

УДК 514.18

Л.М. КУЦЕНКО

Національний університет цивільного захисту України

Л.Л. ЗАПОЛЬСЬКИЙ

Український науково-дослідний інститут цивільного захисту

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗГОРТАННЯ У НЕВАГОМОСТІ
БАГАТОЛАНКОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ З ІНЕРЦІЙНИМ РОЗКРИТТЯМ**

Роботу присвячено геометричному моделюванню коливання багатоланкового маятника в умовах невагомості. Матеріал статті подано на прикладі моделі процесу розгортання багатоланкової конструкції (каркасу) космічного сонячного дзеркала, яка ототожнюється з багатоланковим маятником на уявній площині. Ініціювання коливань пропонується здійснювати за допомогою реактивного двигуна для надання імпульсу (типу "кляцання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. В результаті одержано інерційний спосіб розкриття багатоланкової конструкції. Опис процесу розгортання каркасу сонячного дзеркала (як коливання багатоланкового маятника) здійснено за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Процес розкриття можна контролювати за допомогою кадрів комп'ютерної анімації.

Ключові слова: багатоланковий маятник, великомасштабна конструкція, розгортання у космосі, дзеркало у космосі, рівняння Лагранжа другого роду.

Л.Н. КУЦЕНКО

Национальный университет гражданской защиты Украины

Л.Л. ЗАПОЛЬСКИЙ

Украинский научно-исследовательский институт гражданской защиты

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВЕРТЫВАНИЯ В НЕВЕСОМОСТИ
МНОГОЗВЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ С ИНЕРЦИОННЫМ РАСКРЫТИЕМ**

Работа посвящена геометрическому моделированию колебания многозвенного маятника в условиях невесомости. Материал статьи представлен на примере модели процесса развертывания многозвенной конструкции (каркаса) космического солнечного зеркала, отождествляемой с многозвенным маятником на абстрактной плоскости. Иницирование колебаний предлагается осуществлять при помощи реактивного двигателя для предоставления импульса (типа "щелчок") одному из узловых элементов многозвенного маятника. В результате получен инерционный способ раскрытия многозвенной конструкции. Описание процесса развертывания каркаса солнечного зеркала (как колебания многозвенного маятника) осуществлено при помощи уравнения Лагранжа второго рода. Процесс раскрытия можно контролировать при помощи кадров компьютерной анимации.

Ключевые слова: многозвенный маятник, крупномасштабная конструкция, развертывание в космосе, зеркало в космосе, уравнение Лагранжа второго рода.

L.N. KUTSENKO

National university of civil defence of Ukraine,

L.L. ZAPOLSKY

The State Emergency Service of Ukraine

**GEOMETRICAL MODELING OF DEPLOYMENT IN THE WEIGHTLESSNESS
OF A MULTI-PURPOSE CONSTRUCTION WITH INERTIAL DISCLOSURE**

The work is devoted to geometric modeling of the oscillation of a multi-tiered pendulum under conditions of weightlessness. The material of the article is presented on the example of the process of deployment of a multi-tier structure (skeleton) of a cosmic solar mirror, identified with a multi-tiered pendulum on abstract plane. Initiation of oscillations is proposed to be carried out with the help of a rocket motor to provide an impulse (such as a "shot") to one of the nodal elements of a multi-link pendulum. As a result, we obtain an inertial way of opening the multi-tier structure. The process of the deployment of the solar mirror frame (as oscillations of a multi-member pendulum) is realized using the Lagrange equation of the second kind. The process of disclosure can be controlled using computer animation frames.

Keywords: multi-link pendulum, large-scale design, deployment in space, mirror in space, Lagrange equation of the second kind.

