваги застосування точкового БН-числення дозволяють у композиційному методі геометричного моделювання багатофакторних процесів не обмежувати кількість факторів, включених до моделі.

Ключові слова: Б-лінія, Б-поверхня, композиційний метод геометричного моделювання, багатофакторні процеси.

Е.А. АДОНЬЕВ
Запорожский национальный университет
В.М. ВЕРЕЩАГА
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Б. Хмельницкого

ОСОБЕННОСТИ Б-ЛИНИЙ, Б-ПОВЕРХНОСТЕЙ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРЕИМУЩЕСТВА И ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ В КОМПОЗИЦИОННОМ МЕТОДЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Дано определение Б-линий, Б-поверхностей в точечном исчислении Балюбы-Найдыша. Показано отличие способа их моделирования от методов моделирования линий и поверхностей в традиционной математике. Это отличие заключается в применении геометрической интерполяции вместо интерполяции с использованием традиционных алгебраических методов. Приведены примеры точечных уравнений линий и поверхностей. Показаны преимущества применения Б-линий и Б-поверхностей в композиционном методе геометрического моделирования многофакторных процессов. Одной из особенностей метода является то, что уравнения геометрических фигур получаются в результате установления внутренних связей между базовыми точками симплекса и изменяемой точки геометрической фигуры, избегая, при этом, аналитические методы моделирования, то есть, установление геометрических связей между элементами фигуры предшествует аналитическим признакам фигуры. Такой подход авторами назван "геометро-математическим аппаратом" формализации связей. Показаны подходы к геометрической формализации многофакторных ситуаций и процессов. Указанные преимущества точечного БН-исчисления позволяют в композиционном методе геометрического моделирования многофакторных процессов не ограничивать количество факторов, включенных в модель.

Ключевые слова: Б-линия, Б-поверхность, композиционный метод геометрического моделирования, многофакторные процессы.

Y.O. ADON'YEV
Zaporizhzhya National University
V.M. VERESHYAGA
Melitopol State Pedagogical University named after B. Khmelnitsky

FEATURES OF B-LINES, B-SURFACES, DEFINITIONS, ADVANTAGES AND OPPORTUNITIES OF APPLICATION IN THE COMPOSITE METHOD OF GEOMETRICAL MODELING

A definition of B-lines, B-surfaces in the Balyba-Naidysh point calculus is given. The method of their modeling differs from the methods of modeling lines and surfaces in traditional mathematics. This difference consists in applying geometric interpolation instead of interpolation using traditional algebraic methods. Examples of point equations of lines and surfaces are given. The advantages of using B-lines and B-surfaces in the composite method of geometric modeling of multifactor processes are shown. One of the features of the method is that the equations of geometric figures are obtained as a result of establishing internal connections between the base points of the simplex and the variable point of the geometric figure, while avoiding the analytical modeling methods, that is, the establishment of geometric relationships between the elements of the figure precedes the analytical features of the figure. This approach was called the "geometrical-mathematical apparatus" of the formalization of connections by the authors. Approaches to the geometric formalization of multifactorial situations and processes are shown. The indicated advantages of point BN-calculus allow in the composite method of geometric modeling of multifactor processes not to limit the number of factors included to the model.

Key words: B-line, B-surface, composite method of geometric modeling, multifactor processes.

Постановка проблеми

У різних галузях, з метою прийняття обґрунтованих управлінських рішень, часто виникає проблема поєднання великої кількості фізично різнорідних факторів. Існуючі алгебраїчні методи кореляції вихідних факторів висувають певні обмеження за кількістю та якістю вихідних факторів. Усунення таких обмежень є актуальною проблемою, яку можна розв'язати з використанням композиційного методу формалізованого геометричного моделювання. Однак, на разі недостатня популяризація цього методу викликає певні труднощі при його застосуванні. За результатами доповідей з цього питання на конференціях і семінарах, з'явилася ідея про необхідність додаткових пояснень з питань точкового БН-числення та його використання у композиційному методі геометричного моделювання багатофакторних процесів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо з математичної теорії оптимального управління [7], управління лініями та поверхнями відбувається за допомогою функцій та параметрів. Ідею управління геометричними фігурами шляхом зміни вихідних точок вперше висловив І.І. Котов у 1975 році, а сформулював її В.М. Найдиш [8]. Тільки з виконанням досліджень у роботах [9–10] та виданням наукового посібника [11] з'явилася можливість повернутися до досліджень щодо управління формою геометричних фігур за ідеєю І.І. Котова та В.М. Найдиша, а авторам цієї статті вдалося наблизитися до розв'язання проблеми управління формою геометричних фігур вихідними точками, що входять до їх складу. Підґрунтям для розробки композиційного методу геометричного моделювання стало точкове БН-числення [11].

