УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, М.М. МУКВИЧ
Національний університет біоресурсів і природокористування України

УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ УЯВНОЇ ЦИКЛОЇДИ, ЗАДАНОЇ КОМПЛЕКСНИМ НАТУРАЛЬНИМ РІВНЯННЯМ

Здійснено аналітичний опис ізотропної лінії та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Для знаходження параметричних рівнянь ізотропної лінії використано комплексне натуральне рівняння циклоїди. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями сітки переносу. Доведено твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізотропна лінія, циклоїда, ізометрична сітка координатних ліній, середня кривина поверхні.

С.Ф. ПИЛИПАКА, Н.Н. МУКВИЧ
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

ОБРАЗОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ МНИМОЙ ЦИКЛОИДЫ, ЗАДАННОЙ КОМПЛЕКСНЫМ НАТУРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Осуществлено аналитическое описание изотропной линии и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Для нахождения параметрических уравнений изотропной линии использовано комплексное натуральное уравнение циклоиды. Аналитическое описание минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями сети переноса. Доказано утверждение о достаточном условии образования минимальных поверхностей, отнесённых к изометрической сетке координатных линий.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изотропная линия, циклоида, изометрическая сетка координатных линий, средняя кривизна поверхности, изотропная кривая.

S.F. PYLYPAKA, M.M. MUKVICH
National University Of Life And Environmental Sciences Of Ukraine

CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES BY THE IMAGINARY CYCLOID GIVEN BY THE COMPLEX NATURAL EQUATION

The analytical description of the isotropic line and the minimal surfaces with the help of complex variable functions is carried out. To find the parametric equations of the isotropic line, the complex natural equation of the cycloid is used. The analytical description of the minimal surfaces is carried out in a complex space with isotropic lines of the transfer grid. The theorem on a sufficient condition for the formation of minimal surfaces, assigned to the isometric grid of coordinate lines, is proved.

Keywords: minimal surface, isotropic line, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, mean curvature of a surface.

Постановка проблеми

Використання в CAD системах геометричних моделей, описаних мінімальними поверхнями, зумовлене перевагами практичного змісту при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Геометрична форма мінімальної поверхні, середня кривина H у всіх точках якої дорівнює нулю, забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому її форма залежить тільки від форми контуру, через який проведено мінімальну поверхню [1, с. 43]. Рівність нулю величини H середньої кривини мінімальної поверхні є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром).

Задаючи мінімальну поверхню функцією $z = z(x;\ y)$, Ж. Лагранж (J. Lagrange) одним із перших зробив висновок, що функція $z = z(x;\ y)$ повинна задовольняти диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа [2, С. 683] в частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується. Тому одним із сучасних напрямків дослідження аналітичного опису мінімальних поверхонь є удосконалення чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [3, 4]. Відомими є дослідження з геометричного моделювання деформованого листа параболічного рефлектора, що приймає форму, близьку до мінімальної поверхні [5]. Періодичні мінімальні поверхні використовуються для побудови пористої архітектури полімерів [6]. При дослідженні геометрії архітектурних конструкцій для утворення точкового каркасу мінімальних поверхонь найчастіше використовують варіаційні [3, 4, 7] та кінцево-різницеві методи [1].

Використання в CAD системах геометричних моделей, описаних мінімальними поверхнями, потребує спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь. Проблема аналітичного опису мінімальних поверхонь, починаючи з робіт К. Вейєрштрасса, С.Лі, Б. Рімана, Г. Шварца, розв'язується за допомогою методів функцій комплексної змінної [2, С. 685].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини [8, С. 144]. У роботах [9, 10] тільки в окремих випадках було знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній за формулами Шварца та Вейєрштрасса і побудовано відповідні мінімальні поверхні. Моделювання просторових ізотропних кривих за допомогою кватерніонів у просторі R^4, розглянуто у роботі [11]. Ряд робіт [12, 13] авторів даної статті присвячено задачі аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній. У дослідженнях [14] здійснено аналітичний опис ізотропної лінії за допомогою циклоїди, заданої натуральним рівнянням із дійсною функцією кривини. Тому потребує дослідження можливість знаходження параметричних рівнянь ізотропної лінії за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням.