Постановка проблеми

Розвиток космічних технологій у провідних країнах світу націлений на створення великогабаритних конструкцій [1], тому що для використання практично нескінченних запасів сонячної енергії доцільно

застосовувати потужні сонячні електростанції, сонячні концентратори і дзеркала космічного базування. Ці конструкції призначені як для обслуговування виробництва у космосі, так і для передачі енергії на Землю. До головних областей застосування великогабаритних конструкцій слід віднести: створення дзеркал для нічного освітлення районів Землі відбитим з орбіти сонячним світлом (населених пунктів, заполярних районів, місць масштабних катастроф тощо); створення відбивачів сонячного світла з орбіти для керування погодою в локальному регіоні, впливу на врожайність у районах виробництва морепродуктів, сільськогосподарської й лісової продукції, а також створення великогабаритних екранів для очищення космосу від технологічних осколків. Освітлення населених пунктів з космосу надасть можливість вивільнити електричні потужності, застосовуваних для освітлення вулиць і приміщень і їхнього використання для інших потреб без додаткового будівництва нових електростанцій.

Розрахунки показують [2], що для рентабельного використання космічних конструкцій необхідно створювати корисні площі антен або дзеркал порядку декількох гектарів. Наприклад, для освітлення відбитими сонячними променями у нічний час одного міста (наприклад, Харкова) необхідне дзеркало площею понад 12 гектарів [3]. Наведене вказує на доцільність досліджень у галузі розробки технологій розгортання у космосі великогабаритних конструкцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Створення великогабаритних конструкцій, що трансформуються у космосі, пов'язано з рішенням ряду технічних і механічних проблем, обумовлених унікальністю об'єктів. Характерною рисою для них є поєднання суперечливих вимог стосовно суттєвого збільшення габаритних розмірів і забезпечення достатньої жорсткості при досить обмеженій масі силового каркаса. Як правило, подібні конструкції мають вигляд каркасу (ферми), що трансформується, з "натягнутим" на нього сіткополотном, яке, власне, і формує відбивальну поверхню. Існують різні концепції розкриття каркасів таких конструкцій. Найпоширеніша з них полягає у трансформуванні множини однотипних елементів, зв'язаних між собою шарнірними вузлами, які утворюють плоску або просторову конструкцію відбивача у розгорнутому стані [4–5]. Керування положенням великогабаритних конструкцій у просторі є складною науково-технічною задачею, яка не має аналогів у наземній чи космічній техніці.

Для обґрунтування вибору конструктивних параметрів елементів системи розгортання й підтвердження надійності процесу розкриття потрібне проведення детального математичного моделювання з використанням ефективної математичної моделі [6–8]. Для побудови рівнянь руху і їхніх розв'язків можуть бути використані різні методи, деякі з них представлені в роботі [9]. Формування на орбіті конструкцій часто потребує для свого ефективного рішення нетрадиційних підходів. Один з таких підходів базується на утворенні конструкцій відцентровими силами. У роботі [10] розглянуто безкаркасні конструкції, які формовані відцентровими силами.

Але на практиці більш вживаними є каркасні тросові системи розгортання. В Україні питаннями розгортання каркасних конструкцій займаються в Інституті технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України (м. Дніпро). В роботах [11–12] цієї школи проаналізовані схеми розгортання тросових систем і математичних моделей їх динаміки стосовно до завдань виведення космічних апаратів. Виділено два основних класи систем розгортання: імпульсні й квазістатичні, і проведено їх порівняльний аналіз. Запропоновано математичну модель розгортання, у якій трос являє собою набір N матеріальних точок. Проаналізовано вплив маси троса на характер розгортання системи. Показано, що при повільному розгортанні троса (зі швидкостями до 1 м/с), без врахування сил аеродинамічного опору, маса троса істотно не впливає на характер розгортання.

У роботі [13] наведено математичну модель процесу розгортання багатоланкової каркасної конструкції сонячної батареї із тросовою системою розкриття. На рис. 1 представлена схема розкриття конструкції, а на рис. 2 зображена тросова система синхронізації зазначеної дії.

