УДК 514.12

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, Е.А. ПИЛИПЕНКО
Запорожский национальный университет

ОГИБАЮЩИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВ ОКРУЖНОСТЕЙ

Рассматриваются огибающие семейств окружностей с центрами на данной кривой – параллели. Устанавливаются критерии, позволяющие в зависимости от значений параметров кривой определять, будет ли параллель сохранять тип кривой, или произойдет ее деформация.

Ключевые слова: кривая, семейство кривых, параметрические уравнения, огибающая, параллель.

Є.В. СТЄГАНЦЕВ, К.А. ПИЛИПЕНКО
Запорізький національний університет

ОБВІДНІ СПЕЦІАЛЬНИХ СІМЕЙ КІЛ

Розглядаються обвідні сімей кіл з центрами на даній кривій – паралелі. Встановлюються критерії, які дозволяють в залежності від значень параметрів кривої визначати, чи буде паралель зберігати тип кривої, чи відбудеться її деформація.

Ключові слова: крива, сім'я кривих, параметричні рівняння, обвідна, паралель.

E.V. STEGANTSEV, E.A. PILIPENKO
Zaporozhye National University

THE ENVELOPES OF THE SPECIAL FAMILIES OF THE CIRCUMFERENCES

The envelopes of the families of the circumferences with the centers on the given curve – parallels have been considered. One formulates the criterion, which gives the opportunity to determine if the parallel keeps the type of the curve or its deformation takes place in dependence on the parameters of the curve.

Keywords: curve, family of the curves, parametric equations, envelope, parallel.

Постановка проблемы

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений применяется метод нахождения огибающих для получения общего и особых решений. Так называемая трубчатая поверхность – огибающая однопараметрического семейства сфер, центры которых принадлежат некоторой плоской кривой – является примером интегральной поверхности. При определенных условиях она действительно имеет вид трубки [3].

Известно, что в дифференциальной геометрии огибающая семейства кривых находится при помощи операции дифференцирования [4]. Как правило, при этом получается система из двух уравнений. Первое уравнение – это уравнение семейства кривых, а второе – его производная по параметру семейства [1]. Огибающие семейств окружностей одинакового радиуса с центрами на данной кривой (назовем ее базой), называются параллелями. Параллели могут иметь тот же тип, что и база, но может происходить и их деформация. Как, зная параметры базы и семейства окружностей, сказать наперед, произойдет ли деформация огибающей? В статье этот вопрос решается для параболы в качестве базы.

Анализ последних исследований и публикаций

Понятие огибающей находит широкое применение в геометрии. Некоторые из этих применений описаны в [4]. В работах [1–2] рассмотрена огибающая как решение системы уравнений, в которой первое уравнение – это уравнение семейства кривых, а второе – производная от уравнения семейства по его параметру. Понятие огибающей также используется при нахождении общего и особых решений дифференциального уравнения [3].

Формулирование цели исследования

Получить зависимость между параметром параболы и радиусом окружностей семейства, определяющего параллель параболы, при которой параллель тоже будет параболой.

Изложение основного материала исследования

Пусть имеется некоторое семейство плоских линий. Огибающей этого семейства называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной из линий заданного семейства. Если семейство линий задано уравнением $f(x,y,\alpha)=0$, то огибающая этого семейства описывается системой уравнений [1]

$$\begin{cases} f(x,y,\alpha)=0, \\ f'_\alpha(x,y,\alpha)=0. \end{cases}$$

Для наглядности, рассуждения проведем для огибающей семейства окружностей одинакового радиуса, центры которых расположены на параболе $x^2 = 2\tilde{p}y$, $\tilde{p}$ – параметр параболы. Такую огибающую принято называть параллелью. Сделав замену $p = \dfrac{1}{4\tilde{p}}$, получим уравнение параболы в виде $y = 2px^2$. Таким образом, семейство окружностей задается системой уравнений

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2, \\ \beta = 2p\alpha^2. \end{cases}$$

