

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, Т.С. КРЕМЕЦЬ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

**РУХ ЧАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ ЗДІЙСНЮЄ ПОСТУПАЛЬНІ
КОЛИВАННЯ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ**

Складено узагальнені диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра, який здійснює коливальний рух. Всі точки циліндра описують еліпси у вертикальних площинах. Розглянуто випадки коливань циліндра, коли півосі рівні або одна із них дорівнює нулю, тобто циліндр здійснює зворотно-поступальний рух. Рівняння розв'язано чисельними методами і побудовано траєкторії відносного руху частинки по поверхні циліндра. Наведено графіки інших кінематичних характеристик у функції часу. Розглянуто окремі випадки, коли вісь циліндра розташована горизонтально або під кутом до горизонтальної площини.

Ключові слова: похилий циліндр, коливальний рух, вертикальна площина, частинка, диференціальні рівняння, кінематичні параметри.

С.Ф. ПИЛИПАКА, Т.С. КРЕМЕЦЬ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Н.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанский агротехнический институт НУБиПУ Украины

**ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА, СОВЕРШАЮЩЕГО
ПОСТУПАТЕЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Составлены обобщенные дифференциальные уравнения относительного перемещения частицы по внутренней поверхности наклонного цилиндра, совершающего колебательное движение. Все точки цилиндра описывают эллипсы в вертикальных плоскостях. Рассмотрены случаи колебаний цилиндра, когда полуоси равны или одна из них равна нулю, то есть цилиндр совершает возвратно-поступательное движение. Уравнения решены численными методами и построены траектории относительного движения частицы по поверхности цилиндра. Приведены графики других кинематических характеристик функции времени. Рассмотрены частичные случаи, когда ось цилиндра расположена горизонтально или под углом к горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: наклонный цилиндр, колебательное движение, вертикальная плоскость, частица, дифференциальные уравнения, кинематические параметры.

S.F. PYLYPAKA, T.S. KREMETZ

National university of life and environmental sciences of Ukraine

M.B. KLENDIY

IS NULES of Ukraine "Berezhany Agrotechnical Institute"

**PARTICLE MOVEMENT ON THE SURFACE OF A CYLINDER THAT MAKES TRANSLATIONAL
OSCILLATIONS IN A VERTICAL PLANE**

Generalized differential equations of the relative motion of a particle along the inner surface of an inclined cylinder performing oscillatory motion are compiled. All cylinder points describe ellipses in vertical planes. The cases of oscillations of a cylinder are considered, when the semiaxes are equal or one of them is equal to zero, that is, the cylinder makes a reciprocal movement. Equations are solved by numerical methods and trajectories of the relative motion of the particle along the surface of the cylinder are constructed. The graphs of other kinematic characteristics of the time function are given. Partial cases are considered when the axis of the cylinder is located horizontally or at an angle to the horizontal plane.

Keywords: inclined cylinder, oscillatory motion, vertical plane, particle, differential equations, kinematic parameters.

Постановка проблеми

Похила площина є універсальним конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин [1]. По ній в процесі обробки переміщується технологічний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або коловий рухи. Для похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних

коливаннях в горизонтальному напрямі, в напрямі нахилу площини або в поперечному напрямі [1]. При криволінійних коливаннях площини, коли всі її точки описують еліпси, а сама площина має нахил, рух технологічного матеріалу суттєво змінюється. Якщо замість площини взяти циліндр і здійснити аналогічні коливання, то розв'язання задачі на дослідження відносного руху частинки по його поверхні суттєво змінюється.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Окрім фундаментальної монографії [1], в якій розглянуто прямолінійні зворотно-поступальні коливання, існують праці, присвячені криволінійним коливанням площини. Взагалі задача руху матеріальної частинки по площині, яка здійснює коловий коливальний рух, вперше була розв'язана М.С. Жуковським в геометричній інтерпретації [2], узагальнена і поширена на випадки еліптичних коливань І.І. Блехманом [3,4]. П.М. Василенко диференціальні рівняння руху частинки складав у проєкціях на осі рухомої системи координат, жорстко прив'язаної до площини, що коливається [1], а І.І. Блехман – у проєкціях на осі нерухомої системи координат. П.М. Заїка розглядав переміщення частинок по робочих площинах вібраційних зерноочисних машин [5]. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій поверхні циліндра, всі точки якого описують кола в горизонтальних площинах, розглянуто в праці [6]. Відносний рух частинки по поверхні гелікоїда, який обертається навколо своєї вертикальної осі, досліджено в праці [7].

Формулювання мети досліджень

Дослідити закономірності відносного руху матеріальних частинок по внутрішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні еліптичні коливання у вертикальних площинах, при різних співвідношеннях осей еліпса та їх орієнтації у цих площинах.

Викладення основного матеріалу досліджень

Розташуємо нижню половину циліндра так, щоб його вісь була нахилена до горизонтальної площини під кутом β (рис. 1). Спочатку запишемо рівняння циліндра із горизонтальною віссю:

$$X = u; \quad Y = R \cos \alpha; \quad Z = -R \sin \alpha, \tag{1}$$

де R – радіус циліндра;
 α, u – незалежні змінні поверхні, α – кут повороту точки циліндра навколо його осі; u – довжина прямолінійної твірної циліндра.