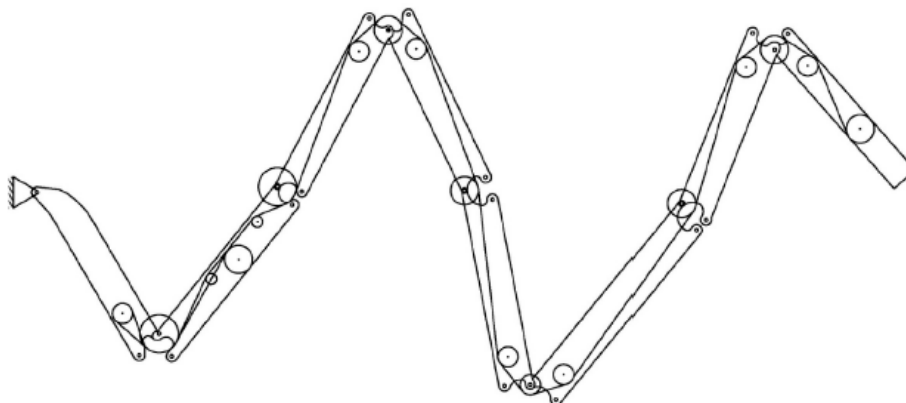


Рис. 1. Основна система розкриття (запозичене з роботи [13])

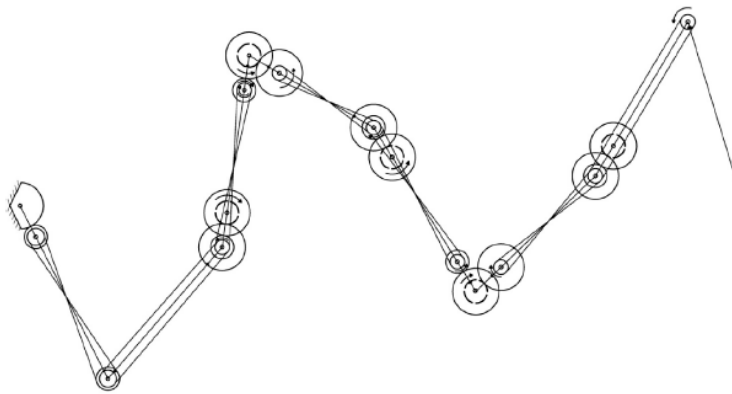


Рис. 2. Тросова система синхронізації розкриття (запозичене з роботи [13])

При цьому на основі аналізу кінематичної схеми системи розкриття необхідно обрати розміри радіусів роликів і передатного відношення двох типів шестерних механізмів, що забезпечують задану послідовність фіксації ланок. Для дослідження процесу розкриття сонячної батареї використане рівняння Лагранжа другого роду. При розробці схем розкриття багатоланкових конструкцій виникає необхідність у створенні математичних моделей, що адекватно описують їхні динамічні властивості. Застосування моделей ще на етапі проектування, дозволяє оцінити параметри функціонування конструкції. Для чисельного аналізу процесу розгортання конструкцій, що трансформуються, використовують можливості сучасних пакетів моделювання динаміки механічних систем [14–15].

Але розглянуті вище схеми тросового розкриття багатоланкових конструкцій є надто складними для застосування у випадку великогабаритних розмірів їх ланок (порядку сотні метрів). Ми вважаємо, що в цьому випадку доцільніше буде застосовувати інерційну систему розкриття, де наявність протяжних ланок конструкції принципово не впливає на реалізацію технології розкриття.

Мета дослідження

Побудувати геометричну модель процесу розгортання у невагомості багатоланкової конструкції з інерційною системою розкриття, за умови, що багатоланкова конструкція ототожнюється з багатоланковим маятником на площині. Для ініціювання коливань застосувати реактивний двигун з метою надання імпульсу (типу "клацання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. Забезпечити результат розгортання візуальним контролем шляхом спостереження за анімаційною схемою розкриття з фіксацією прийнятної форми конструкції в обраний момент часу.

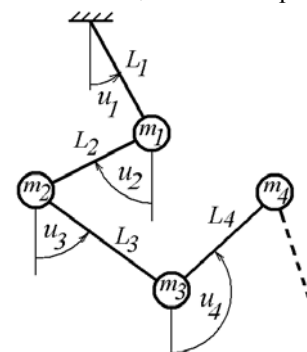
Викладення основного матеріалу дослідження

Зафіксуємо в умовах невагомості уявну площину з декартовими координатами Ox і розглянемо на ній багатоланковий маятник, початок першої ланки якого збігається з початком координат. Для визначення у часі взаємного положення елементів багатоланкового маятника при коливаннях у невагомості за умови відсутності дисипативних сил необхідно використати рівняння Лагранжа другого роду.