Формулювання мети дослідження

Знайти аналітичний опис ізотропної лінії за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням. На основі вказаної ізотропної лінії побудувати мінімальну поверхню та приєднану мінімальну поверхню. Довести твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній.

Викладення основного матеріалу дослідження

Параметричні рівняння плоскої кривої, заданої натуральним рівнянням $k = k(s)$, де $s -$ довжина дуги кривої, мають вигляд [15, С. 48]:

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos\left[\int_0^s k(s)ds\right] ds; \qquad y(s) = y(0) + \int_0^s \sin\left[\int_0^s k(s)ds\right] ds. \tag{1}$$

Розглянемо уявну циклоїду, задану комплексним натуральним рівнянням:

$$k(s) = \frac{i}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \tag{2}$$

де $i -$ уявна одиниця, $a -$ параметр циклоїди, $a > 0$.

Підставимо (2) в (1), тоді при виконанні умов $x(0) = 0$ і $y(0) = 0$, отримаємо параметричні рівняння уявної циклоїди із комплексним натуральним рівнянням (2):

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{2}\left[s \cdot \mathrm{ch}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \mathrm{sh}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right)\right]; \\ y(s) &= \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left[s \cdot \mathrm{sh}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \mathrm{ch}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Із умови [8, С. 14] $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$ визначимо вираз $z(s) = i \cdot s$ та запишемо параметричні рівняння просторової ізотропної лінії:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{1}{2}\left[s \cdot \mathrm{ch}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \mathrm{sh}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right)\right]; \\ y(s) &= \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left[s \cdot \mathrm{sh}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right) + \sqrt{16a^2 - s^2} \cdot \mathrm{ch}\left(\arcsin\frac{s}{4a}\right)\right]; \\ z(s) &= i \cdot s. \end{aligned} \tag{4}$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні необхідно в параметричних рівняннях ізотропної кривої (4) увести заміну [12, 13]: $s = u + i \cdot v$. Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні $X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)$:

$$X(u,v) = \mathrm{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; \; Y(u,v) = \mathrm{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; \; Z(u,v) = \mathrm{Re}\{i \cdot (u + i \cdot v)\} \tag{5}$$

та приєднаної мінімальної поверхні $X^*(u,v), Y^*(u,v), \; Z^*(u,v)$:

$$X^{*}(u,v)=\operatorname{Im}\{x(u+i\cdot v)\};\quad Y^{*}(u,v)=\operatorname{Im}\{y(u+i\cdot v)\};\quad Z^{*}(u,v)=\operatorname{Im}\{i\cdot(u+i\cdot v)\}. \tag{6}$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (4), згідно (5), (6), отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned}
X(u,v)&=\cos\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{u}{2}\cdot\operatorname{ch}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta\right)+\\
&+\sin\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{v}{2}\cdot\operatorname{sh}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\right);\\
Y(u,v)&=\cos\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{v}{2}\cdot\operatorname{sh}\beta-\frac{a\cdot m}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\right)+\\
&+\sin\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{u}{2}\cdot\operatorname{ch}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta\right);\\
Z(u,v)&=-v,
\end{aligned}\tag{7}$$

де

$$\begin{aligned}
m&=m(u,v)=\left(\frac{u^{2}v^{2}}{64a^{2}}+\left(1-\frac{u^{2}-v^{2}}{16a^{2}}\right)\right)^{\frac{1}{4}};\quad \alpha=\alpha(u,v)=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{2uv}{u^{2}-v^{2}-16a^{2}}\right);\\
\beta&=\beta(u,v)=\operatorname{arctg}\left[\frac{\frac{u}{4a}-\left(\frac{u^{2}v^{2}}{64a^{2}}+\left(1-\frac{u^{2}-v^{2}}{16a^{2}}\right)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2uv}{u^{2}-v^{2}-16a^{2}}\right)\right)}{-\frac{v}{4a}+\left(\frac{u^{2}v^{2}}{64a^{2}}+\left(1-\frac{u^{2}-v^{2}}{16a^{2}}\right)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2uv}{u^{2}-v^{2}-16a^{2}}\right)\right)}\right];
\end{aligned}\tag{8}$$