Формулювання мети дослідження

У порівнянні з відомими методами визначення ліній та поверхонь показати переваги їхнього формування у точковому БН-численні, з метою популяризації композиційного методу геометричного моделювання багатофакторних ситуацій та процесів.

Викладення основного матеріалу дослідження

Зазвичай, досліджувані геометричні фігури (об'єкти), у більшості випадків, відносять до деякої системи координат, у результаті чого, розв'язок геометричних питань зводиться до дослідження рівнянь, які зв'язують координати точок, що відносяться до досліджуваної геометричної фігури. Переваги аналітичних методів дослідження відомі і не викликають сумнівів. Однак, при цьому, сам геометричний об'єкт та внутрішні зв'язки між його елементами відходять на другий план, внаслідок чого, втрачається наочність, а разом з тим, і психологічна геометрична впевненість у тому, що за аналітикою геометричної фігури непросто побачити геометричний характер розв'язку. Наприклад, лінія другого порядку [1–2] – плоска лінія, декартові прямокутні координати точок якої задовольняють алгебраїчному рівнянню другого степеня

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

Рівняння (1), за допомогою паралельного переносу та повороту системи координат на певний кут, може бути приведено до канонічного виду, за записом якого визначається вид кривої другого порядку. Однак, для визначення виду та класу лінії другого порядку не обов'язково приводити рівняння (1) до канонічного вигляду через застосування геометричних перетворень (паралельного переносу та повороту), тому що незмінними є інваріанти визначеної кривої другого порядку. За допомогою цих інваріантів, складених із коефіцієнтів рівняння (1), визначаються види ліній другого порядку, чи вони є такими, що розпадаються (Δ=0), або такими, що не розпадаються ($\Delta \neq 0$), чи вони є центральними ($\delta \neq 0$), або нецентральними (δ=0).

Другий приклад: поверхня другого порядку [1–2] – це множина точок тривимірного дійсного або комплексного простору, координати яких, у декартовій прямокутній системі координат, задовольняють алгебраїчному рівнянню 2-го степеня:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (2)$$

Як і у попередньому прикладі, дослідження поверхні другого порядку може бути виконано без приведення рівняння (2) до одного з 17 можливих рівнянь канонічного вигляду. Таке дослідження виконується шляхом спільного розглядання значень основних інваріантів, які не змінюються у результаті афінних перетворень для визначеної кривої (2), у загальному випадку, визначають поверхню другого порядку з точністю до руху евклідового простору. Якщо відповідні інваріанти двох поверхонь є рівними, то такі поверхні можна сумістити за результатами переміщень. Тобто, такі поверхні є еквівалентними до групи переміщень у просторі, які називають метрично еквівалентними.

Як бачимо з наведених прикладів, множини точок (1) і (2) є віднесеними до декартової системи координат і дослідження їхніх форм відбувається у аналітичному вигляді через інваріанти відносно перетворень.

І навпаки, у точковому БН-численні усі геометричні фігури мають точкові рівняння відносно відповідних симплексів, обраних у афінній системі координат, при цьому, точкові рівняння записують для просторової геометричної схеми розв'язку не у координатній, а у точковій формі. Наприклад, розглянемо відрізок прямої *AB* у декартовій системі координат *0xyz* (рис.1). Координати вихідних точок якого відомі $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Необхідно визначити точкові рівняння для множини точок *M*, що належать цьому відрізку *AB*, використовуючи внутрішні зв'язки між вихідними точками *A* і *B*, що визначають симплекс, та змінюваною точкою *M*.