Для нахождения параллели воспользуемся общей теорией нахождения огибающих, изложенной, например, в [2]. Подставив значение β из второго уравнения системы в первое и найдя производную полученного уравнения по α, получим уравнения искомой огибающей в неявном виде:

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + \left(y - 2p\alpha^2\right)^2 = R^2, \\ -2(x-\alpha) - 4p\alpha\left(y - 2p\alpha^2\right) = 0. \end{cases}$$

Ее параметрические уравнения следующие:

$$\begin{cases} x = \mp 2p\alpha\sqrt{\dfrac{R^2}{4p^2\alpha^2+1}} + \alpha, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{R^2}{4p^2\alpha^2+1}} + 2p\alpha^2. \end{cases}$$

Как видно из рис. 2, внутренняя параллель может подвергаться искажению. Выясним, когда это происходит. Воспользуемся следующими соображениями. Переместим окружность с центром в начале координат, принадлежащую семейству, вправо на Δx (рис 1). Понятно, что искажение параллели происходит в том случае, когда при смещении окружности вправо, точка касания с огибающей смещается влево. Это означает, что ее абсцисса становится отрицательной.

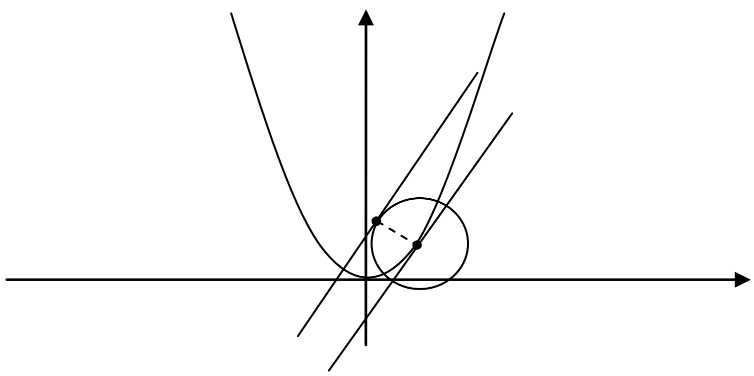

Рис. 1.

Найдем уравнение касательной к параболе в точке $B\left(\Delta x, 2p(\Delta x)^2\right)$, $\Delta x > 0$. Получим $y - 2p(\Delta x)^2 = 4p\Delta x(x - \Delta x)$ или $4px\Delta x - y - 2p(\Delta x)^2 = 0$. Пусть точка A есть точка касания с огибающей, она также является точкой пересечения перпендикуляра AB к касательной к параболе с параллельной ей и удаленной от нее на расстояние R прямой b. Из условия параллельности имеем

$$b:\ 4px\Delta x - y + c = 0.$$

Неизвестный коэффициент c найдем из равенства

$$\frac{4p(\Delta x)^2 - 2p(\Delta x)^2 + c}{\sqrt{16p^2(\Delta x)^2 + 1}} = R,$$

левая часть которого выражает расстояние от точки B до прямой b. Таким образом, $c = R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2+1}-(\Delta x)^2$.

Тогда уравнение прямой b имеет вид $4px\Delta x - y + R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2+1}-(\Delta x)^2 = 0$, а уравнение AB запишем по точке и угловому коэффициенту, получим $y - 2p(\Delta x)^2 = \frac{-1}{4p\Delta x}(x-\Delta x)$. Система для вычисления координат точки A имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{4p\Delta x}x + y - \frac{1}{4p} - 2p(\Delta x)^2 = 0, \\ 4px\Delta x - y + R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2+1}-(\Delta x)^2 = 0. \end{cases}$$

Нас интересует только абсцисса точки A и условие ее положительности, то есть

$$x = \frac{\frac{1}{4p} - R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2+1} + 4p(\Delta x)^2}{\frac{1}{4p\Delta x} + 4p\Delta x} > 0.$$

