УДК 514.18

Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврический государственный агротехнологический университет
А.В. НАЙДЫШ
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОБВОДА НА ОСНОВЕ ОБЛАСТИ ВОЗМОЖНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ КРИВЫХ С ЗАДАННЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассматривается задача формирования пространственных одномерных обводов с закономерным изменением кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер. Обвод формируется сгущением исходного точечного ряда по участкам, на которых обеспечивается монотонное изменение геометрических характеристик. Точки сгущения назначаются внутри области возможного расположения кривых с заданными геометрическими свойствами.

Ключевые слова: монотонная дискретно представленная кривая (ДПК), соприкасающаяся окружность, соприкасающаяся сфера, ход кривой, тетраэдр расположения ДПК, трехгранник прилегающих сфер.

Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврійський державний агротехнологічний університет
А.В. НАЙДИШ
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНОГО ПРОСТОРОВОГО ОБВОДУ НА ОСНОВІ ОБЛАСТІ МОЖЛИВОГО РОЗТАШУВАННЯ КРИВИХ ІЗ ЗАДАНИМИ ГЕОМЕТРИЧНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Розглядається задача формування просторових одновимірних обводів із закономірною зміною кривини, скруту, радіусів стичних сфер. Обвід формується згущенням вихідного точкового ряду по ділянкам, на яких забезпечується монотонна зміна геометричних характеристик. Точки згущення призначаються всередині області можливого розташування кривих із заданими геометричними властивостями.

Ключові слова монотонна дискретно представлена крива (ДПК), стичне коло, стична сфера, хід кривої, тетраедр розташування ДПК, тригранник сфер. що прилягають.

E.A. GAVRILENKO, YU.V. KHOLODNYAK
Tavria State Agrotechnological University
A.V.NAYDYSH
Bohdan Khmelnytskyi Melitopol State Pedagogical University

DISCRETE MODELING OF ONE-DIMENSIONAL SPATIAL CONTOURS ON THE BASIS OF A POSSIBLE LOCATION OF CURVES WITH GIVEN GEOMETRIC CHARACTERISTICS

The task of the formation of spatial one-dimensional contours with a regular change of curvature, torsion, and the radiuses of the adjoining spheres is considered in this article.The contour is formed by thickening of the initial points set along the sections on which monotonous change of geometric characteristics is provided.The points of thickening are assigned within the area of the possible location of curves with given geometric properties.

Keywords:monotonous discretely represented curve (DRC), osculating circle, tangent sphere,trend of curve, tetrahedron of the DRC location, trihedron of adjacent spheres.

Постановка проблемы

Одномерные обводы используются в качестве инструмента решения многих задач геометрического моделирования. Примерами таких задач могут служить приближенные вычисления, построение графиков, описывающих явления и процессы, формирование поверхностей на основе линейчатых каркасов. Обвод определяется исходным точечным рядом, фиксированными геометрическими характеристиками, назначенными в исходных точках, заданной закономерностью изменения характеристик вдоль обвода.

На данный момент наиболее разработаны методы непрерывного геометрического моделирования одномерных обводов. Обвод формируется участками аналитически заданных кривых, состыкованных в исходных точках с обеспечением заданного порядка гладкости. Наращивание условий, накладываемых на формируемый объект, требует увеличения параметрического числа кривых линий, формирующих участки обвода. При этом неизбежно возникают особые точки: точки перегиба, самопересечения и смены хода кривой, точки перемены возрастания-убывания вдоль кривой кривизны, кручения, радиусов соприкасающихся сфер. Неконтролируемое возникновение особых точек снижает качество получаемого решения.

Особенно важен контроль возникновения особых точек при моделировании динамических поверхностей, функциональное назначение которых – взаимодействие со средой. Основное требование к линейным элементам моделей таких поверхностей – максимально возможный порядок гладкости обвода при минимальном числе особых точекна его участках.

Задача контроля возникновения особых точек может быть решена вариативным дискретным геометрическим моделированием [3]. Формируемая кривая представлена упорядоченным множеством принадлежащих ей точек и геометрическими характеристиками кривой. Кривая формируется сгущением, предполагающим определение для исходного точечного ряда промежуточных точек. Такой подход позволяет отказаться от аналитического представления участков кривой и формировать обвод исходя из заданных геометрических свойств.

