

УДК 515.2

С.М. КОВАЛЬОВ, С.І. БОТВИНОВСЬКА,
А.В. ЗОЛотоВА, С.О. ЛОСЬ
Київський національний університет будівництва і архітектури**ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО РЯДУ ТОЧОК
СКЛАДЕНИХ КРИВИХ ЛІНІЙ ПІД ДІЄЮ НОРМАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Розглянуто формування дискретного каркаса кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску, з урахуванням власної ваги матеріалу та зусиль, які виникають у затяжках. Задача формування дискретного каркаса моделі поверхні пневматичної оболонки може бути вирішена на основі використання статико-геометричного методу (СГМ). Різноманітність форм таких конструкцій можна отримати за рахунок як різних елементів спираючої контуру (лінійних і точкових), так і за рахунок різних внутрішніх затяжок (канатів і тросових елементів) і додаткових з'єднань.

Ключові слова: геометричне моделювання, пневматична оболонка, дискретний каркас, статико-геометричний метод

С.Н. КОВАЛЁВ, С.И. БОТВИНОВСКАЯ,
А.В. ЗОЛотоВА, С.О. ЛОСЬ

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

**ФОРМИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОГО РЯДА ТОЧЕК
СОСТАВНЫХ КРИВЫХ ЛИНИЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

Рассмотрено формирование дискретного каркаса кривой линии, которая является двумерным аналогом пневматической оболочки высокого давления, с учетом собственного веса материала и усилий, которые возникают в затяжках. Задача формирования дискретного каркаса модели пневматической оболочки может быть решена на основе использования статико-геометрического метода (СГМ). Разнообразие форм таких конструкций можно получить как за счет разных элементов опоры контура (линейных и точечных), так и за счет разных внутренних затяжек (канатов и тросовых элементов) и дополнительных соединений.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, пневматическая оболочка, дискретный каркас, статико-геометрический метод

S. KOVALEV, S. BOTVINOVSKA,
A. ZOLOTOVA, S. LOS

Kyiv National University of Construction and Architecture

**FORMATION OF THE DISCRETE SET OF POINTS OF COMPOUND CURVES UNDER
THE NORMAL LOAD**

The task of formation of the discrete frame model of the shell can be accomplished using the static-geometric method (SGM). Variety of forms of such constructions can be obtained as from different (linear and point) elements of the contour support as well as from different internal ties (cable stays and rope elements) and additional connections. Considered the formation of the discrete frame of the curve that is a two-dimensional interpretation of pneumatic shell high pressure with the own weight of the material and forces that emerge in the ties taken into account

Keywords: geometric modeling, pneumatic shell, discrete frame, static-geometric method.

Постановка проблеми

Застосування пневматичних конструкцій в архітектурі і будівництві обумовлюється можливістю за їх допомогою перекидати великі прогони конструкціями з малою вагою; компактністю самих пневматичних конструкцій в транспортному (неробочому) стані та коротким терміном монтажу таких конструкцій.

Поверхні пневматичних оболонок надлишкового високого тиску, в ідеалі, формуються під діями нормальних до поверхні зусиль та зусиль власної ваги. Як правило, це м'які оболонки, що характеризуються малою жорсткістю на згин. Несуча спроможність таких конструкцій підвищується за рахунок накладання на них підсилюючих канатів або тросових елементів. Стабільність форми пневматичних оболонок забезпечується внутрішнім тиском, в результаті чого в оболонці виникають розтягуючі зусилля.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Пневматичні конструкції знайшли широке застосування у виробництві меблів, в суднобудуванні, у будівництві та архітектурі у другій половині двадцятого сторіччя. Вони виготовляються з повітронепроникних матеріалів. Конструкція таких оболонок займає проектне положення завдяки надмірному тиску повітря, що її заповнює.

Основи теорії м'яких оболонок було закладено Алексеевим С.О. в роботі [1]. Дуже часто в якості покриття в архітектурі використовують пневмоподушки (на прямокутному опорному контурі) і пневмолінзи (на довільному опорному контурі). Для розрахунків конструкцій такого типу Дж. Оденом і В. Кубітцем [7] було запропоновано використовувати метод кінцевих елементів, який знайшов подальший розвиток у роботах Ч. Лі, Дж. Леонарда [8], Н. Срівастави [9], В.Н. Кислоокого [4], В.І. Усюкіна [5], Р.Г. Борсова [2], Е. Хауга [6].

