УДК 514.18

О.В. ДУБІНІНА
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького
Є.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврійський державний агротехнологічний університет

КОНТРОЛЬ ЗАКОНОМІРНОСТІ ЗМІНИ КРИВИНИ НА ДІЛЯНЦІ КУБІЧНОГО В-СПЛАЙНА

У роботі запропоновано спосіб формування ділянки кубічного В-сплайна із забезпеченням монотонної зміни кривини через контроль параметрів базисних трикутників. Запропоновано спосіб визначення радіусів кривини в граничних точках дуги В-сплайна через параметри контрольного багатокутника. Запропоновано способи корегування контрольного багатокутника з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.

Ключові слова: кубічний В-сплайн, дискретно представлена крива (ДПК), контрольний багатокутник, базисний трикутник (БТ), кривина.

Е.В. ДУБИНИНА
Мелитопольский государственный педагогический университет имени Богдана Хмельницкого
Е.А. ГАВРИЛЕНКО, Ю.В. ХОЛОДНЯК
Таврический государственный агротехнологический университет

КОНТРОЛЬ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗНЫ НА УЧАСТКЕ КУБИЧЕСКОГО В-СПЛАЙНА

В работе предложен способ формирования участка кубическим В-сплайном с обеспечением монотонного изменения кривизны через контроль параметров базисных треугольников. Предложен способ определения радиусов кривизны в граничных точках дуги В-сплайна через параметры контрольного многоугольника. Предложены способы корректировки контрольного многоугольника с целью обеспечения монотонного изменения кривизны вдоль кривой.

Ключевые слова: кубический В-сплайн, дискретно представленная кривая (ДПК), контрольный многоугольник, базисный треугольник, кривизна.

O.V. DUBININA
Melitopol State Pedagogical University named after Bohdan Khmelnytsky
E.A. GAVRILENKO, Yu.V. KHOLODNYAK
Tavria State Agrotechnological University

CHECKING THE REGULARITY OF CHANGING CURVATURE ON THE PART OF THE CUBIC B- SPLINE

This article describes the method for forming the part of the curve with a cubic B-spline, with a monotone change in the curvature through the control of the base triangles parameter's. The method of determining the curvature radii in the boundary points of the B-spline arc through the parameters of the control polygon is proposed. Methods of correction of the control polygon are proposed in order to provide a monotonic change in the curvature along the curve.

Keywords: a cubic B-spline, a discrete curve, a control polygon, a basic triangle, a curvature.

Постановка проблеми

Формування складних поверхонь, заданих дискретним лінійчатим каркасом, є важливим завданням геометричного моделювання. Властивості одновимірних обводів, які є лінійними елементами каркасу, визначають функціональні властивості поверхні. Наприклад, при моделюванні динамічних поверхонь, призначенням яких взаємодія із середовищем (канал двигуна внутрішнього згоряння, лопатка турбіни, крило літака та інші), вимоги до лінійних елементів – другий порядок гладкості обводу при мінімальній кількості особливих точок (точки зміни опуклості-ввігнутості та точки зміни напряму зростання – зменшення значення кривини вздовж кривої). Більшість сучасних пакетів геометричного моделювання для побудови одновимірних обводів використовують кубічний В-сплайн. Коригування закономірності зміни кривини уздовж В-сплайна можливо в ручному режимі. А саме, на екрані монітора за допомогою миші через параметри контрольного багатокутника змінюється закономірність зміни кривизни уздовж сплайна. При цьому орієнтуємося на фантом графіка зміни кривини. Забезпечення контролю зміни кривини уздовж обводу, який складається з великої кількості вузлів, в ручному режимі виявляється трудомістким, а часом – неможливим. Розробка інструмента, який дозволить в автоматизованому режимі забезпечити заданий характер зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, надасть можливість ефективно моделювати поверхні із заданими функціональними властивостями.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В роботі [3] досліджено положення дотичних у вихідних точках, при яких задача формування обводу з монотонною зміною кривини має розв'язок. Форма базисного трикутника (БТ), обмеженого дотичними до обводу, вздовж якого радіуси кривини монотонно зростають, та відповідною хордою супроводжуючої ламаної лінії (СЛЛ), повинна відповідати умові:

$$a < b \tag{1}$$

де a, b – довжини сторін БТ, які належать дотичним до обводу, при цьому сторона з довжиною a відповідає вузлу з меншим радіусом кривини.