Основная проблема дискретного подхода к формированию обводов в том, что кривая и ее характеристики не определены однозначно на всех этапах моделирования. Необходима разработка специальных критериев, позволяющих оценивать характеристики дискретно представленных геометрических образов.

Создание алгоритмов формирования одномерных обводов, не требующих аналитического представления его участков, способных обеспечить заданные геометрические свойства кривой даст эффективный инструмент решения задач геометрического моделирования.

Анализ последних исследований и публикаций

Способ вариативного моделирования гладкой дискретно представленной кривой (ДПК) постоянного хода предложен в [1]. ДПК формируется на основе исходного точечного ряда назначением промежуточных точек сгущения. При этом полагаем, что исходные точки заданы без погрешности и в процессе моделирования не изменяют своего положения.

Каждые три последовательные точки определяют прилегающую плоскость (ПП). Четыре последовательные ПП, проходящие через i-ю и $i+1$-ю точки ограничивают тетраэдр. Этот тетраэдр является областью возможного расположения ДПК постоянного хода на участке $(i,i+1)$. Цепочка последовательных тетраэдров, определенных на всех участках, является областью расположения гладкой кривой линии постоянного хода, интерполирующей исходный точечный ряд (рис. 1).

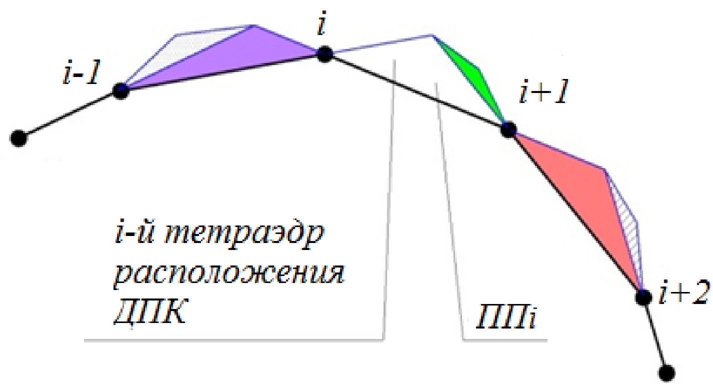

Рис. 1. Исходная область расположения ДПК

Кручение на участках ДПК оценивается величиной отношения угла между смежными ПП к длине соответствующей хорды сопровождающей ломаной линии (B_i^{φ}). Точка сгущения назначается внутри тетраэдра расположения ДПК. В результате последовательных сгущений, в пределе, получим непрерывный обвод постоянного хода, в каждой точке которого существует единственное положение основного трёхгранника. Регулярность значений кручения в точках обвода (B_i) обеспечивает выполнение условия $B_{i-1}^{\varphi} > B_i > B_i^{\varphi}$ при каждом сгущении.

Предложенный в [1] способ не обеспечивает контроль значений кривизны и радиусов соприкасающихся сфер в точках формируемого обвода.

В [2] исследованы условия формирования монотонных кривых линий – кривых постоянного хода, вдоль которых радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают или убывают. Кривая линия рассматривается, как траектория движения точки M, принадлежащей нормальной плоскости N, обкатывающей полярный торс, ребро возврата которого – кривая постоянного хода (рис. 2).

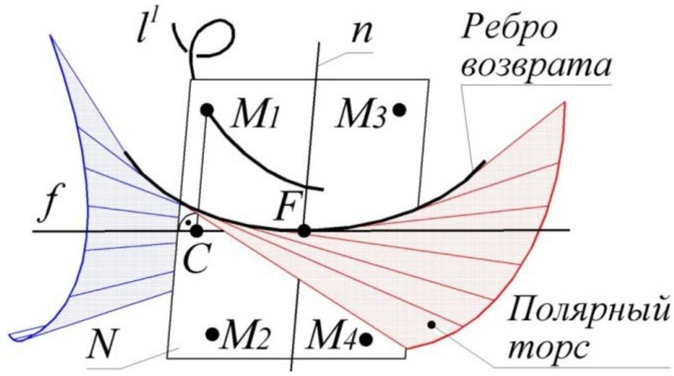

Рис. 2. Формирование монотонной кривой линии

Установлены условия, при которых полярный торс определяет монотонную кривую линию.