Мета дослідження

Найцікавішими, на сьогодні, залишаються питання моделювання подібних поверхонь за наперед заданими умовами на довільних опорних контурах. Задача формування дискретного каркасу моделі поверхні пневматичної оболонки може бути вирішена на основі використання статико-геометричного методу (СГМ), який є наочною інтерпретацією методу скінчених різниць.

Різноманітність форм таких конструкцій можна отримати за рахунок як різних елементів спирання контуру (лінійних та точкових), так і за рахунок різних внутрішніх зтяжок (канатів і тросових елементів) і додаткових з'єднань.

Площинним аналогом подібної задачі є формування дискретного ряду точок складених кривих ліній під дією нормального навантаження.

Мета роботи – змоделювати дискретний каркас кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску з урахуванням власної ваги матеріалу оболонки та зусиль, які виникають у зтяжках.

Викладення основного матеріалу дослідження

За основу дискретного моделювання поверхонь пневматичних конструкцій збиткового високого тиску можна прийняти площинну задачу формування кривих ліній у дискретному вигляді. Дискретні каркаси кривих ліній формуються як натягнуті нитки під дією зосереджених зусиль, прикладених до їх вузлів, за наперед заданими умовами. В якості останніх можуть обиратись: вузли, спільні для декількох кривих ліній; одна або декілька внутрішніх зтяжок, що будуть сприяти жорсткості конструкції; коефіцієнти напруження у ланках (стиску або розтягнення); апліката одного із вузлів. Площинна задача обрана тому, що вона простіша у розв'язанні, ніж тривимірна, але передбачається її подальше узагальнення на поверхні у тривимірному просторі.

В такому випадку, зусиллям збиткового внутрішнього тиску на вузли поверхні будуть відповідати нормальні зусилля, прикладені до вузлів дискретної моделі кривої лінії. Власній вазі матеріалу пневматичної оболонки у двовимірній моделі будуть відповідати вертикальні зусилля, пропорційні довжинам в'язей дискретної моделі кривої лінії. У спрощеному випадку, з певним наближенням, величину власної ваги можна задавати, у всіх вузлах дискретної моделі кривої лінії, однаковою.

Розглянемо дискретну модель кривої лінії, що буде двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску. На рис. 1 представлена розрахункова схема побудови дискретного точкового каркасу кривої лінії. Для розв'язання задачі будемо враховувати, що на вузли такої моделі діє збитковий внутрішній тиск, аналогом якого приймається зусилля (P_i) та власна вага елементів – (G), прикладені до кожного з вузлів ламаної. Слід також враховувати, що окремим параметром є власна вага окремих в'язей-розтяжок – (G'). Напрямок зусиль вибирається таким, як показано на рис. 1.

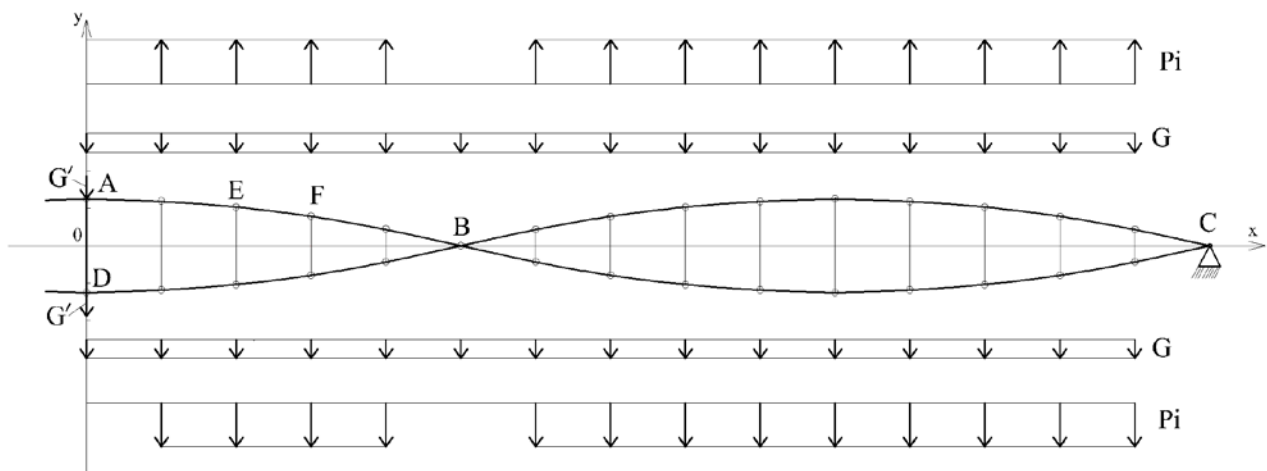


Рис. 1. Розрахункова схема дискретної кривої лінії, яка є двовимірною інтерпретацією пневматичної оболонки високого тиску