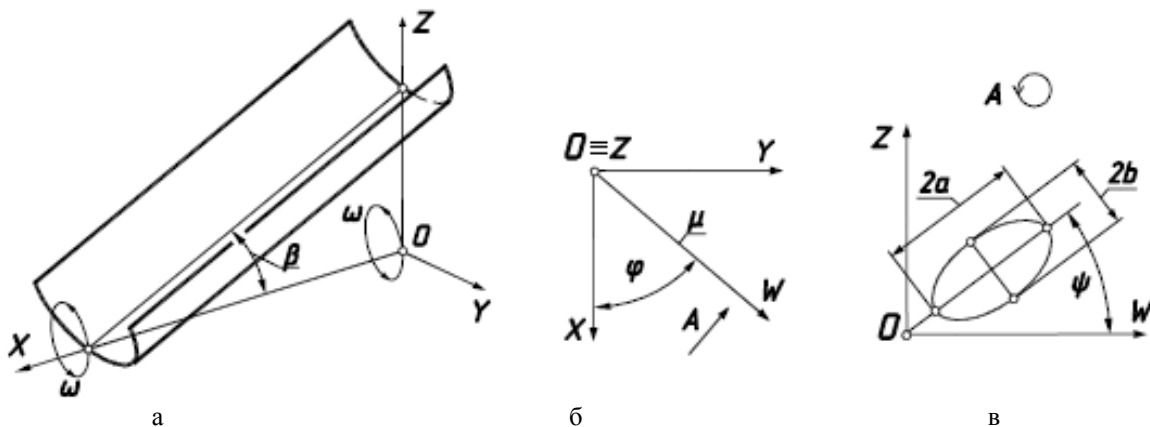


Рис. 1. Графічні ілюстрації до розташування похилого циліндра та напрямку його коливань: а) розташування циліндра в системі координат OXYZ; б) розташування вертикальної площини μ в системі координат OXYZ; в) розташування еліпса в площині μ з осями OZW

Повернемо циліндр (1) на кут β навколо осі OY. Параметричні рівняння повернутого циліндра запишуться:

$$X = u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \quad Y = R \cos \alpha; \quad Z = u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \tag{2}$$

Циліндр здійснює поступальні коливання таким чином, що всі його точки описують в загальному випадку еліпси у вертикальних паралельних площинах. На рис. 1,а показано окремий випадок, коли циліндр жорстко прив'язаний до системи координат OXYZ, всі точки якої рухаються по колах, паралельних координатній площині OYZ. Вертикальна площина μ з осями OZW (рис.1,а), в якій знаходяться кола (в загальному випадку – еліпси), складає із координатною площиною OXZ кут φ . Для випадку, зображеному на рис. 1,а, цей кут рівний 90° . В площині μ задамо еліпс з великою a і малою b півосями– траєкторію поступальних коливань всіх точок циліндра (рис. 1,в). Напрямок великої осі еліпса задається кутом ψ її нахилу

до горизонтальної площини. При $b=0$ циліндр буде здійснювати зворотно-поступальні коливання вздовж заданого напрямку великої осі, при $a=b$ траєкторією коливального руху будуть кола (при цьому величина кута ψ не матиме значення). Абсолютний рух частинки будемо розглядати в проєкціях на осі системи координат $OXYZ$. Абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху циліндра, точки якого в загальному випадку описують еліпси, і відносного руху точки по поверхні циліндра:

$$x = x_n + x_\epsilon; \quad y = y_n + y_\epsilon; \quad z = z_n + z_\epsilon, \quad (3)$$

де $x_n = x_n(t)$; $y_n = y_n(t)$; $z_n = z_n(t)$ – траєкторія переносного руху циліндра у функції часу t ;
 $x_\epsilon = x_\epsilon(t)$; $y_\epsilon = y_\epsilon(t)$; $z_\epsilon = z_\epsilon(t)$ – траєкторія відносного руху частинки по поверхні циліндра у функції часу t .

Кожна точка похилого циліндра описує еліпс з півосями a і b . Радіус-вектор точки еліпса в площині μ його розташування має координати: $\{a \cos \omega t; b \sin \omega t\}$, де ω – частота коливань (при $a=b$ – кутова швидкість обертання точок циліндра по колах), t – час, незалежна змінна. Осі такого еліпса паралельні осям OX і OW . За відомими формулами повороту повернемо його на кут ψ . Після цього радіус-вектор точки еліпса запишеться:

$$\{-a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t; \quad a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t\} \quad (4)$$

Враховуючи кут φ між площинами OZX і OZW , можна записати параметричні рівняння еліпса в проєкціях на осі системи координат $OXYZ$:

$$\begin{aligned} x_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi; & x_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi; \\ y_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi; & y_n &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi; \\ z_n &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t. & z_n &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5)$$