У 1788 році Лагранж застосував варіаційний принцип до розрахунку механічних конструкцій з урахуванням їх кінематичних зв'язків, використовуючи поняття кінетичної й потенціальної енергії механічної системи. У результаті Лагранж одержав універсальний підхід для опису руху будь-якої механічної системи у вигляді рівнянь руху, відомих як рівняння Лагранжа другого роду. У роботі [16] розглянуто можливість застосування рівнянь Лагранжа другого роду за умови відсутності сили гравітації (тобто у разі невагомості), і, як наслідок, "нульової" потенціальної енергії механічної системи. Тому цікавим буде питання реалізації цієї ідеї на практиці.

Розглянемо ідеалізовану математичну модель багатоланкового маятника. Вважатимемо, що n -ланковий маятник, складається [17–18] з n невагомих нерозтяжних стержнів довжин L_i ($i=1..n$), і шарнірно сполучених між собою прикінцевими вузловими точками, на яких закріплено вантажі (для спрощення – кулі) з масами m_i ($i = 1..n$). Рух шарнірів повинен забезпечувати переміщення вантажів у межах обраної площини.

Узагальненими координатами вважатимемо кути $u_i(t)$ ($i = 1..n$), утворені відповідними ланками з обраним напрямком на площині (рис. 3). Для спрощення вважатимемо, що тертя у вузлах відсутнє, а точка кріплення нерухома у системі координат площини завдяки тому, що вона приєднана до космічного апарату, маса якого на порядокки більша маси вантажів у вузлах.

Рис. 3. Схема
 n -ланкового маятника

Опис коливання маятника в площині з врахуванням "відсутності" потенціальної енергії виконаємо на основі рівнянь Лагранжа другого роду [18].

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u_i'} L(n) \right) - \frac{\partial}{\partial u_i'} (L(n)) = 0, \quad (i = 1..n), \quad (1)$$

де $L(n)$ – лагранжіан, вираз якого збігається з описом кінетичної енергії системи; $u_i(t)$ – i -та узагальнена координата (кут між обраним допоміжним напрямком і ланкою); $u_i' = \frac{d}{dt} u_i(t)$ – похідна від функції опису узагальненої координати.

Для обчислення лагранжіана маємо вираз [15–16]:

$$L(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k \left[\left(-\sum_{i=1}^{k-1} L_i \cos(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \cos(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} -L_i \sin(u_i(t)) \frac{du_i(t)}{dt} - L_k \sin(u_k(t)) \frac{du_k(t)}{dt} \right)^2 \right] \quad (2)$$

У результаті після підстановки формули (2) у вирази рівнянь Лагранжа другого роду (1) опис руху n -ланкового маятника одержимо у вигляді системи з n диференціальних рівнянь відносно кутів $u_i(t)$ ($i=1..n$).

Для пояснення ідеї ініціювання у невагомості коливань багатоланкового маятника розглянемо його чотириланковий варіант ($n=4$). При розв'язанні рівнянь Лагранжа другого роду у цьому випадку слід враховувати такі параметри (всі значення параметрів в умовних величинах):

- вектор довжин ланок маятника: $\mathbf{L} = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$;
- вектор значень мас куль: $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$.

Крім того, при розв'язанні системи рівнянь слід враховувати початкові умови:

- вектор значень початкових кутів відхилень: $\boldsymbol{\theta} = \{u_1(0), u_2(0), u_3(0), u_4(0)\}$.
- вектор значень початкових швидкостей, наданих кутам відхилень: $\boldsymbol{\theta}' = \{u_1'(0), u_2'(0), u_3'(0), u_4'(0)\}$.

Враховуючи те, що початкове положення множини ланок маятника після доставки його на орбіту має "складений" вигляд (наочно це нагадує побутовий метр у складеному стані), то вектор значень початкових кутів відхилень завжди матиме координати $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$.