Ось кривизны f, соответствующая текущему положению точки M, и прямая n, которая пересекает ось кривизны в центре соприкасающейся сферы (F) под прямым углом, разделяют плоскость N на четыре части. Накатывание четверти плоскости N, в которой расположена точка M, на полярный торс означает, что вдоль траектории движения точки M значения радиусов кривизны монотонно убывают. Точки плоскости N, в направлении которых перемещается прямая n, описывают кривые, вдоль которых радиусы соприкасающихся сфер монотонно убывают.Точка M, расположенная в четверти плоскости N, которая накатывается на полость полярного торса и в направлении которой перемещается прямая n, двигается по кривой, ход которой совпадает с ходом ребра возврата ее полярного торса.

Существует восемь различных вариантов сочетаний направления возрастания радиусов кривизны, радиусов соприкасающихся сфер и хода вдоль монотонных кривых. Все варианты можно определить тремя параметрами:

- направление хода ребра возврата полярного торса кривой;
- направление обкатывания полярного торса нормальной плоскостью кривой;
- расположение в нормальной плоскости точки, описывающей при своем движении монотонную кривую.

Предложенная классификация позволяет рассматривать любую кривую как состоящую из участков монотонных кривых и формировать её локально, по этим участкам.

На основании механизма формирования монотонной кривой линии сделан анализ взаимного расположения ее соприкасающихся окружностей и сфер. Соприкасающиеся сферы рассматриваются как заданные соприкасающимися окружностью и бесконечно близкой точкой кривой, а соприкасающиеся окружности как линии пересечения смежных соприкасающихся сфер. Указанный анализ позволяет сделать вывод о расположении монотонной кривой относительно ее соприкасающихся сфер. Кривая линия постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в одном направлении, расположена за пределами ее соприкасающихся сфер. Если вдоль монотонной кривой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в разных направлениях, то она расположена внутри своих соприкасающихся сфер.

Цель исследования

Исследовать условия формирования дискретно представленной кривой (ДПК) постоянного хода с монотонным изменением радиусов соприкасающихся окружностей и сфер. Разработать способ, позволяющий определить область возможного расположения кривых, с заданными геометрическими свойствами. Предложить схему сгущения пространственного точечного ряда, которая обеспечивает формирование ДПК с монотонным изменением геометрических характеристик.

Изложение основного материала исследования

Рассмотрим точечный ряд, расположенный на кривой линии l постоянного хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер монотонно возрастают в одном направлении. Каждые четыре последовательные точки определяют прилегающую сферу – $ПСф_i$ $(i–1, i, i+1, i+2)$ и две принадлежащие ей прилегающие окружности – $ПО_i$ $(i–1, i, i+1)$ и $ПО_{i+1}$ $(i, i+1, i+2)$.

Когда расстояние между точками бесконечно мало, то они определяют соприкасающиеся окружности и сферы($СО_i$ и $ССф_i$).

При увеличении расстояний между точками, заданными на l, определяемые этими точками окружности и сферы будут пересекать кривую.

Направление возрастания вдоль точечного ряда радиусов $ПО$ и $ПСф$ соответствует направлению возрастания радиусов $СО_i$ и $ССф_i$ вдоль l.

$ПСф_i$ пересекает l в точках i–1, i, i+1, i+2 (рис. 3).

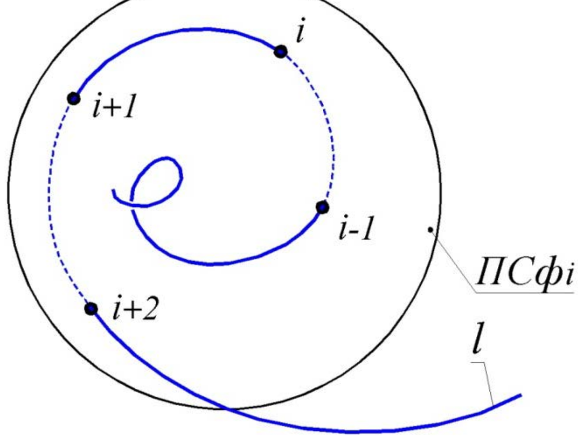

Рис. 3. Расположение монотонной кривой относительно прилегающей сферы

Участки кривой …i–1, i…i+1, i+2… расположены за пределами $ПСф_i$, а участки i–1 … i и i+1… i+2 – внутри нее. Из этого следует, что последовательные $ПСф_{i-1}$, $ПСф_i$, $ПСф_{i+1}$ ограничивают область, внутри которой расположен участок i…$i+1$ кривой l. Эту область, имеющую форму сферического трехгранника, будем называть трехгранник прилегающих сфер и обозначим δ_i.