По циліндру точка ковзатиме по певній траєкторії. Рівняння траєкторії можна одержати, якщо зв'язати між собою незалежні змінні α і u поверхні (2). Цей зв'язок запишемо через час t , тобто координати частинки на поверхні циліндра будуть функціями часу: $\alpha = \alpha(t)$ і $u = u(t)$. В такому випадку відносний рух частинки (траєкторія на циліндрі) опишеться рівняннями:

$$\begin{aligned} x_\epsilon &= u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\ y_\epsilon &= R \cos \alpha; \\ z_\epsilon &= u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Сумуючи переносний (5) і відносний (6) рухи за формулою (3), отримаємо рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$\begin{aligned} x &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u \cos \beta + R \sin \beta \sin \alpha; \\ y &= (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi + R \cos \alpha; \\ z &= -a \sin \psi \cos \omega t + b \cos \psi \sin \omega t + u \sin \beta - R \cos \beta \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Задаючи значення півосей a і b , можна отримати різні траєкторії переносного руху циліндра (еліпси, кола, прямолінійні відрізки), які можуть бути орієнтовані у вертикальних площинах у всіх можливих положеннях за допомогою відповідних значень кутів φ і ψ .

Залежності: $\alpha = \alpha(t)$ і $u = u(t)$, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по поверхні циліндра), є невідомими функціями, які потрібно знайти. Після диференціювання рівнянь (6) по часу t знайдемо проєкції абсолютної швидкості частинки:

$$\begin{aligned} x' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \cos \varphi + u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \sin \alpha; \\ y' &= \omega(-a \cos \psi \sin \omega t + b \sin \psi \cos \omega t) \sin \varphi - R \alpha' \cos \alpha; \\ z' &= \omega(a \sin \psi \sin \omega t + b \cos \psi \cos \omega t) + u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Диференціювання виразів (8) дає проєкції абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned} x'' &= -\omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta + R \sin \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha) \\ y'' &= -\omega^2 (a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi - R (\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha) \\ z'' &= \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta - R \cos \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

Складемо рівняння руху у вигляді $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), реакція N поверхні циліндра та сила тертя fN при ковзанні частинки по поверхні циліндра (f – коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроекціювати на осі системи координат $OXYZ$.

Сила ваги спрямована вниз, отже її проекції запишуться:

$$\{0; 0; -mg\}. \quad (10)$$

Реакція N поверхні циліндра спрямована по нормалі до нього і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній циліндра. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= R \sin \beta \cos \alpha; & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= -R \sin \alpha; & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} &= -R \cos \beta \cos \alpha; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= 0; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \beta \sin \alpha; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Після векторного множення векторів (11) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі до поверхні запишуться:

$$\{-\sin \beta \sin \alpha; -\cos \alpha; \cos \beta \sin \alpha\}. \quad (12)$$

Оскільки сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону, знайдемо проекції вектора дотичної. Вони визначаються першими похідними рівнянь (6):

$$x'_g = u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha; \quad y'_g = -R \alpha' \sin \alpha; \quad z'_g = u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha. \quad (13)$$

Геометрична сума складових (13) дасть величину швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі:

$$V_g = \sqrt{x_g'^2 + y_g'^2 + z_g'^2} = \sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2} \quad (14)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі системи $OXYZ$ одержимо діленням проекцій (13) на величину вектора (14):

$$\left\{ \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \quad -\frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \quad \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right\}. \quad (15)$$

Розпишемо векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ в проекціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fN спрямована вздовж одиничного вектора (15) в протилежну до нього сторону:

$$\begin{aligned} mx'' &= -N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ my'' &= -N \cos \alpha + fN \frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\ mz'' &= -mg + N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Підставимо в рівняння (16) другі похідні (проекції абсолютного прискорення) із (9) і отримаємо систему із трьох рівнянь:

$$\begin{aligned}
 m\left[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \cos \varphi + u'' \cos \beta + R \sin \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\right] = \\
 = -N \sin \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \cos \beta + R \alpha' \sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m\left[-\omega^2(a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t) \sin \varphi - R (\alpha'' \sin \alpha + \alpha'^2 \cos \alpha)\right] = -N \cos \alpha + fN \frac{R \alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 m\left[\omega^2(a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t) + u'' \sin \beta - R \cos \beta (\alpha'' \cos \alpha - \alpha'^2 \sin \alpha)\right] = \\
 = -mg + N \cos \beta \sin \alpha - fN \frac{u' \sin \beta - R \alpha' \cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

До системи (17) входить три невідомі функції: $N=N(t)$, $u=u(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$. Розв'язуючи її відносно N , u'' і α'' , отримаємо наступні вирази:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' = -f \frac{\alpha'^3}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} R - K \omega^2 \left(\frac{\sin \alpha}{R} + f \frac{\alpha' \cos \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right) \sin \varphi + \\
 + \left(\frac{\cos \alpha}{R} - f \frac{\alpha' \sin \alpha}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} \right) (L \omega^2 \sin \beta \cos \varphi + M \cos \beta); \\
 u'' = -g \sin \beta + A b \omega^2 \sin \omega t + B a \omega^2 \cos \omega t - f \frac{u' P}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}}; \\
 N = mP.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Система (18) має доволі громіздкий вигляд не дивлячись на те, що деякі вирази для сталих і змінних ми замінили символами. Такими сталими є:

$$A = \cos \beta \sin \psi \cos \varphi + \sin \beta \cos \psi; \quad B = \cos \beta \cos \psi \cos \varphi - \sin \beta \sin \psi.$$