Ініціювання коливань маятника у невагомості здійснюємо шляхом вибору координат вектора початкових швидкостей, наданих одному з кутів відхилень. Наприклад, $\boldsymbol{\theta}' = \{0, 0, 0, A\}$ означає, що тільки кулі № 4 масою m_4 надано "кляцанням" початкову швидкість величиною A умовних одиниць. Вектор напрямку R надання швидкості розташований перпендикулярно четвертій ланці L_4 маятника у прикінцевій точці (рис. 4). Тобто він визначає швидкість зміни кута розкриття $u_4(0)$ четвертої ланки.

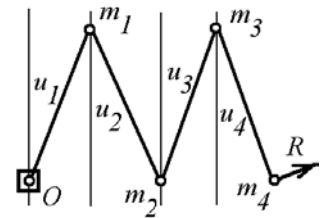


Рис. 4. Чотириланковий варіант маятника

З врахуванням наданого реактивним двигуном імпульсу маятникова система далі має розгортатися за інерцією. Перевага інерційного способу розгортання багатоланкової конструкції у невагомості полягає у відсутності необхідності синхронізувати якісь дії по зміні кутів в окремих вузлах (як це необхідно здійснювати у разі тросової системи розгортання). Використовуючи лише один реактивний двигун, можна розрахувати геометричну форму і забезпечити прогнозоване взаємне положення ланкам маятника.

Для розрахунку розташування елементів маятника було складено програму у середовищі maple [19–21], де вираз лагранжіана співпадає з описом кінетичної енергії (тут збережено синтаксис мови maple):

$$L := \frac{1}{2} m_3 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_4^2 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_2^2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 L_3^2 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} m_3 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 L_3^2 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right)^2 + m_3 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_3 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
 & + m_3 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
 & + m_2 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(u_1(t) - u_3(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_1(t) - u_4(t)) \\
 & + m_4 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) \cos(-u_2(t) + u_3(t)) \\
 & + m_4 L_1 \left(\frac{d}{dt} u_1(t) \right) L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) \cos(u_1(t) - u_2(t)) \\
 & + m_4 L_2 \left(\frac{d}{dt} u_2(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_2(t) - u_4(t)) \\
 & + m_4 L_3 \left(\frac{d}{dt} u_3(t) \right) L_4 \left(\frac{d}{dt} u_4(t) \right) \cos(u_3(t) - u_4(t))
 \end{aligned} \tag{3}$$

За допомогою лагранжіана (3) утворено систему з чотирьох диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду відносно функцій $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$. З врахуванням відповідних початкових умов складену систему рівнянь розв'язано наближено методом Рунге-Кутти, а одержані розв'язки позначено символами $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ і $U_4(t)$.

Застосуємо на площині декартову систему координат Oxy з центром в нерухомій точці маятника (вісь Oy співпадає з обраним вище напрямком). З використанням одержаних розв'язків визначаємо координати вузлових точок в момент часу t :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= L_1 \sin(U_1(t)); & y_1 &= L_1 \cos(U_1(t)); \\
 x_2 &= x_1 + L_2 \sin(U_2(t)); & y_2 &= y_1 + L_2 \cos(U_2(t)); \\
 x_3 &= x_2 + L_3 \sin(U_3(t)); & y_3 &= y_2 + L_3 \cos(U_3(t)); \\
 x_4 &= x_3 + L_4 \sin(U_4(t)); & y_4 &= y_3 + L_4 \cos(U_4(t));
 \end{aligned}$$

При необхідності можна визначити і швидкості переміщення відповідних вузлових точок.

У результаті виконання програми одержимо послідовність кадрів анімаційних зображень залежно від часу розгортання конструкції. Одночасно будуть видаватися значення поточних величин кутів $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ і $u_4(t)$ для обраного моменту часу t . На рис. 5 зображено послідовні положення ланок маятника для випадку, коли реактивний двигун розташований на місці четвертого вантажу (зображено темним кольором). Квадратом позначено нерухому точку закріплення маятника.