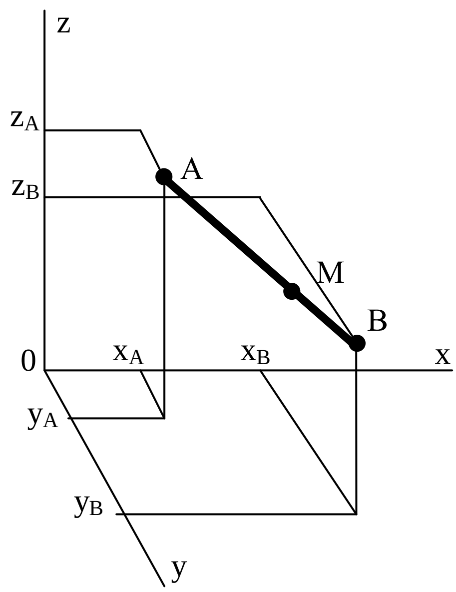

Рис. 1. Геометрична схема для визначення точки *M* відрізку *AB*.

У відповідності до [3], рівняння відрізку *AB* у симплексі *A, B* матиме вигляд:

$$M = (B - A)t + A, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad (3)$$

або у іншому вигляді:

$$M = A(1-t) + Bt \to M = A\bar{t} + Bt, \qquad (4)$$

де $\bar{t}$ – параметр, що доповнює параметр *t* до одиниці.

У точковому рівнянні (4) значення $\bar{t}$ та t є частинами від одиниці, тобто $\bar{t}+t=1.$

Якщо у точковому рівнянні (3) зняти обмеження $0 \le t \le 1,$ то отримаємо не відрізок AB, а пряму AB в цілому. Виходячи з (4), можна дати визначення для прямої лінії у точковому БН-численні.

Визначення 1. Пряма лінія у точковому БН-численні – це множина точок M, що визначаються як сума відсотків від базових точок A та B симплекса AB, при умові $0 \le t \le 1$.

Візьмемо t=0.5, тоді $\bar{t}=0.5$, у відповідності до (4) визначаємо точку M= 0.5A+0.5B. З точки зору традиційної математики це рівняння не має сенсу, а у точковому БН-численні воно означає необхідність визначити відповідні дії над координатами цих точок, тобто:

$$x_M=0.5x_A+0.5x_B;\quad y_M=0.5y_A+0.5y_B;\quad z_M=0.5z_A+0.5z_B.$$

Це означає, що точка M знаходиться всередині відрізку AB. Таке є можливим, тому що точкове БН-числення побудоване на інваріантах відносно афінних перетворень.

Другий приклад. Розглянемо лінію другого порядку (параболу), у відповідності до [3–5] її точкове рівняння має наступний вигляд:

$$M = A_{11}\bar{t}(1-2t) + A_{12}4t\bar{t} + A_{13}t(2t-1)\,,\qquad 0 \le t \le 1, \tag{5}$$

Позначимо $p_1=\bar{t}(1-2t);\;\; q_1=4t\bar{t};\;\; r_1=t(2t-1)$, тоді (5) запишемо:

$$M = A_{11}p_1 + A_{12}q_1 + A_{13}r_1\,, \tag{6}$$

де A_{11}, A_{12}, A_{13} – три дійсні точки, через які проходить парабола, які є точками, що визначають симплекс на площині.

Обов'язкова вимога: $p_1+q_1+r_1=1$, тобто параметри p_1, q_1, r_1 є частинами одиниці.

Аналогічним чином можна отримати рівняння для інших ліній другого порядку [6] у локальному симплексі, які будуть аналогічні рівнянню (6).

Виходячи з (6) та вимог щодо неї, дамо визначення для ліній другого порядку у точковому БН-численні.

Визначення 2. Лінія другого порядку у точковому БН-численні – це множина точок M, що визначається як сума відсотків від базових трьох точок симплекса, при умові, що сума параметрів $p_1+q_1+r_1=1$.

Координати точки M, що є змінюваною для лінії другого порядку, визначаються з координатних рівнянь:

$$\begin{aligned} x_M &= x_{11}p_1 + x_{12}q_1 + x_{13}r_1 \\ y_M &= y_{11}p_1 + y_{12}q_1 + y_{13}r_1 \\ z_M &= z_{11}p_1 + z_{12}q_1 + z_{13}r_1 \end{aligned}$$

Як бачимо, точкове БН-числення надає новий спосіб задання ліній і поверхонь (покажемо далі), який полягає у тому, що кожній точці з множини, що утворює певну геометричну фігуру, відповідає свій набір часток від базових точок симплексу, а сума цих часток завжди дорівнює одиниці. Такий підхід щодо визначення ліній та поверхонь нами було названо композиційним, який не потребує розв'язання системи рівнянь для визначення коефіцієнтів, які забезпечують їхнє проходження через наперед задані точки. А це, у свою чергу, має велике практичне значення для геометричної формалізації багатофакторних ситуацій та процесів.