Елементами такої моделі виступають: вузли (A, B, C, D, E, F); в'язі (ребра) як одного, так і другого поясів, типу (EF); в'язі-розтяжки, які з'єднують вузли двох різних поясів (AD). Власна вага елементів конструкції у вузлах типу (E) приймається, у спрощеному варіанті, однаковою для всіх вузлів. Власна вага елементу у вузлі (типу B) приймається у 2 рази більшою, а власна вага елементу у вузлах (типу A, D) включає в себе ще і половину власної ваги стержня (AD).

Серед вузлів такої моделі можна виділити: «звичайні» вузли, які є незакріпленими, (типу E, F) з індексом розгалуження – 2; закріплені вузли, які можуть бути заданими та можуть відповідати крайовим умовам задачі типу (C). До "особливих" вузлів можна віднести вузли (типу A), з індексом розгалуження – 3, та вузли (типу B), з індексом розгалуження – 4.

Для розрахунку координат вузлів дискретної кривої лінії обираємо статико-геометричний метод (СГМ). Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів. Зовнішні зусилля, які імітують надлишковий тиск, прикладені до вузлів є нормальними і будуть залежати від координат суміжних вузлів дискретної кривої. Оскільки, координати вузлів є невідомими, то система рівнянь рівноваги вузлів стає нелінійною. В процесі моделювання дискретної кривої лінії необхідно весь час уточнювати коефіцієнти пропорційності при зусиллях у вузлах, та напрямок зовнішнього формоутворюючого навантаження.

Розв'язання нелінійних систем рівноваги вузлів при формуванні дискретних образів статико-геометричним методом (СГМ) потребує правильної організації ітераційних процесів. Це дозволить отримати ціленаправлений результат з довільною допустимою похибкою [3]. Всі розрахунки у подальшому будемо виконувати за допомогою системи MathCAD.

Застосовуючи метод послідовних наближень організуємо ітераційний процес. На першому етапі необхідно правильно обрати перше наближення. Найпростішим є варіант, коли всі зовнішні зусилля, прикладені до вузлів з рівномірним кроком вздовж осі OX дискретної кривої лінії, направлені вертикально. Після знаходження координат вузлів першого наближення, надалі будемо уточнювати зовнішнє навантаження kPx_i, kPy_i за формулами (1), (2):

$$kPx_i = \frac{kP(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} \quad (1)$$

$$kPy_i = \frac{-kP(x_{i+1} - x_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} \quad (2)$$

де kPx_i, kPy_i – складові формоутворюючого навантаження, що прикладається до кожного з вузлів кривої лінії, в склад якого входить як величина збиткового тиску так і власна вага;

x_i, y_i – координати вузлів дискретної моделі;

i – номер вузлів у глобальній системі координат.

Форма дискретної моделі кривої лінії, що може бути двовимірним аналогом перерізу пневматичної оболонки, повністю залежить від зусиль, що прикладаються до її вузлів.

Приклад 1. Розглянемо формування складеної кривої, яка є контуром перерізу пневматичної оболонки за наступними вихідними даними. Задано, дивлячись на рис. 1, ординати y_i вузлів дискретної ламаної: вузла типу (C), з номером $i=0$, і одного з вузлів типу (E), з номером $i=5$: $y_0=2.5, y_5=0$. Власна вага елементів $G=0.1$. Величини проєкцій формоутворюючого зусилля kPx_i, kPy_i і координати невідомих вузлів дискретної кривої знаходимо із системи рівнянь рівноваги (3):

$$\begin{aligned} X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1} + k\bar{P}_{x,i} &= 0; \\ Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} + k\bar{P}_{y,i} + G_i + G'_i &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

Згідно із алгоритмом, спочатку знаходимо абсциси та ординати вузлів у першому наближенні, коли зусилля зовнішнього навантаження kP_i вважаємо вертикальними.

Далі уточнюємо величину формоутворюючого навантаження і координати відповідних вузлів. Для отримання кінцевого результату знадобилося три ітерації. Результати занесені у табл. 1. За даними таблиці побудовано графіки кривих першої та останньої ітерації (рис. 2).

Значення координат вузлів, які було отримано на IV ітерації, збігаються з відповідними координатами III ітерації.