Наступними символами замінено змінні величини:

$$\begin{aligned}
 K = \sin \beta \cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha; \quad L = a \cos \psi \cos \omega t + b \sin \psi \sin \omega t; \\
 M = g + \omega^2 (a \sin \psi \cos \omega t - b \cos \psi \sin \omega t); \quad P = R \alpha'^2 + K L \omega^2 + M \cos \beta \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

Розв'язування системи рівнянь (17) відносно N , u'' і α'' , а також чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь (18) для знаходження первісних функцій стало можливим завдяки сучасним програмним продуктам. Розглянемо окремі випадки.

Циліндр нерухомий ($\omega=0$). В цьому випадку величина кутів φ і ψ не має значення. Розглянемо випадок, коли твірні циліндра нахилені під кутом тертя до горизонтальної площини, тобто $\beta=\arctg f$. Система диференціальних рівнянь (18) і вираз реакції поверхні N приймають спрощений вигляд:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' = \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \beta - \frac{\alpha'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} (R \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta + g \sin \alpha \sin \beta); \\
 u'' = -g \sin \beta - \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + R^2 \alpha'^2}} (R \alpha'^2 \operatorname{tg} \beta + g \sin \alpha \sin \beta); \\
 N = m(R \alpha'^2 + g \cos \beta \sin \alpha).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для окремого випадку, коли початкове значення кута α дорівнює 90° , тобто частинка знаходиться на нижній твірній циліндра, і $\alpha'=0$, тобто початкова кутова швидкість частинки в перпендикулярному до твірних циліндра напрямі відсутня, перше рівняння системи перетворюється в тотожність, тобто ліва і права частини дорівнюють нулю. У другому рівнянні права частина теж перетворюється в нуль при умові, що перед коренем беремо знак "мінус". Отже, $u'=const$, тобто швидкість переміщення частинки вздовж нижньої твірної буде сталою, чого і слід було чекати. Реакція поверхні теж буде сталою: $N=mg \cos \beta$. Такий же результат дає чисельне інтегрування системи (19) при початкових умовах $\alpha=\pi/2$ і $\alpha'=0$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha=0$, $\alpha'=0$ і $u'=0$, тобто початкова швидкість частинки дорівнює нулю і свій рух вона розпочинає із бічної твірної на рівні осі циліндра. В цьому випадку її рух має коливальний

характер, який згодом стабілізується і траєкторія наближається до нижньої твірної (рис. 2,а). Графічні ілюстрації наведені для коефіцієнта тертя $f=0,3$, тобто $\beta=16,7^\circ$, $R=0,2$ м, час руху $t=2,5$ с.

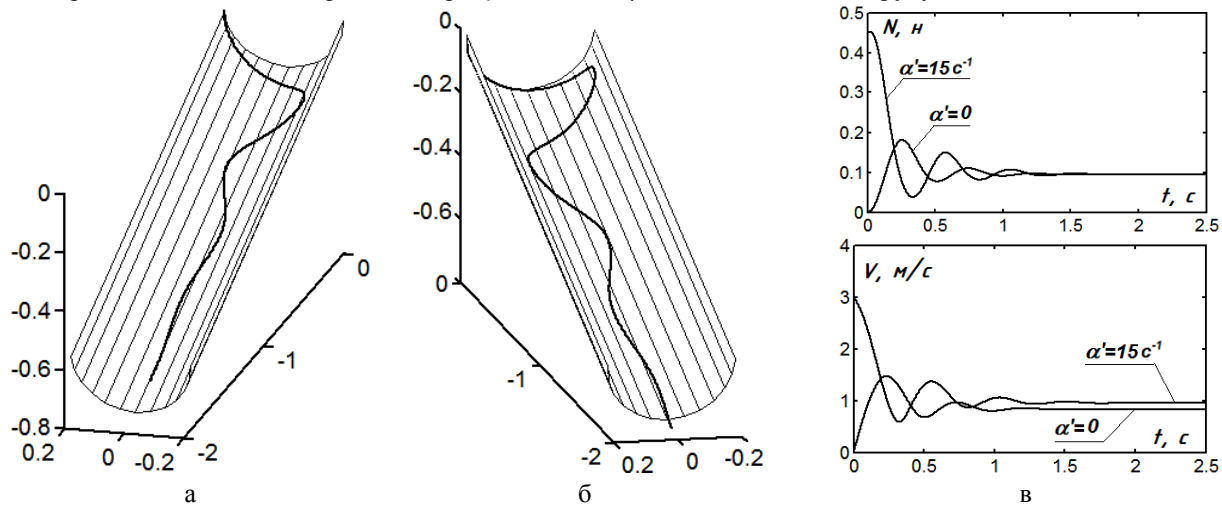


Рис. 2. Графічні ілюстрації до руху частинки по нерухомому циліндру, нахиленому під кутом тертя ($\beta=\arctg f$): а) траєкторія частинки, яка починає рух із стану спокою; б) траєкторія частинки із початковою кутовою швидкістю $\alpha'=15 \text{ c}^{-1}$; в) графіки зміни реакції N поверхні та швидкості V руху частинки

В обох випадках швидкість V з часом стає сталою і траєкторія руху наближається до нижньої твірної циліндра, причому після стабілізації руху швидкість у другому випадку буде більшою. Реакція поверхні теж згодом стає сталою (на графіку зображеної зміну для частинки масою $m=0,01$ кг).