Виконання умови (1) необхідно забезпечити незалежно від того, ділянками яких кривих формується обвід.

В [1] розглянуто метод поділу сплайна за алгоритмом Кокса де Бура та кривої Без'є за допомогою алгоритму де Кастельжо. Якщо кубічний В-сплайн визначає контрольний багатокутник, що складається з трьох ланок, то В-сплайн ідентичний кубічній кривій Без'є. В цьому випадку, поділ В-сплайна можливо здійснити за допомогою алгоритму де Кастельжо. Якщо контрольний багатокутник, який задає неоднорідний кубічний В-сплайн складається з трьох ланок, то визначити будь-яку точку на В-сплайні можливо за допомогою алгоритму де Кастельжо. Кожна ланка контрольного багатокутника поділяється у співвідношенні $u : (1 - u)$, де $0 < u < 1$. З'єднавши точки, що поділяють ланки, отримуємо відрізки, які також ділимо у співвідношенні $u : (1 - u)$. Кількість кроків поділу відрізків за алгоритмом де Кастельжо дорівнює кількості ланок контрольного багатокутника сплайна. В результаті виконання алгоритму отримуємо точку(т. A), яка належить сплайну, та два контрольні багатокутники, кожний з яких задає ділянку вихідної кривої.

Завдання В-сплайна через контрольні точки носить дискретний характер та забезпечує гнучкість управління його формою. Підхід до управління В-сплайном через контрольні точки близький до формування дискретно представленої кривої на основі вихідного точкового ряду. Задача формування геометричних образів, які задані впорядкованою множиною точок може бути розв'язана варіативним дискретним геометричним моделюванням (ВДГМ). Основні принципи та напрямки ВДГМ сформульовані в [2].

Мета дослідження

Запропонувати спосіб визначення закону зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, заданого вихідними контрольними точками. Розробити спосіб корегування точок, що задають В-сплайн, з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.

Викладення основного матеріалу дослідження

Дискретно представлена крива (ДПК), вздовж якої радіуси кривини монотонно зростають, формується на основі впорядкованої множини точок $[i \ldots n]$. Назначимо у вузлах ДПК дотичні, в таких положеннях, які дозволяють сформувати кожну ділянку кривої з монотонною зміною кривини [3]. Отримуємо ланцюг БТ, кожний з яких відповідає умові (1). Контрольний багатокутник, що задає В-сплайн, поєднуємо з базисним трикутником. Розглянемо i-ий БТ та умови, при яких можливо сформувати ділянку ДПК кубічним В-сплайном. Дотичні, які утворюють БТ, t_i та t_{i+1} проходять через контрольні точки багатокутника, що задає В-сплайн, P_0, P_1 та P_2, P_3 відповідно (див. рис. 1).

В точках i та $i+1$, які обмежують ділянку сплайна, можуть бути задані значення кривини ДПК.

Дугу В-сплайна, яка визначає ділянку ДПК, задаємо, назначивши положення ланки багатокутника P_1P_2. Ланка P_1P_2 визначає положення точки A, що належить сплайну, та дотичну t^A в цій точці. В першому приближенні ланка P_1P_2 встановлюється паралельно хорді P_0P_3. В цьому випадку точці A відповідає значення параметру рівняння В-сплайна $u = \frac{1}{2}$, а дотична t^A паралельна хорді БТ P_0P_3. Дотична t^A знаходиться на відстані $\frac{3}{4}h$ від хорди P_0P_3, де h – відстань від хорди P_0P_3 до ланки P_1P_2 багатокутника $P_0P_1P_2P_3$.