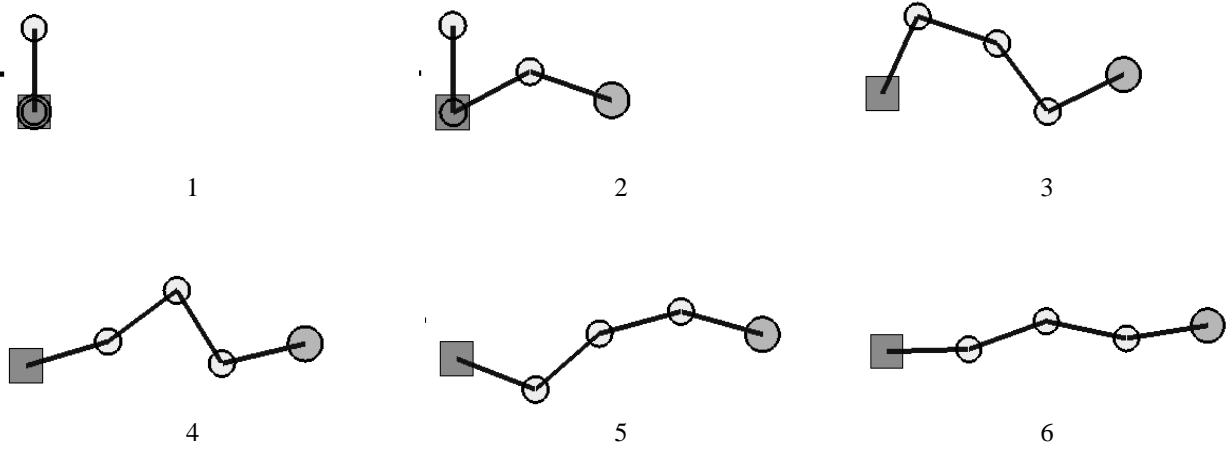


Рис. 5. Послідовні положення ланок маятника в процесі коливань

Розв'язання рівнянь Лагранжа другого роду у цьому випадку виконано з такими параметрами (все в умовних величинах):

- довжини ланок маятника: $\mathbf{L} = \{2, 2, 2, 2\}$;
- значення мас куль: $\mathbf{m} = \{0.1, 0.1, 0.1, 10\}$.
- значення початкових кутів відхилень: $\boldsymbol{\theta} = \{\pi/2, -\pi/2, \pi/2, -\pi/2\}$.
- значення початкових швидкостей кутів відхилень: $s\boldsymbol{\theta}' = \{0, 0, 0, 1\}$.

При аналізі одержаних анімаційних зображень був помічений ефект, який можна використати для подання команди на фіксацію елементів маятникової конструкції. А саме, на прикінцевій фазі "розпрямлення" конструкції спостерігаються поперечні коливання вузлів маятника (рис. 6).

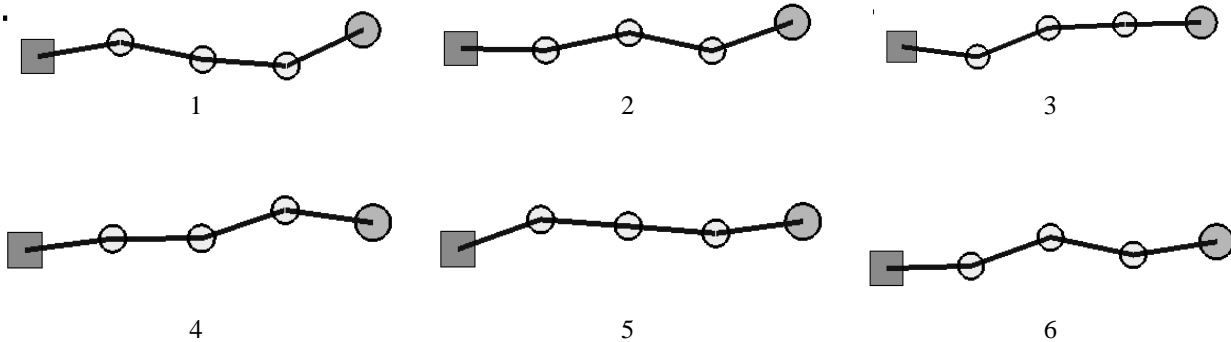


Рис. 6. Розгортання ланок маятника на прикінцевих фазах коливань

Детально проілюструвати цей ефект можна за допомогою функції суми модулів одержаних

розв'язків. На рис. 7 наведено графік функції $W(N) = \sum_{k=1}^4 \left| U_k \left(\frac{iT}{N} \right) \right|$, де

U_k – розв'язки системи рівнянь Лагранжа другого роду, T – час інтегрування системи, N – кількість розбиттів інтервалу $0..T$, i – ціла змінна у межах інтервалу $0..N$. Для конкретного випадку обрано: $T = 4,2$; $n = 300$. Поперечні коливання вузлів маятника можна використати для включення сигналу спрацювання датчиків замків фіксації положення суміжних ланок маятника.