Циліндр здійснює прямолінійні зворотно-поступальні коливання в горизонтальній площині ($b=0, \psi=0$). При такому коливанні висота точок циліндра не змінюється. Спочатку розглянемо відносний рух частинки по горизонтальному циліндру ($\beta=0$), який коливається в поперечному напрямі ($\varphi=90^\circ$). Очевидно, що траєкторією ковзання частинки буде дуга кола поперечного перерізу циліндра, по якому вона коливатиметься, змінюючи напрям руху. Таке коливання буде за умови, що на початку руху її відносна швидкість дорівнює нулю. Ми задамо початкову швидкість $u'=2 \text{ м/с}$ вздовж осі циліндра. Чисельним інтегруванням системи (18) при $R=0,2$ м, $a=0,1$ м, $\alpha=\pi/2, \alpha'=0, f=0,3$ і різних значеннях ω ми отримали відносну траєкторію руху, зображену на рис. 3,а. Відрізком із двохсторонніми стрілками показаний напрям зворотно-поступальних коливань. Частинка починає ковзання із нижньої твірної циліндра і через певний час її рух стабілізується, після чого вона починає ковзати по колу. Із збільшенням частоти коливань частинка за один і той же час ($t=2,5 \text{ c}$) проходить більшу відстань вздовж осі циліндра. Це також видно із рис. 3,в, на якому зображений графік зміни відстані u вздовж осі циліндра. На рис. 3,б побудовано траєкторію відносного руху частинки за попередніми вихідними умовами окрім кута φ , який в даному випадку рівний 45° .

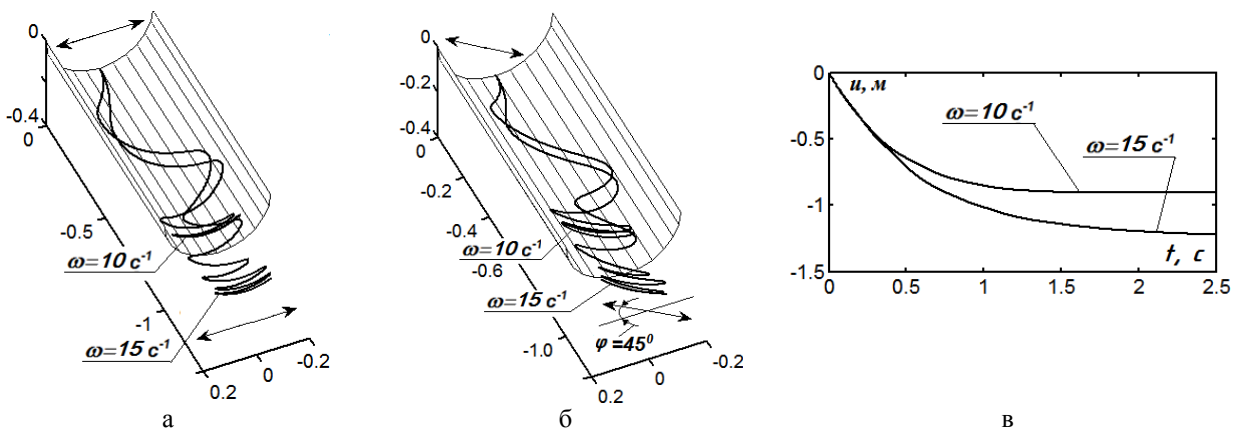


Рис. 3. Графічні ілюстрації до руху частинки по горизонтальному циліндру, який робить прямолінійні зворотно-поступальні коливання в горизонтальній площині при початковій швидкості $u'=2 \text{ м/с}$ вздовж його осі: а) траєкторія частинки при $\varphi=90^\circ$; б) траєкторія частинки при $\varphi=45^\circ$; в) графіки зміни відстані u переміщення частинки вздовж осі циліндра

Розглянемо відносний рух частинки при поперечних прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях циліндра при заданому куті β його нахилу до горизонтальної площини. Як відомо, по нерухомій площині частинка не може почати рух із стану спокою, якщо кут її нахилу менший кута тертя. Це ж саме стосується циліндра, якщо частинка знаходиться на нижній твірній (тобто при $\alpha=\pi/2$). Однак картина змінюється при коливальному русі циліндра. Навіть при незначних кутах нахилу циліндра, який коливається, частинка починає ковзати по його поверхні. На рис. 4 відносні траєкторії ковзання частинки побудовані при $\beta=2^\circ$, $R=0,2$ м, $a=0,1$ м, $\alpha=\pi/2$, $\alpha'=0$, $u'=0$, $f=0,3$.