Для кривой l трехгранник δ_i расположен за пределами $ПСф_i$, а для кривой, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей и сфер возрастают в противоположных направлениях, δ_i расположен внутри $ПСф_i$.

Аналогичные трехгранники, определенные на остальных участках, составляют область возможного расположения монотонной ДПК. Все кривые линии, интерполирующие точечный ряд, характеристики которых соответствуют характеристикам l, находятся внутри области возможного расположения ДПК.

Точка сгущения ($i_{сг}$) назначается в плоскости P_i, перпендикулярной хорде $[i, i+1]$ и проходящей через середину хорды. Исходная область расположения точки сгущения – криволинейный треугольник 1, 2, 3, получаемый в пересечении трехгранника δ_i плоскостью P_i (рис. 4) Характеристики криволинейного треугольника однозначно определяют тип монотонной ДПК.

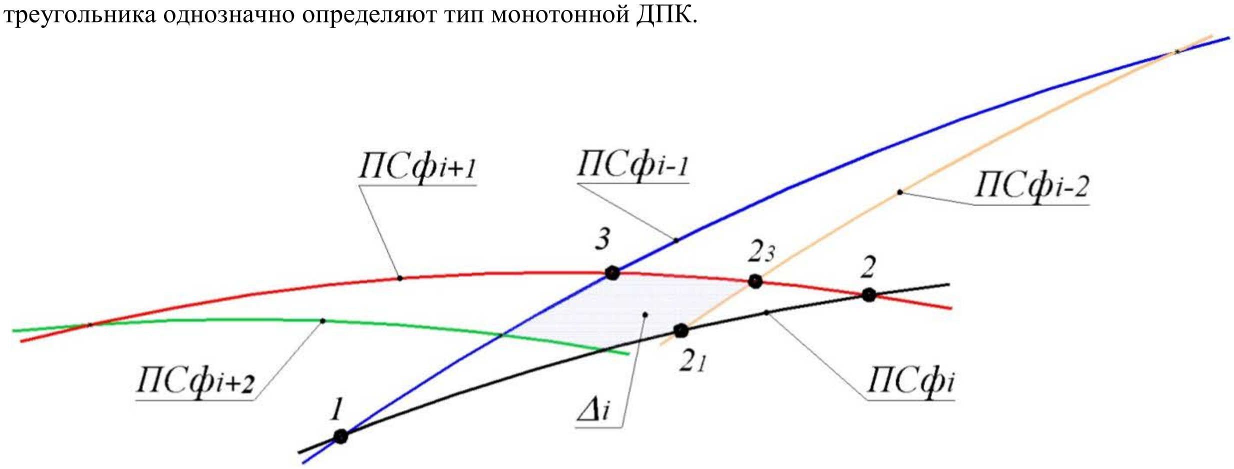

Рис. 4. Область расположения точки сгущения

Участок ДПК (i, i+1) расположен в пределах трехгранника δ_i и одновременно за пределами $ПСф_{i-2}$ и $ПСф_{i+2}$. Окружности пересечения указанных сфер плоскостью P_i могут ограничивать область возможного расположения точки $i_{сг}$. Криволинейный многоугольник, ограниченный дугами пяти окружностей, получаемых в пересечении плоскостью P_i пяти последовательных прилегающих сфер ($ПСф_{i-2}$ … $ПСф_{i+2}$), будем называть областью расположения точки сгущения i-го участка ДПК и обозначим Δ_i.

Сгущение производится на участках с максимальной областью расположения ДПК. Назначив $i_{сг}$ на участке (i, i+1) получаем последовательность узлов, определяющих два новых участка – (i, $i_{сг}$) и ($i_{сг}$, i+1), четыре новые прилегающие сферы: $ПСф$(i–2, i–1, i, $i_{сг}$), $ПСф_i$(i–1, i, $i_{сг}$, i+1), $ПСф_i$(i, $i_{сг}$, i+1, i+2), $ПСф_i$($i_{сг}$, i+1, i+2, i+3) и шесть новых трехгранников прилегающих сфер ($\delta^{сг}$).