Таблиця 1

№ вузла, i	kPy_i	kPx_i	Y_i	X_i
1	2	3	4	5
I ітерація				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2985	-0.0299	2.3971	2.1182
2	-0.2942	-0.0588	2.0901	4.2059
3	-0.2873	-0.0862	1.5832	6.2337
4	-0.2785	-0.1114	0.8835	8.1736
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2343	-0.1874	-1.6874	8.3045
7	0.2572	-0.1543	-3.036	6.4181
8	0.2785	-0.1114	-4.0225	4.3744
9	0.2942	-0.0588	-4.6252	2.2171
10	0.3000	0.0000	-4.8280	0.0000
II ітерація				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2984	-0.0306	2.3971	2.1192
2	-0.2940	-0.0598	2.0900	4.2072
3	-0.2872	-0.0866	1.5833	6.2345
4	-0.2789	-0.1104	0.8838	8.1735
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2390	-0.1814	-1.6946	8.2976
7	0.2591	-0.1512	-3.0456	6.4104
8	0.2788	-0.1108	-4.0324	4.3690
9	0.2941	-0.0592	-4.6351	2.2147
10	0.3000	0.0000	-4.8380	0.0000
III ітерація				
0	-0.3000	0.0000	2.5000	0.0000
1	-0.2984	-0.0306	2.3971	2.1193
2	-0.2940	-0.0598	2.0900	4.2075
3	-0.2872	-0.0866	1.5833	6.2347
4	-0.2789	-0.1104	0.8838	8.1736
5	-	-	0.0000	10.0000
6	0.2390	-0.1817	-1.6942	8.2980
7	0.2591	-0.1514	-3.0451	6.4108
8	0.2788	-0.1108	-4.0319	4.3693
9	0.2941	-0.0592	-4.6346	2.2148
10	0.0000	0.0000	-4.8375	0.0000

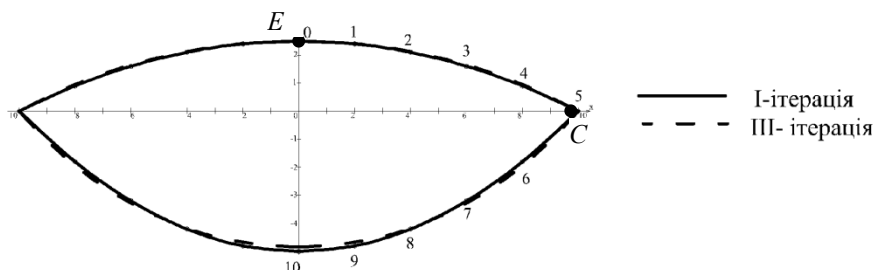


Рис. 2. Приклад 1. Графік кривої без зтяжки, перша і остання ітерації

Приклад 2. Необхідно побудувати дискретну криву лінію, яка буде двовимірним аналогом пневматичної оболонки високого тиску і матиме одну зтяжку, вузол типу (B). В якості вихідних даних задані ординати вузлів номер 0, 2: $y_0=0, y_2=1$. Для розрахунку власну вагу приймаємо $G=0.1$. У вузлі номер 5 плануємо зробити зтяжку, вузол типу (B) (рис. 1).

Обчислення координат кривої виконуємо за описаним вище алгоритмом. Складаємо систему рівнянь рівноваги вузлів (3), розв'язання якої відбувається в ітераційному режимі. Так само, як і в попередньому прикладі, результати розрахунків зведені у табл. 2. За результатами розрахунків побудовано графіки кривих першої і останньої ітерації (рис. 3).

Таблиця 2

№ вузла	kPy_i	kPx_i	Y_i	X_i
I ітерація				
0	-	-	0.0000	0.0000
1	-0.5821	0.1455	0.7496	1.9587
2	-0.6000	-0.1196	1.0000	3.8301
3	-0.5821	-0.1732	0.7329	5.7733
4	-0.5367	-0.2208	-0.0333	7.8204
5	-	-	-1.2519	10.0000
6	0.5571	-0.3634	-2.3704	8.1329
7	0.5993	-0.3027	-2.8156	6.0477
8	0.5747	-0.2216	-2.5440	4.1441
9	0.5031	-0.1185	-1.5809	2.1076
II ітерація				
0			0	0
1	-0.5821	0.1455	0.7499	2.0013
2	-0.6000	-0.0027	1.0000	3.8527
3	-0.5809	-0.1503	0.7317	5.7068
4	-0.5373	-0.2670	-0.0352	7.7158
5	-	-	-1.2559	10.0000
6	0.5588	-0.2187	-2.3765	8.0568
7	0.5994	-0.0258	-2.8214	5.8881
8	0.5732	0.1772	-2.5486	3.6930
9	0.5060	0.3224	-1.5850	1.6804
III ітерація				
0			0	0
1	-0.5821	0.1455	0.7499	2.0013
2	-0.6000	-0.0027	1.0000	3.8526
3	-0.5809	-0.1503	0.7329	5.7068
4	-0.5374	-0.2670	-0.0333	7.7158
5	-	-	-1.2519	10.0000
6	0.5588	-0.2187	-2.3704	8.0568
7	0.5994	-0.0258	-2.8156	5.8881
8	0.5732	0.1772	-2.5440	3.6929
9	0.5060	0.3224	-1.5809	1.6803