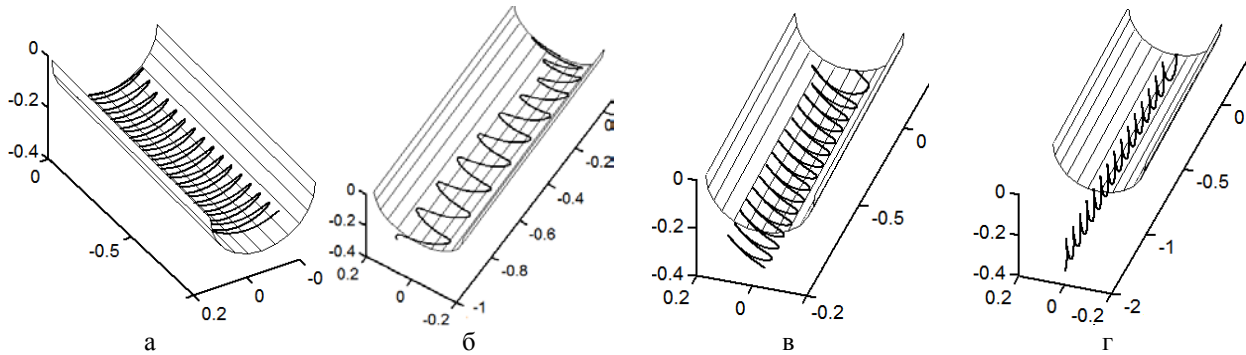


Рис. 4. Відносні траєкторії ковзання частинки по похилому циліндру ($\beta=2^\circ$):
 а) $\omega=10$ с⁻¹, $\varphi=90^\circ$, $t=10$ с;
 б) $\omega=20$ с⁻¹, $\varphi=90^\circ$, $t=3$ с;
 в) $\omega=10$ с⁻¹, $\varphi=45^\circ$, $t=10$ с;
 г) $\omega=10$ с⁻¹, $\varphi=15^\circ$, $t=10$ с

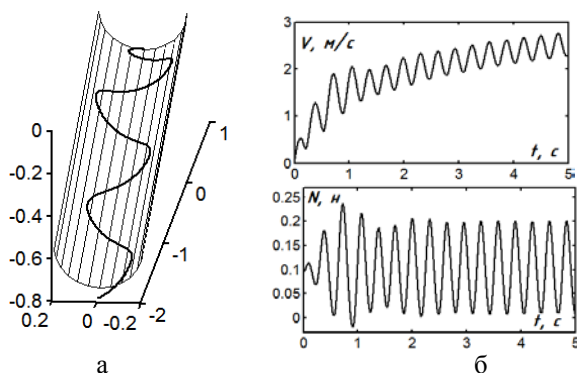


Рис. 5. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, нахиленому під кутом тертя ($\beta=\arctg f$), який здійснює зворотно-поступальні коливання:
 а) траєкторія частинки, яка починає рух із стану спокою;
 б) графіки зміни реакції N поверхні та швидкості V відносного руху частинки

Порівнюючи рисунки 4,а і 4,б, можна дійти висновку, що збільшення частоти коливань призводить до збільшення швидкості пересування частинки вниз по циліндру. Якщо циліндр коливати не в поперечному напрямі, а під певним кутом до нього, то траєкторія видозмінюється (рис. 4,в,г). Очевидно, що при $\varphi=0$ коливання частинки будуть відбуватися вздовж прямої лінії – нижньої твірної циліндра.

З'ясуємо, як ковзає частинка по циліндру, нахиленому під кутом тертя до горизонтальної площини. При відсутності коливань після стабілізації руху частинка рухається по нижній твірній із сталою швидкістю. Якщо ж надати циліндру зворотно-поступальних прямолінійних коливань в поперечному напрямі, то траєкторією руху частинки буде просторова крива, подібна до синусоїди із періодом, що з часом зростає (рис. 5,а). Із графіка зміни швидкості (рис. 5,б) видно, що вона

має періодичний характер, але в цілому зростає. Дослідження показали, що це зростання вздовж осі циліндра має лінійний характер. Із графіку зміни реакції N бачимо, що тиск частинки на поверхню у найвищих точках траєкторії близький до нуля.