На участках (i, $i_{cг}$) и ($i_{cг}$, i+1) трехгранники $\delta^{cг}$ ограничены прилегающими сферами, полученными в результате назначения точки сгущения. На участках (i–2, i–1), (i–1, i), (i+1, i+2), (i+2, i+3) трехгранники $\delta^{cг}$ ограничены исходными и вновь сформированными иприлегающими сферами, которые локализуют исходные трехгранники прилегающих сфер. Назначение точки сгущения в пределах области Δ_i гарантирует расположение трехгранников $\delta^{cг}$ в пределах исходной области расположения ДПК.

Назначение точек сгущения внутри области Δ_i необходимое и достаточное условие формирования монотонной ДПК. В случае назначения $i_{cг}$ на границе Δ_i, например на $ПСф_{i\text{-}2}$, трехгранники $\delta_{i\text{-}1}{}^{cг}$ и $\delta_{i\text{-}2}{}^{cг}$ выродятся в отсеки этой сферы. В этом случае участок ДПК (i–2 ... i) будет формироваться как сферическая кривая, принадлежащая $ПСф_{i\text{-}2}$. Если $i_{cг}$ назначить за пределами Δ_i, например, внутри криволинейного треугольника $2,2_1,2_3$ (рис. 4), то получим трехгранники $\delta_{i\text{-}1}{}^{cг}$ и $\delta_{i\text{-}2}{}^{cг}$, определяющие участки монотонной ДПК правого хода, вдоль которой радиусы соприкасающихся окружностей монотонно возрастают, а радиусы соприкасающихся сфер убывают. В этом случае ДПК будет состоять как минимум из трёх монотонных участков

Наличие постоянно локализующейся в результате последовательных сгущений области возможного расположения обвода, при сохранении исходных характеристик трехгранников прилегающих сфер – необходимое условие формирования монотонной ДПК.

Монотонные участки ДПК формируются сгущением исходного точечного ряда по следующей схеме.

1. На каждом участке, ограниченном двумя последовательными исходными точками, формируется тетраэдр расположения ДПК. Параметры тетраэдров позволяют определить ход и направление увеличения значений кручения вдоль ДПК [1].
2. Внутри каждого тетраэдра определяется область расположения ДПК, ограниченная прилегающими сферами – трехгранники прилегающих сфер.
3. Точки сгущения назначаются внутри области возможного расположения ДПК.

В результате каждого сгущения получаем точечный ряд, вдоль которого радиусы прилегающих окружностей и сфер возрастают в том же направлении, что и у исходного точечного ряда. Наличие после назначения каждой точки сгущения последовательно локализующейся области расположения ДПК обеспечивает схождение процесса моделирования к формированию участков, вдоль которых значения кручения, кривизны и радиусов соприкасающихся сфер изменяются монотонно.

Выводы

Предложен способ формирования на основе точечного ряда произвольной конфигурации дискретно представленной кривой (ДПК) с регулярным изменением кручения, радиусов соприкасающихся окружностей и сфер. ДПК формируется по участкам, вдоль которых обеспечивается монотонное изменение геометрических характеристик кривой.

Монотонные участки формируются сгущением исходного точечного ряда и не требуют аналитического представления. Определение области возможного по условиям задачи расположения кривой позволяет оценивать максимальную абсолютную погрешность, с которой ДПК представляет формируемый обвод. Окончательное решение может быть получено в виде сопровождающей ломаной линии, расстояние от которой до кривой с заданными геометрическими свойствами не превышает заранее назначенной величины.

Список использованной литературы

1. Гавриленко Е.А. Вариативное дискретное геометрическое моделирование одномерных обводов с заданными дифференциально геометрическими свойствами / Е.А. Гавриленко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2015. – Вип. 3 (54). – С. 555-559.
2. Гавриленко Е.А. Формирование геометрических характеристик монотонной кривой линии / Е.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк, В.А. Пахаренко // Вісник Херсонського національного технічного університету. – 2016. – Вип. 3 (58). – С. 492-496.
3. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція: навчальний посібник / В.М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.