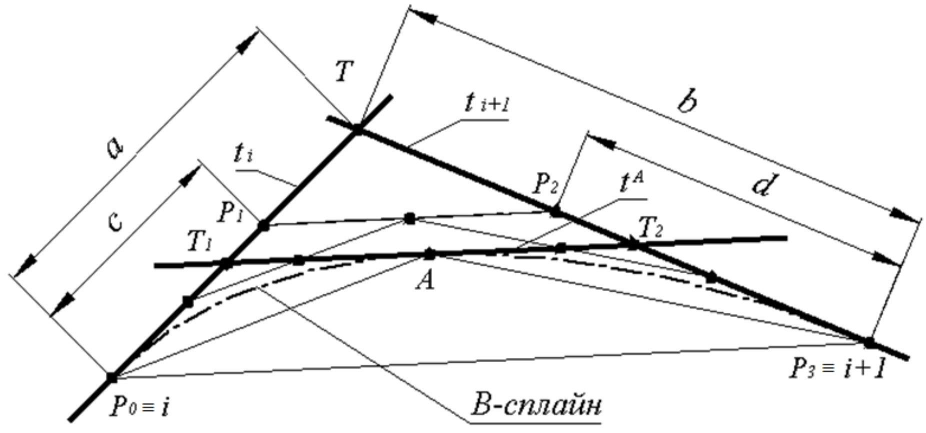

Рис. 1. Оцінка характеристик В-сплайна через параметри базисних трикутників

$$k = \frac{S}{l^2}$$

де S – площа БТ згущення; l – довжина основи БТ згущення.

За алгоритмом де Кастельжо розділяємо вихідну дугу В-сплайна на ділянки, кожній з яких відповідає контрольний багатокутник та поєднаний з ним БТ згущення.

Необхідною умовою монотонної зміни кривини вздовж В-сплайна є відповідність параметрів скільки завгодно великого числа БТ згущення умові (1). Максимально можливе відхилення сформованого В-сплайна від кривої з монотонною зміною кривини будемо оцінювати за допомогою коефіцієнту:

Якщо БТ згущення, якому відповідає максимальне значення коефіцієнту k, не перевищує наперед задане значення та при цьому форма всіх БТ згущення відповідає умові (1), задачу формування В-сплайна з монотонною зміною кривини будемо вважати виконаною.

Ланцюг, який складається з будь-якої кількості БТ згущення, відповідає задачі формування В-сплайна з монотонною зміною кривини, якщо перший та останній БТ ланцюга відповідають умові (1).

Якщо форма будь-якого БТ згущення не відповідає (1) та при цьому значення коефіцієнту недостатньо мало, необхідно змінити форму В-сплайна, корегуючи положення середньої ланки вихідного контрольного багатокутника.

На першому етапі корегування змінюємо положення середньої ланки P_1P_2, яка залишається паралельною основі БТ P_0P_3. Якщо умова (1) не виконується в першому БТ згущення (на рис. 1 це БТ P_0T_1A), ланку P_1P_2 переміщуємо в напрямку хорди P_0P_3. При цьому змінюється форма всіх БТ згущення ланцюга. Крайнє положення середньої ланки наступає тоді, коли останній БТ згущення стає рівнобедреним. Якщо останній БТ згущення не відповідає умові (1) – середня ланка зміщується у зворотному напрямку.

Дослідимо, як положення дотичної t^A визначає радіуси кривини у точках i та $i+1$, що обмежують ділянку сплайна.

Для кривої, що задана параметричними рівняннями, радіус кривини визначається за формулою:

$$R_i = \frac{|r'(u)|^3}{|r'(u) \times r''(u)|},$$

де $r(u)$ – вектор-функція кривої.

Виразивши першу та другу похідну сплайна через радіус-вектори контрольних точок [1], отримуємо формули визначення радіусів кривини у крайніх точках ділянки i та $i+1$ (R_i та R_{i+1} відповідно):

$$R_i = \frac{3|r_1 - r_0|^3}{2|(r_1 - r_0)\times(r_2 - r_1)|};$$

$$R_{i+1} = \frac{3|r_3 - r_2|^3}{2|(r_2 - r_1)\times(r_3 - r_2)|}.$$

Виразивши радіус-вектори через параметри контрольного багатокутника, отримуємо:

$$R_i = \frac{3c^3}{4S_1}, \qquad R_{i+1} = \frac{3d^3}{4S_2},$$

де c – довжина ланки P_0P_1 контрольного багатокутника (див. рис.1); d – довжина ланки P_2P_3; S_1 та S_2 – площі трикутників $P_0P_1P_2$ та $P_1P_2P_3$ відповідно.