Циліндр здійснює прямолінійні зворотно-поступальні коливання під кутом ψ до горизонтальної площини ($b=0$, $\psi \neq 0$). Відносний рух частинки при поперечних коливаннях циліндра у горизонтальній площині ($\varphi=90^\circ$) показано на рис. 4,а. При зменшенні кута φ зростає довжина переміщення частинки вздовж осі (рис. 4,в,г). Очевидно, що шлях переміщення буде максимальний при $\varphi=0$. З'ясуємо, як впливає кут ψ на величину шляху переміщення. Для цього візьмемо всі параметри коливального руху, для яких побудовано траєкторію на рис. 4,а, і додатково будемо давати певні значення кутів ψ . При такому коливанні висота точок циліндра буде змінюватися. На рис. 6,а на вигляді зверху зображено відносні траєкторії руху частинки при різних значеннях кута ψ . При $\psi=90^\circ$ (тобто при вертикальних коливаннях) частинка взагалі припиняє рух. На рис. 6,б побудовано траєкторії ковзання частинки для кута $\varphi=45^\circ$ і різних значень кута ψ протягом часу $t=7$ с. На відміну від кута φ , кут ψ по іншому впливає на переміщення частинки. При його зростанні від нуля швидкість переміщення частинки теж зростає, потім досягає найбільшого значення приблизно при $\psi=35^\circ$, а потім починає зменшуватися. Це видно із величини переміщення частинки вздовж твірних циліндра (рис. 6,б) при різних значеннях кута ψ .

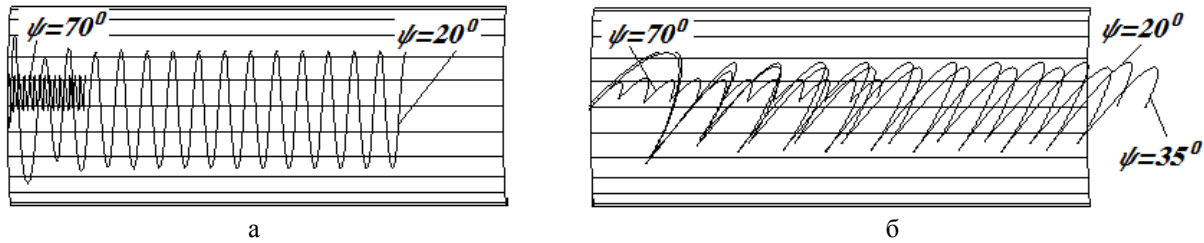


Рис. 6. Відносні траєкторії ковзання частинки по похилому циліндру ($\beta=2^\circ$) при різних поєднаннях кутів φ і ψ :
а) $\varphi=90^\circ, t=10$ с; б) $\varphi=45^\circ, t=7$ с

Загальний випадок коливання циліндра (всі його точки описують у вертикальних паралельних площинах криволінійну траєкторію – коло або еліпс). Якщо $a=b$, то траєкторією коливань точок циліндра є коло. Розглянемо цей випадок, оскільки він є простий для технічної реалізації. Візьмемо похилий циліндр із кутом нахилу, як і в попередніх випадках, $\beta=2^\circ$. Величина кута ψ при цьому не має значення. Спочатку розглянемо коливання у поперечному по відношенню до циліндра напрямі (при $\varphi=90^\circ$). На рис. 7,а побудовані траєкторії ковзання частинки для різних значень кута φ при $\beta=2^\circ, R=0,2$ м, $\omega=10$ c^{-1} , $a=b=0,1$ м, $\alpha=\pi/2, a'=0, u'=0, f=0,3, t=10$ с. Після стабілізації рух частинки починає описувати на поверхні гвинтову лінію, рухаючись при цьому вниз (тобто рух по пів циліндру неможливий). Однак при $\varphi=45^\circ$ проявляється несподіваний ефект: частинка починає рухатися вгору не виходячи за межі пів циліндра. Цей ефект стає ще більшим при $\varphi=15^\circ$.

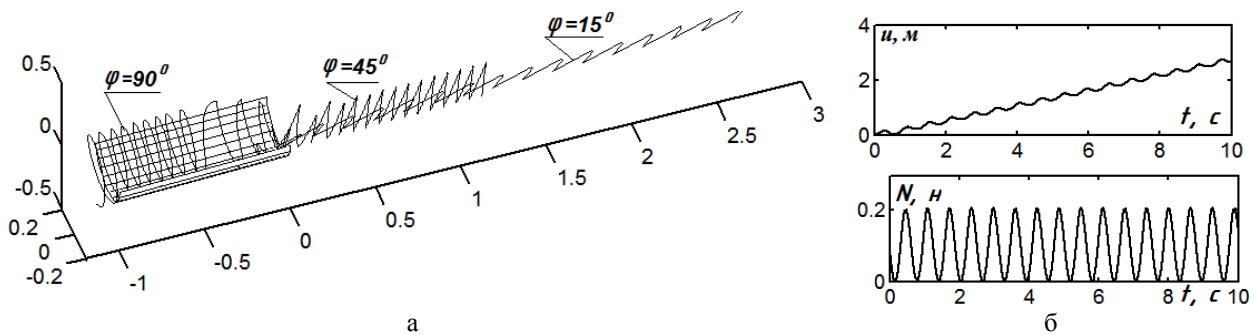


Рис. 7. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, точки якого описують кола, нахиленому під кутом $\beta=2^\circ$: а) траєкторії частинки для різних значень кута φ ; б) графіки зміни відстані u та реакції N поверхні для $\varphi=15^\circ$

З графіка зміни відстані u (рис. 7,б) можна зробити висновок, що відстань u зростає в цілому за лінійним законом, хоча на окремих ділянках вона зменшується. Це означає, що частинка при підйомі вгору по циліндру здійснює коливальний рух, що видно із траєкторії. При $\varphi=0$ цей ефект, очевидно, іще підсилиться, але коливання частинки із форми траєкторії побачити не вдасться, оскільки вона збігатиметься із нижньою прямолінійною твірною циліндра.