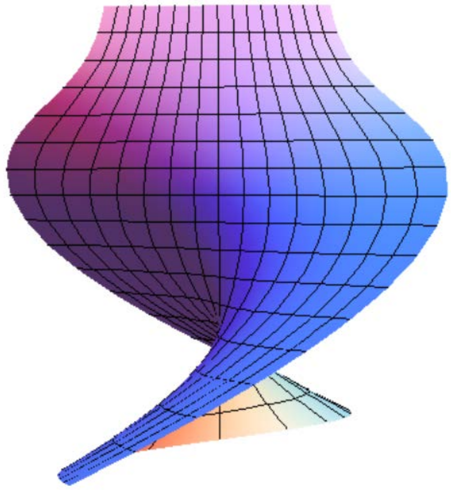
та приєднаної мінімальної поверхні:

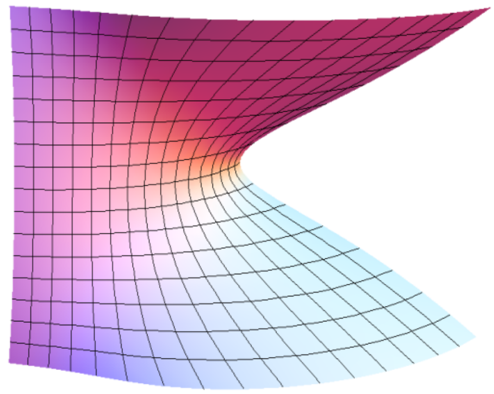
$$\begin{aligned}
X^{*}(u,v)&=\cos\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{v}{2}\cdot\operatorname{ch}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta\right)-\\
&-\sin\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{u}{2}\cdot\operatorname{sh}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\right);\\
Y^{*}(u,v)&=\cos\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{u}{2}\cdot\operatorname{sh}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\right)+\\
&+\sin\left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(-\frac{v}{4a}+m\cdot\cos\alpha\right)^{2}+\left(\frac{u}{4a}+m\cdot\sin\alpha\right)^{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{v}{2}\cdot\operatorname{ch}\beta+\frac{a\cdot m}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta\right);\\
Z^{*}(u,v)&=u.
\end{aligned}\tag{9}$$

У параметричних рівняннях (9) приєднаної мінімальної поверхні вирази $m=m(u,v)$; $\alpha=\alpha(u,v)$; $\beta=\beta(u,v)$ визначаються із рівностей (8).

Вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм мінімальної поверхні (7) та приєднаної мінімальної поверхні (9) є громіздкими, тому у даній статті не наводяться. У середовищі математичного процесора Wolfram Mathematica авторами статті досліджено, що коефіцієнти першої та другої квадратичних форм мінімальних поверхонь (7) та (9), перетворюють вираз середньої кривини H, для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (9) відповідно при $a = 1$; $u \in [-\pi;...\pi]$; $v \in [-2;...4]$. Слід зазначити, що утворена гвинтова мінімальна поверхня (7) має подібні властивості кривини із приєднаною мінімальною поверхнею, побудованою у дослідженні [14] за допомогою циклоїди, заданої натуральним рівнянням із дійсною функцією кривини.





а **б**

Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (4):
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7);
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (9).

Параметричні рівняння мінімальних поверхонь часто мають громіздкий вигляд, що ускладнює знаходження коефіцієнтів другої квадратичної форми і знаходження виразу H середньої кривини поверхні. Тому корисним для вказаних досліджень є запропоноване твердження, яке має нескладне доведення.

Твердження.

Поверхня, задана у вигляді $\overline{R} = \overline{R}(u, v)$, яка віднесена до ізометричної сітки координатних ліній, є мінімальною, якщо виконується рівність:

$$\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2} = \overline{0}. \tag{10}$$

Доведення.

Нехай поверхню, яку задано у вигляді $\overline{R} = \overline{R}(u, v)$, віднесено до ізометричної сітки координатних ліній, тобто для коефіцієнтів першої квадратичної форми виконуються рівності [8]: $E = G$; $F = 0$. Тоді вираз середньої кривини поверхні дорівнює [8, 15]:

$$H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)} = \frac{E \cdot N + G \cdot L}{2 \cdot E \cdot G}.$$

Враховуючи останню рівність та рівність $E = G$, легко зробити висновок, що поверхня, віднесена до ізометричної сітки координатних ліній є мінімальною, тобто $H = 0$, якщо $L + N = 0$.