На основі інерційного способу розкриття одного променя можна утворювати схеми з багатьма променями зі спільним вузлом кріплення.

На рис. 8 зображено схему розкриття "зіркової" конструкції, утвореної з п'ятьох чотириланкових маятників.

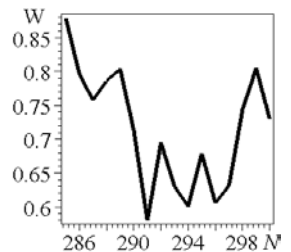


Рис. 7. Графік функції $W(N)$

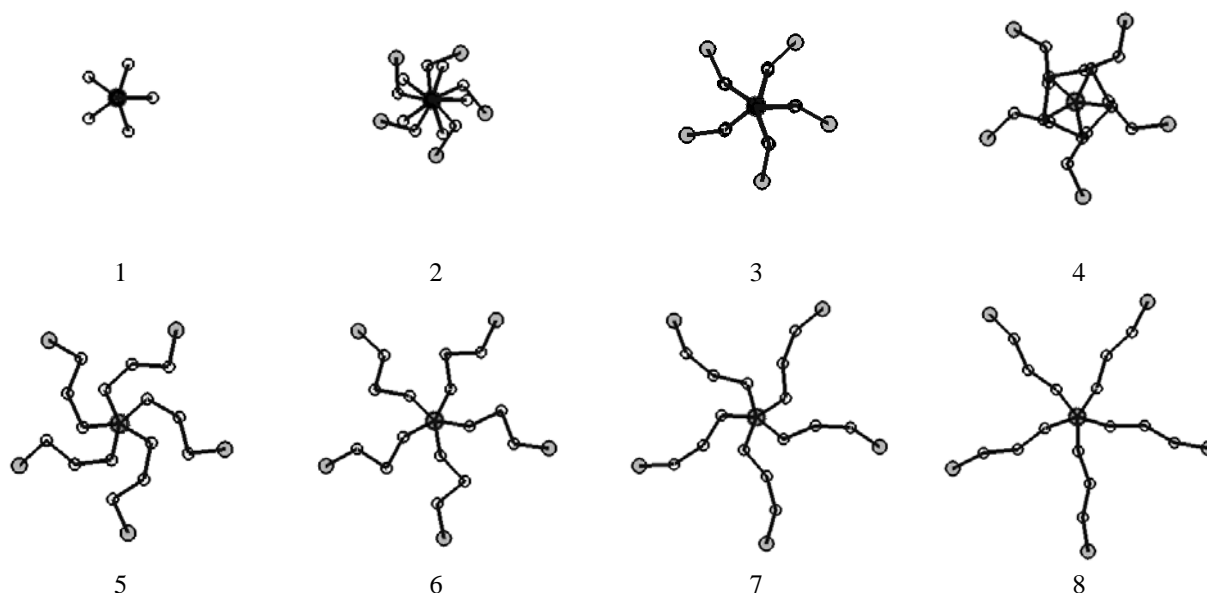


Рис. 8. Схема розкриття "зіркової" конструкції з п'ятьох чотириланкових маятників

Висновки

Побудовано геометричну модель розгортання у невагомості багатоланкової конструкції з інерційною системою розкриття. Багатоланкова конструкція ототожнюється з багатоланковим маятником на уявній площині. Для ініціювання коливань передбачено застосовувати реактивний двигун з метою надання імпульсу (типу "кляцання") одному з вузлових елементів багатоланкового маятника. Перевага інерційного способу розгортання багатоланкової конструкції у невагомості полягає у відсутності необхідності синхронізувати якісь дії по зміні кутів в окремих вузлах. Контроль результату розгортання здійснюється візуально за допомогою створеного анімаційного фільму, в результаті чого визначається прийнятна форма конструкції та пропонується виконати фіксацію відповідних вузлових елементів.