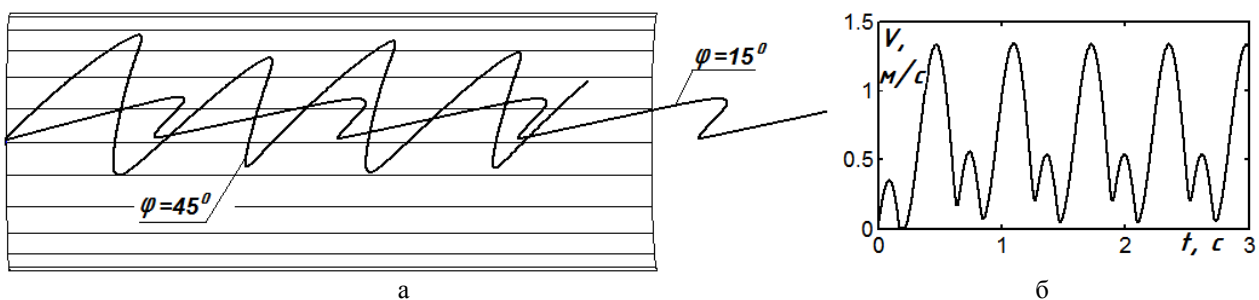


Рис. 8. Графічні ілюстрації до руху частинки по циліндру, точки якого рухаються по колу із кутовою швидкістю $\omega=10$ c^{-1} , нахиленому під кутом $\beta=2^\circ$: а) траєкторії частинки для різних значень кута φ ; б) графік зміни відносної швидкості частинки для $\varphi=15^\circ$

Можна допустити, що при поєднанні певного співвідношення між півосями a і b , тобто при русі точок циліндра по еліпсу, та певного значення кута ψ цей ефект можна підсилити. Однак дослідження показали, що для підйому частинок вгору найкращою траєкторією переносного руху циліндра є коло. При цьому має значення напрям кутової швидкості ω . Якщо для ω надати від'ємного значення, що означає зміну напрямку

обертання точок циліндра по колах, то частинки при всіх попередніх параметрах будуть рухатися не вгору по циліндру, а вниз, причому швидкість їх переміщення буде більшою, ніж вгору. На рис. 8,а побудовано траєкторії переміщення частинки вниз по циліндру при різних значеннях кута φ (вигляд зверху). Параметри ті ж самі, що і в попередньому випадку, окрім кутової швидкості $\omega = -10 \text{ c}^{-1}$, і часу руху $t = 3 \text{ с}$. Із рис. 8,а видно, що траєкторія зміщена відносно осі симетрії циліндра (це добре видно на прикладі траєкторії для $\varphi = 15^\circ$). На рис. 8,б побудовано графік зміни відносної швидкості частинки. В певний момент часу (коли частинка знаходиться в самому нижньому положенні на циліндрі) її швидкість наближається до нуля.

Висновки

Складені диференціальні рівняння дозволяють розв'язувати задачі на знаходження кінематичних параметрів руху частинки по циліндру, який здійснює поступальні коливання у вертикальній площині. Циліндр може бути розташований горизонтально або під заданим кутом до горизонтальної площини. Побудовано траєкторії для різних випадків зворотно-поступальних коливань циліндра у прямолінійному напрямку. Для поступальних похилого коливань похилого циліндра, коли його точки описують кола, може бути випадок, коли частинки при русі по циліндру піднімаються вгору. При зміні напрямку обертання точок циліндра по колах частинки будуть опускатися вниз, причому швидкість опускання буде більшою від швидкості підйому.

Список використаної літератури

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – Киев: Изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерноперерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Колос, 1980. – 304 с.
3. Блехман И.И. Вибрационное перемещение / И.И. Блехман, Г.Ю. Джанелидзе. – М.: Наука, 1964. – 410 с.
4. Блехман И.И. Вибрационная механика / И.И. Блехман. – М.: Физматлит, 1994. – 400 с.
5. Заика П.М. Об одном семействе регулярных режимов движения частицы по колеблющейся плоскости вибрационной зерноочистительной машины / П.М. Заика // Теория механизмов и машин. – Х.: Изв. ХГУ им. М. Горького, 1966. – Вып. 1. – С. 28-33.
6. Пилипака С.Ф. Рух частинки по поверхні циліндра, всі точки якого описують кола в горизонтальних площинах / С.Ф. Пилипака, М.Б. Клендій // Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія "Механізація та автоматизація виробничих процесів". – 2016. – Вип. 10/3 (31). – С. 195-201.
7. Pylypaka S.F. Particle motion over the surface of a rotary vertical axis helicoid / S.F. Pylypaka, M.B. Klendiy, O.M. Klendiy // INMATEH – Agricultural Engineering. – Bucharest: INMA, 2017. – Vol. 51, № 1 – P. 15 – 28.