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні $\overline{R} = \overline{R}(u, v)$ дорівнюють [15]: $L = \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u^2} \cdot \overline{n}$; $N = \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2} \cdot \overline{n}$, де $\overline{n}$ – вектор нормалі до вказаної поверхні. Тоді рівність $\mathrm{H} = L + N = 0$ виконується, якщо $\frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \overline{R}}{\partial v^2} = \overline{0}$. Твердження доведено.

Висновки

Використовуючи параметричні рівняння уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням, можна знайти аналітичний опис ізотропної лінії. На основі вказаної ізотропної лінії у комплексному просторі знайдено аналітичний опис мінімальних поверхонь. Доведено твердження про достатню умову утворення мінімальних поверхонь, віднесених до ізометричної сітки координатних ліній, без знаходження громіздких виразів коефіцієнтів другої квадратичної форми поверхонь.

Список використаної літератури

1. Михайленко В.Е. Конструирование форм современных архитектурных конструкций / В.Е. Михайленко, С.Н. Ковалёв. – Киев: Будівельник, 1978. – 112 с.
2. Математическая энциклопедия / [гл.ред. И.М. Виноградов]. – Т.3.– М.: Изд–во "Советская энциклопедия", 1982.– С. 683–690.
3. Пульпинский Я. С. Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Я.С. Пульпинский. – Пенза: Пензенский гос. университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
4. Клячин А.А. О сходимости полиномиальных приближённых решений уравнения минимальной поверхности / А.А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 72–83.
5. Бухтяк М.С. Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала / М. С. Бухтяк // Вестн. Томского гос. ун-та. Серия: математика и механика. – 2017. – №45. – С. 5–24.
6. Zhixing Lin, Shaohua Liu, Wenting Mao, Hao Tian, Nan Wang, Ninge Zhang, Feng Tian, Lu Han, Xinliang Feng, Yiyong Mai: Tunable Self-Assembly of Diblock Copolymers into Colloidal Particles with Triply Periodic Minimal Surfaces. Angewandte Chemie. 129(25), 7241 – 7246 (2017). DOI: 10.1002/ange.201702591.
7. Абдюшев А.А. Проектирование непологих оболочек минимальной поверхности / А.А. Абдюшев, И.Х. Мифтахутдинов, П.П. Осипов // Известия КазГАСУ. – 2009. – №2(12). – С. 86-92.
8. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
9. Пилипака С.Ф. Мінімальні поверхні, отримані з ізотропних кривих / С.Ф. Пилипака, Е.О. Чернишова // Збірник наукових праць КНУДТ (спецвипуск): Доповіді третьої кримської науково-практичної конференції "Геометричне та комп'ютерне моделювання: енергозбереження, екологія, дизайн". – К.: ДОП КНУТД, 2006. – С. 40–45.
10. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальної поверхні гвинтовим рухом просторової кривої / С.Ф. Пилипака, І.О. Коровіна // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Т. 39. – Мелітополь: ТДАТУ, 2008. – С.30–36.
11. Аушева, Н.М. Моделювання сім'ї ізотропних просторових PH – кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016.– №7. – С. 3–9.
12. Муквич М.М. Аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих, які лежать на поверхні обертання циклоїди / М.М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: Видавництво ХНТУ, 2016.– №3(58). – С. 519–523.
13. Пилипака С.Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного конуса / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2017.– №9. – С. 114–118.
14. Пилипака С.Ф. Аналітичний опис мінімальних поверхонь, утворених за допомогою циклоїди, заданої функціями натурального параметра / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Збірник тез доповідей XII Міжнародної науково-практичної конференції "Обухівські читання" (21 березня 2017 року) / Національний університет біоресурсів і природокористування України. – К., 2017. – С. 10–15. Режим доступу: https://nubip.edu.ua/node/26574
15. Милинский В. И. Дифференциальная геометрия / В. И. Милинский. – Л.: КУБУЧ, 1934. – 332 с.