При формуванні обводу другого порядку гладкості необхідно забезпечити рівність радіусів кривини в кінцевій точці попередньої та першій точці наступної ділянки.

Якщо при зміщенні середньої ланки P_1P_2 паралельно хорді P_0P_3 перший та останній БТ згущення досягають рівнобедреності, то корегування параметрів ланцюга виконуємо зміною кута нахилу середньої ланки P_1P_2 до хорди P_0P_3.

При корегуванні першого БТ згущення повертаємо середню ланку P_1P_2 таким чином, щоб ланка P_0P_1 контрольного багатокутника зменшувалася, а ланка P_2P_3 збільшувалася (рис. 2). При корегуванні останнього БТ згущення – діємо навпаки.

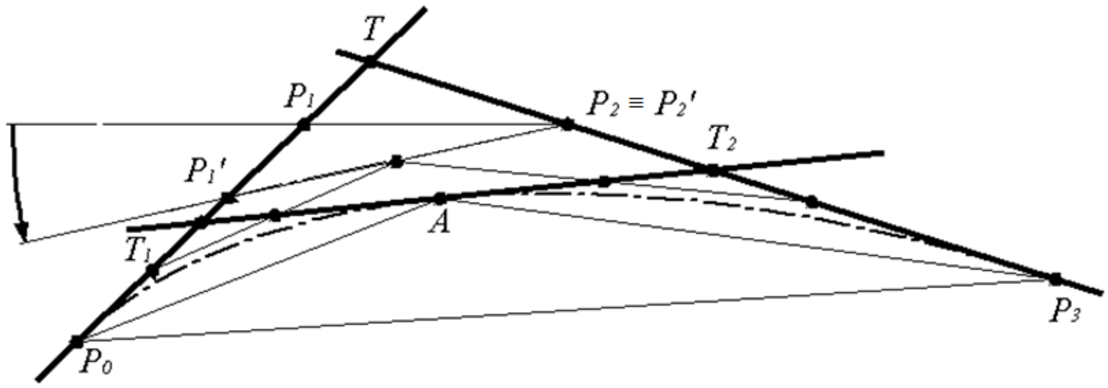

Рис. 2. Корегування базисного трикутника P_0T_1A обертанням ланки (P_1P_2)

Якщо після виконання корегувань, сформувати ділянку ДПК з монотонною зміною кривини дугою одного В-сплайна неможливо, ділянка формується як складена крива другого порядку гладкості, що складається з двох та більше ділянок В-сплайна. В цьому випадку БТ згущення формуються за допомогою алгоритму Кокса де Бура.

Висновки

В роботі запропоновано спосіб формування ділянки кубічного В-сплайна із забезпеченням монотонної зміни кривини вздовж кривої при накладених граничних умовах на координати граничних точок та положення дотичних в них.

Запропоновано спосіб, який дозволяє визначити закономірність зміни кривини вздовж кубічного В-сплайна, що визначається контрольним багатокутником. Запропоновано спосіб визначення радіусів кривини в граничних точках дуги В-сплайна через параметри контрольного багатокутника. Запропоновано способи корегування контрольного багатокутника з метою забезпечення монотонної зміни кривини вздовж кривої.

Завданням майбутніх досліджень є формування обводу другого порядку гладкості з монотонною зміною кривини, ділянки якого складаються з В-сплайна, що може складатися з довільної кількості ділянок.

Список використаної літератури

1. Ли Кунву. Основы САПР CAD/CAM/CAE / Кунву Ли. – СПб. : Питер, 2004. – 560 с.
2. Найдиш В.М. Дискретна інтерполяція / В. М. Найдиш. – Мелітополь: Люкс, 2008. – 250 с.
3. Холодняк Ю.В. Вариативное дискретное геометрическое моделирование обводов на основе базисных треугольников по заданному изменению кривизны: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Ю.В. Холодняк. – Мелитополь, 2016. – 24 с.