Слід зазначити, що математичний апарат статико-геометричного методу повністю відповідає математичному апарату методу скінчених різниць (МСР), тому похибка СГМ аналогічна тій, що виникає при розрахунках за МСР і достатньо широко вивчена у літературі. Саме тому, у процесі розв'язання поставлених задач похибка не досліджується. Використання СГМ надає наочності процесу формування дискретного точкового каркаса кривої лінії під дією зовнішнього формоутворюючого навантаження.

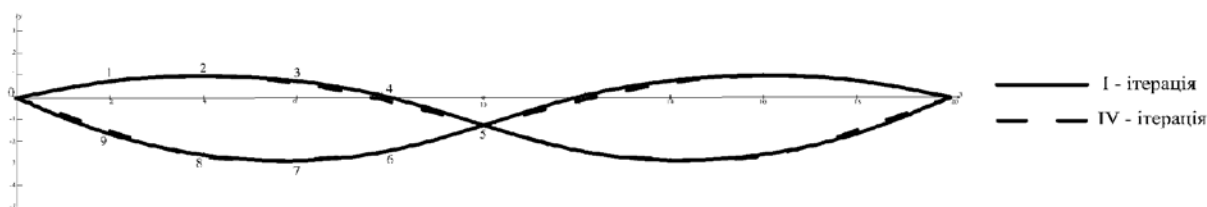


Рис. 3. Приклад 2. Графік кривої із затяжкою, перша і остання ітерації

Висновки

Площинна інтерпретація тривимірної задачі формування пневматичної оболонки високого тиску дозволила сконструювати і проаналізувати алгоритм визначення дискретного точкового каркасу кривої лінії за методом поступових наближень. Аналіз результатів розв'язання тестових прикладів показує, що ітераційний процес збігається до четвертого десяткового знаку.

В перспективі, запропонований алгоритм буде узагальнений для розв'язання тривимірної задачі формування дискретного точкового каркаса пневматичної оболонки.

Список використаної літератури

1. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек / С.А. Алексеев // Расчет пространственных конструкций. — М.: Стройиздат, 1967. — Вып. XI. — С. 31-52.
2. Борсов Р.Г. Исследование напряженно-деформированного состояния конструкций из мягких оболочек разностными методами [Текст]: Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. техн. наук : (05.07.03) / Моск. высш. техн. училище им. Н.Э. Баумана. — Москва : [б. и.], 1976. — 16 с.
3. Ботвіновська С.І. Нелінійні задачі формування дискретних образів статико-геометричним методом // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць. — Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. — Вип. 3. — С. 21-27.
4. Кислоокий В.Н. Исследование статики и динамики висячих, пневмонапряженных и комбинированных систем методом конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений, 1977. — № 4. — С. 27-30.
5. Усюкин В. И. Техническая теория мягких оболочек и ее применение для расчета пневматических конструкций. В кн.: Пневматические строительные конструкции. М.: Стройиздат, 1983, — С. 299-333.
6. Haug E. Finite element analysis of nonlinear membrane structures / E. Haug, G.H. Powell // Proc. IASS Pacific Symposium: Part II. Tension Structures and Space Frames. — Tokyo and Kyoto, 1971. — P. 165 - 175.
7. Oden J.T. Numerical analysis of nonlinear pneumatic structures / J.T. Oden, W.K. Kubitzka // Proceedings of the 1-st International colloquium on pneumatic structures. — Stuttgart, 1967. — P. 87-107.
8. Li C.-T., Leonard J. W. Finite Element Analysis of Inflatable Shells / C.-T. Li, J. W. Leonard // Journal of the Engineering Mechanics Division. — 1973. — Vol. 99. — P. 495-514.
9. Li C.-T., Srivastava N.K. Analysis of pneumatic shells with or without cable net; general finite-element formulation / C.-T. Li, N.K. Srivastava // Computers and Structures. — 1974. — Vol. 4. — P. 813-828.