Оскільки точкові рівняння геометричних фігур отримані у результаті встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки геометричної фігури, оминаючи, при цьому, аналітичні методи моделювання, тобто, без встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури передують аналітичним ознакам фігури, то такий підхід нами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку.

Розглянемо, у точковому БН-численні, формування точкового рівняння поверхні, що проходить через дев'ять наперед визначених дійсних точок, які подамо у вигляді матриці (7):

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{7}$$

Геометрична схема, що відповідає матриці (7), подана на рис. 2.

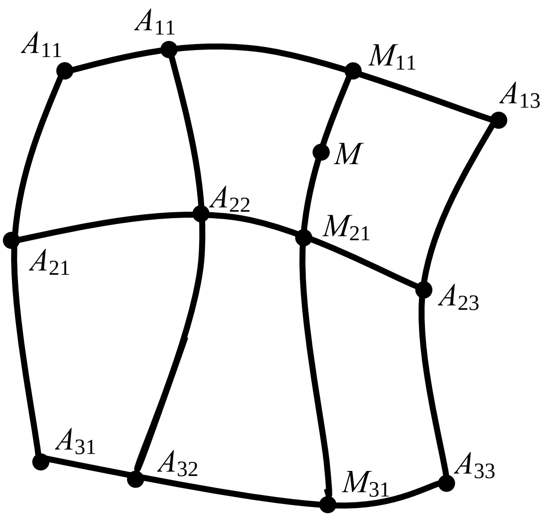

Рис. 2. Схема утворення сегменту Б-поверхні

Цей сегмент поверхні, який складається із чотирьох чарунок, нами названо Б-поверхнею (Балюби поверхнею), щоб відрізняти геометро-математичний спосіб його утворення. Він не включає геометричних (миттєвих перетворень, поворотів і таке інше) перетворень афінної або будь-якої іншої групи. Сегмент Б-поверхні має одне рівняння поверхні, яка проходить через дев'ять, наперед заданих (7), точок. Далі покажемо спосіб формування сегменту Б-поверхні.

Трійки точок за стовпчиками і рядками визначимо дугами парабол, точкові рівняння яких мають вигляд:

$$M = A(2t^2 - 3t + 1) + C(4t - 4t^2) + B(2t^2 - t), \quad 0 \le t \le 1, \tag{8}$$

Позначимо $\overline{p}_1 = 2t^2 - 3t + 1; \quad \overline{q}_1 = 4t - 4t^2; \quad \overline{r}_1 = 2t^2 - t.$ (9)

Основною вимогою для (8) є те, що $\overline{p}_1 + \overline{q}_1 + \overline{r}_1 = 1,$ перевіримо:

$$\overline{p}_1 + \overline{q}_1 + \overline{r}_1 = (2t^2 - 4t^2 + 2t^2) + (-3t + 4t - t) + 1 = 1.$$

Якщо прийняти *u* та *v* за параметри сегменту Б-поверхні, що утворюється дугами парабол (8) та позначити:

$$\begin{aligned} p_1 &= 2u^2 - 3u + 1; \quad q_1 = 4u - 4u^2; \quad r_1 = 2u^2 - u; \\ p_2 &= 2v^2 - 3v + 1; \quad q_2 = 4v - 4v^2; \quad r_2 = 2v^2 - v; \end{aligned} \tag{10}$$

та застосувати схему утворення функцій-параметрів [3]:

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{vmatrix} \tag{11}$$

у якій кожний рядок лівої матриці помножується на відповідний елемент правої матриці – стовпчика, то отримаємо функції-параметри a_{ij}:

$$\begin{aligned} &a_{11} = p_1 p_2; \quad a_{12} = q_1 p_2; \quad a_{13} = q_1 p_2; \\ &a_{21} = p_1 q_2; \quad a_{22} = q_1 q_2; \quad a_{23} = r_1 q_2; \\ &a_{31} = p_1 r_2; \quad a_{32} = q_1 r_2; \quad a_{33} = r_1 r_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Підставивши (10) у (12), отримаємо функції-параметри a_{ij}: у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} &a_{11} = (2u^2 - 3u + 1)(2v^2 - 3v + 1); \quad a_{12} = (4u - 4u^2)(2v^2 - 3v + 1); \\ &a_{13} = (2u^2 - u)(2v^2 - 3v + 1); \quad a_{21} = (2u^2 - 3u + 1)(4v - 4v^2); \\ &a_{22} = (4u - 4u^2)(4v - 4v^2); \quad a_{23} = (2u^2 - u)(4v - 4v^2); \\ &a_{31} = (2u^2 - 3u + 1)(2v^2 - v); \quad a_{32} = (4u - 4u^2)(2v^2 - v); \\ &a_{33} = (2u^2 - u)(2v^2 - v). \end{aligned} \tag{13}$$

Поєднавши вихідні значення A_{ij} матриці (7) з відповідними значеннями функцій-параметрів a_{ij} (12), (13), отримаємо точкове рівняння сегменту поверхні *M*:

$$M = A_{11}a_{11} + A_{12}a_{12} + A_{13}a_{13} + A_{21}a_{21} + A_{22}a_{22} + A_{23}a_{23} + A_{31}a_{31} + A_{32}a_{32} + A_{33}a_{33},$$

або скорочено

$$M = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} a_{ij}; \qquad 0 \le u, v \le 1. \tag{14}$$

Як бачимо з (14), кожна точка *M* поверхні (14) є сумою добутків відсотків, поданих функціями-параметрами a_{ij} , помножених на відповідну вихідну точку A_{ij} .

Визначення 3. Поверхня будь-якого порядку, класу, виду, що побудована за наперед заданими вихідними точками у точковому БН-численні – є організованою множиною точок *M*, які визначаються як сума добутків відсотків (значень функцій-параметрів) на відповідні вихідні точки, за умови, що $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} = 1.$

Для визначення координат змінюваної точки *M* необхідно використати параметричні рівняння для кожної з координат простору E^n, у яких функції-параметри відповідають (13). Наприклад, для E^3:

$$x_M = \sum_{i,j=1}^{3} x_{ij} a_{ij}; \quad y_M = \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij} a_{ij}; \quad z_M = \sum_{i,j=1}^{3} z_{ij} a_{ij}; \qquad 0 \le u, v \le 1. \tag{15}$$

У роботі [3] було доведено твердження, у якому йдеться про те, що якщо суперпозиція $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}$ елементів матриці $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ дорівнює одиниці, а визначник *detA=0*, то поверхня, що побудована на будь-яких вихідних даних A_{ij} є Б-поверхнею.

Таким чином, точкове рівняння поверхні (14) виконує інтерполяцію дев'яти вихідних точок, яке отримано у результаті геометричної формалізації з використанням геометро-математичного апарату точкового БН-числення, оминаючи, при цьому, алгебраїчні методи інтерполяції, які передбачають розв'язання системи рівнянь для визначення інтерполяційних коефіцієнтів.

Якщо з (14) і (15) прибрати обмеження $0 \le u, v \le 1$, то ці точкові рівняння будуть виконувати екстраполяцію для A_{ij} у обох напрямках *u* ,*v*, або у одному з них.

Загалом, поверхня (14) є поверхнею четвертого порядку, форму якої можна змінювати, змінюючи значення точок A_{ij}, тому що функції-параметри a_{ij} визначають значення відсотків, за допомогою яких кожна з вихідних точок A_{ij} приймає участь у створенні поверхні М. Питання управління формою поверхні М через зміну точок A_{ij} зовсім не досліджене, тому що воно тільки виникло, при розробці запропонованого тут композиційного методу геометричного моделювання.

Введені поняття Б-лінії (Балюби лінії), Б-поверхні (Балюби поверхні), які уперше були ним отримані без використання алгебраїчних методів інтерполяції у глобальній системі координат.

Б-фігури (Б-лінії, Б-поверхні) подаються у вигляді точкових рівнянь, які отримано у результаті геометричної формалізації у точковому БН-численні.