Список використаної літератури

1. Lovegrove, K. and Stein, W., Concentrating Solar Power Technology. Principles, Developments and Applications, Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2012. 708 p.
2. Стребков Д.С. Концентраторы солнечного излучения / Д.С. Стребков, Э.В. Тверьянович. – М.: ВИЭСХ, 2007. – 315 с.
3. Лабунский А. На пути к созданию систем дополнительного вреземного освещения. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://m.nkj.ru/news/21424/?mobile=N&PAGEN_1=3&ID=21424
4. Бакунин Д.В. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечных батарей / Д.В.Бакунин, С.В. Борзых, Н.С. Ососов // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. – № 6. – С. 86–92.
5. Ильясова И.Г. Динамика процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей / И.Г. Ильясова // Вестник Самарского ГАУ им. академика С.П. Королева. – 2012. – № 4 (35). – С. 88–93.
6. Крылов А.В. Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций / А.В. Крылов, С.А. Чурилин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Машиностроение", 2011. – № 1. – С. 106–111.
7. Юдинцев В.В. Моделирование процессов раскрытия многоэлементных конструкций космических аппаратов / В.Юдинцев // Полет. – 2012. – № 5. – С. 28–33.
8. Паничкин В.И. Математическое моделирование динамики деформирования многостворчатой солнечной батареи в процессе раскрытия / В.И.Паничкин // Известия АН СССР. МТТ. – 1992. – № 4. – С. 183–190.
9. Зарубин В.С. Особенности математического моделирования технических устройств / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 1. – С. 5–17.
10. Райкунов Г.Г. Центробежные бескаркасные крупногабаритные космические конструкции / Г.Г. Райкунов, В.А. Комков, В.М. Мельников, Б.Н. Харлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 448 с.
11. Пироженко А.В. Схема разворачивания малой космической тросовой системы / А.В. Пироженко, Д.А. Храмов // Вісник Дніпропетровського університету : Ракетно-космічна техніка. – 2007. – № 9/2. – С. 198 – 204.
12. Храмов Д.А. Анализ схем и моделей разворачивания космических тросовых систем [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/Khramov.pdf?sequence=1>

13. Бушуев А.Ю. Математическое моделирование процесса раскрытия солнечной батареи большой площади / А.Ю.Бушуев, Б.А.Фарафонов // Математическое моделирование и численные методы. – 2014. – № 2. – С. 101–114.
14. Щесняк С. Проектирование и расчет крупногабаритных раскрывающихся конструкций с помощью программных комплексов MSC.Software / С. Щесняк, А. Романов // CADmaster. – 2009. – № 2-3. – С. 28–36.
15. Бойков В.Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER / В.Г. Бойков // САПР и графика. – 2000. – № 9. – С. 17–20.
16. Szuminski W. Dynamics of multiple pendula without gravity. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.cmsim.eu/papers_pdf/january_2014_papers/7_CMSIM_Journal_2014_Szuminski_1_57-67.pdf
17. Gmiterko A., Grossman M. N-link Inverted Pendulum Modeling. Recent Advances in Mechatronics 2010, Part 3, p. 151-156.
18. Martinez-Alfaro H. Obtaining the dynamic equations, their simulation, and animation for n pendulums using Maple. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www2.esm.vt.edu/~anayfeh/conf10/Abstracts/martinez-alfaro.pdf>
19. Адашевська І.Ю. Геометричне моделювання коливальних багатоланкових маятникових механічних систем: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / І.Ю. Адашевська; Київський національний університет будівництва і архітектури – Київ, 2006. – 20 с.
20. Куценко Л.М. Геометричне моделювання коливальних багатоланкових маятників. / Л.М. Куценко, І.Ю. Адашевська. – Харків: НТМТ, 2008. – 176 с.
21. Куценко Л.М. Моделювання взаємних положень ланок маятника за умови відсутності гравітації / Л.М. Куценко, І.Ю. Адашевська // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017. – Вип. 9. – С. 85-89