Поскольку $\Delta x > 0$, то знаменатель как сумма двух взаимно обратных чисел больше двух. Тогда имеем

$$R\sqrt{16p^2(\Delta x)^2+1} < \frac{1}{4p} + 4p(\Delta x)^2.$$

При малых Δx это неравенство имеет вид $R < \frac{1}{4p}$. Тогда условие, при котором огибающая семейства равных окружностей, центры которых лежат на параболе с параметром $\tilde{p}$, также является параболой, будет следующим

$$R < \frac{1}{4\cdot\frac{1}{4\tilde{p}}} = \tilde{p}.$$

Таким образом, если значение радиуса R окружности, принадлежащей семейству, меньше значения параметра параболы $\tilde{p}$, то параллель также является параболой.

В качестве примера найдем параллели семейства окружностей

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2, \\ \beta = \alpha^2, \end{cases}$$

центры которых лежат на параболе $y = x^2$ с параметром $\tilde{p} = \frac{1}{2}$. Подставив значение β из второго уравнения системы в первое и найдя производную полученного уравнения по α, получим уравнение искомой огибающей

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + \left(y-\alpha^2\right) = R^2, \\ -2(x-\alpha) - 4\alpha\left(y-\alpha^2\right) = 0 \end{cases}$$

в неявном виде. Ее параметрические уравнения следующие

$$\begin{cases} x = \mp 2\alpha\sqrt{\frac{R^2}{4\alpha^2+1}} + \alpha, \\ y = \pm\sqrt{\frac{R^2}{4\alpha^2+1}} + \alpha^2. \end{cases}$$

Построим огибающую при помощи математического пакета Maple для $R = 1$ (рис. 2).

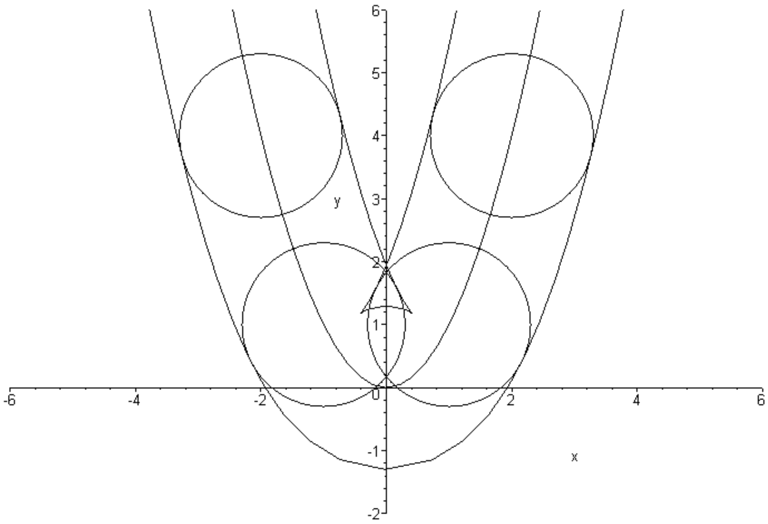

Рис. 2.

Деформация параллели произошла, поскольку в соответствии с полученным критерием, неравенство $R < \tilde{p}$ имеет вид $1 < \frac{1}{2}$, то есть является неверным.

Выводы

В статье рассмотрены параллели семейств окружностей с центрами на параболе. Получен критерий, позволяющий сказать наперед, будет ли параллель иметь тот же вид, что и сама кривая. Указанный критерий аналитический. Приведены примеры параллелей некоторых семейств окружностей.

Список использованной литературы

1. Болтянский В.Г. Огибающая / В.Г. Болтянский. – М.: Гос. изд-во физико-математической лит., 1961. – 76 с.
2. Залгаллер В.А. Теория огибающих / В.А. Залгаллер. – М.: Наука, 1975. – 106 с.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
4. Мищенко А.С. Курс дифференциальной геометрии и топологии / А.С. Мищенко, А.Т. Фоменко. – М.: Физматлит, 2004. – 304 с.