Таким чином, Б-фігури не є окремим видом, класом, типом, тощо ліній або поверхонь, Б-фігури є іншим способом подання цих ліній, поверхонь у вигляді композиції відсотків a_{ij} від вихідних точок A_{ij}.

Тому застосування термінів "Б-лінія", "Б-крива", "Б-поверхня" не означає якихось особливих ліній та поверхонь, вживання цих термінів вказує на інший спосіб утворення відомих ліній та поверхонь.

Виникає питання: "Навіщо це потрібно, коли розроблено достатньо відомих методів геометричного моделювання?" Річ у тім, що подання відомих геометричних фігур у точковій формі надає ряд переваг, таких, як незалежність параметрів, їхня незмінність при проектуванні на осі простору, у фігурі одночасно поєднуються два погляди: як метричного простору зі соєю внутрішньою метрикою (т.з. внутрішня геометрія), так і фігури, що розглядаються у глобальній системі координат у просторі (т.з. зовнішня геометрія).

Висновки

Таким чином, точкове БН-числення надає новий спосіб побудови ліній і поверхонь, який полягає у тому, що кожній точці з множини, що утворює певну геометричну фігуру, відповідає свій набір часток від базових точок симплексу. При цьому, необхідною умовою є рівність одиниці суми цих. Такий підхід щодо визначення геометричних фігур нами було названо композиційним. Композиційний метод геометричного моделювання не потребує розв'язання системи рівнянь для визначення коефіцієнтів, які забезпечують їхнє проходження через наперед задані точки. Це має велике практичне значення для геометричної формалізації багатофакторних ситуацій та процесів. Точкові рівняння геометричних фігур отримані шляхом встановлення внутрішніх зв'язків між базовими точками симплексу і змінюваної точки фігури без використання аналітичних методів моделювання, тобто, без встановлення геометричних зв'язків між елементами фігури. Такий підхід нами названо "геометро-математичним апаратом" формалізації розв'язку задачі. Вказані переваги точкового БН-числення при застосуванні у композиційному методі геометричного моделювання багатофакторних процесів дозволяють: 1) не обмежувати кількість факторів, включених до моделі, через відсутність алгебраїчних методів кореляції; 2) отримувати модель та розв'язок у просторі, з можливістю подальшого їх аналізу на проекціях, як одно-, так і двомірних; 3) розкладати задачу багатовимірного простору на необхідну кількість одно-, двох- або тривимірних, що набагато спрощує процес моделювання.

Список використаної літератури

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, – 1968. – 912 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии, 11-е изд. / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1972. – 272 с.
3. Адоньєв Є.О. Композиційний метод геометричного моделювання: суть, особливості та перспективи застосування / Є.О. Адоньєв // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 8. – С. 3-14.
4. Адоньєв Є.О. Алгоритм формування моделей багатофакторних процесів композиційного методу / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага, А.В. Найдиш // Збірник доповідей VI-ої Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Прикладна геометрія, дизайн, об'єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених" (м. Київ, 28-29 квітня 2017 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2017. – Вип. 6. – С. 12- 18.
5. Адоньєв Є.О. Застосування поверхонь відгуку при моделюванні сталого енергетичного розвитку міст / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). – С. 471-476.
6. Давиденко І.П. Конструювання поверхонь просторових форм методом рухомого симплексу: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / І.П. Давиденко; Тавр. держ. агротехнолог. ун-т. – Мелітополь, 2012. – 23 с.
7. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия, 1984. –Т.4. – 1216 с.
8. Найдыш В.М. Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / Владимир Михайлович Найдыш; Мелитопольский институт механизации сельского хозяйства, – 1982. – 512 с.
9. Верещага В.М. Дискретно-параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / Виктор Михайлович Верещага; МИМСХ – Мелитополь. – 1996. – 320 с.
10. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий на основе точечного исчисления: автореф. дис. … докт. техн. наук: 05.01.01 / Иван Григорьевич Балюба. – К.: КГТУСА, 1995. – 36 с.
11. Точечное исчисление / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш [под ред. В.М. Верещаги]. – Мелитополь: Изд-во МГПУ имени Богдана Хмельницкого, 2015. – 234 с.