УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК
Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет"

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА З УРАХУВАННЯМ КІНЦЕВОЇ ШВИДКОСТІ ПОШИРЕННЯ ТЕПЛА

У даній роботі розроблена тривимірна математична модель розподілу температурних полів у порожнистому кусково-однорідному циліндри, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі Неймана математичної фізики для рівняння теплопровідності. За допомогою *розробленого інтегрального перетворення для кусково-однорідного простору, знайдено температурне поле порожнистого кусково-однорідного циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, скінченної довжини L у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є.*

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, час релаксації, трансцендентне рівняння.

М.Г. БЕРДНИК
Государственное высшее учебное заведение "Национальный горный университет"

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА С УЧЕТОМ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА

В данной работе разработана трехмерная математическая модель распределения температурных полей в полом кусочно-однородном цилиндре, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Неймана математической физики для уравнения теплопроводности. С помощью разработанного интегрального преобразования для кусочно-однородного пространства, найдено температурное поле полого кусочно-однородного цилиндра, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, конечной длины L в виде сходящихся ортогональных рядов по функциям Бесселя и Фурье.

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, интегральные преобразования Лапласа, Фурье, время релаксации, трансцендентное уравнение.

M.G.BERDNYK
State Higher Education Institution "National Mining University"

MATHEMATICAL MODELING OF THREE-DIMENSIONAL GENERALIZED PROBLEM OF HEAT EXCHANGE PIECEWISE HOMOGENEOUS CYLINDER IN VIEW FINITE SPEED OF PROPAGATION OF HEAT

In this paper, we developed a three-dimensional mathematical model for the distribution of temperature fields in a hollow piecewise homogeneous cylinder that rotates at a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the finite velocity of heat propagation in the form of the Neumann boundary value problem of mathematical physics for the heat equation. Using the developed integral transformation for a piecewise homogeneous space, a temperature field of a hollow piecewise homogeneous cylinder is found that rotates with a constant angular velocity about the axis OZ of finite length L in the form of convergent orthogonal series in the Bessel and Fourier functions

Keywords: complex Fourier series, Laplace integral transforms, Fourier time, relaxation time, transcendental equation.

Постановка проблеми

У феноменологічній теорії теплопровідності передбачається, що швидкість поширення тепла є нескінченно великою[1,2]. Питання про можливості узагальнення рівняння переносу енергії на тривимірний простір у випадку узагальненого закону теплопровідності Фур'є розглянуто у [1].

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла.

Однак при високих інтенсивних нестаціонарних процесах, що спостерігаються, наприклад, при вибухах, надзвукових потоках, великих швидкостях обертання використання цього припущення приводить до помилок, тому необхідно враховувати, що розповсюдження теплоти проходить з кінцевою швидкістю.

Анализ останніх досліджень і публікацій

Як показує огляд літератури теплообмін в циліндрах, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [3, 4]. В [1] показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра , якій обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

В [1] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-2\frac{\Delta F_o}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \quad \text{і} \qquad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0\,,$$

де F_0 – критерій Фур'є; Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd=10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega=1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi\leq 2\cdot 10^{-5} \quad \text{і} \qquad \Delta F_o\leq 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови *Bi* = 5 (*Bi* – критерій Біо), час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo\approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ операцій, так як внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в циліндрах , які обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Мета статті

Розробити тривимірну математичну модель розподілу температурних полів у порожньому кусково-однорідному циліндрі, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі *OZ*, скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для рівняння теплопровідності, та знайти рішення отриманої крайової задачі, розв'язки якої використовуються під час керування температурними полями.

Основная часть

Розглянемо розрахунок нестаціонарного температурного поля порожнього кругового циліндра зовнішнього радіуса R в циліндричній системи координат (r,φ,z), кусково-однорідного в напрямку полярного радіуса r, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ ,скінченної довжини L з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла. Теплофізичні властивості в кожному шарі не залежать від температури за умови ідеального теплового контакту між шарами, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра постійна G_0, а на зовнішній і внутрішній поверхні циліндра відомі теплові потоки $G(\varphi,z)$ і $G_1(\varphi,z)$ відповідно.

Відносну температуру циліндра $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можна представити у вигляді:

$$\theta(\rho,\varphi,z,t)=\begin{cases}\theta_1(\rho,\varphi,z,t) & якщо \quad \rho\in(\rho_0,\rho_1)\\ \theta_2(\rho,\varphi,z,t) & якщо \quad \rho\in(\rho_1,\rho_2)\end{cases} \tag{1}$$

Відносні температури $\theta_s(\rho,\varphi,z,t)$ s –го шара циліндра обчислюються по формулам:

$$\theta_s(\rho,\varphi,z,t)=\frac{T_s(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0},$$

де $T_s(\rho,\varphi,z,t)$ - температури s –го шара циліндра; $T_{\max}$ -максимальна температура циліндра; $\rho=\dfrac{r}{R}$; s=1,2.

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, який обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні приймає вигляд:

$$\gamma\, c\left\{\frac{\partial T}{\partial t}+\omega\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\}=\lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

де $\gamma -$ щільність середовища; с-питома теплоємність; λ - коефіцієнт теплопровідності; $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища; t –час; τ_r -час релаксації.

Математично задача визначення відносної температури циліндра $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ складається в інтегруванні гіперболічних диференціальних рівнянь теплопровідності (2) в області $D_S=\{(\rho,\varphi,z,t)\,|\,\rho\in(\rho_{S-1},\rho_S),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{z}\in(0,1),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta_s}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_s}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi\partial t}=\alpha_s^2\left[\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_s}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta_s}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta_s}{\partial z^2}\right] \tag{3}$$

с початковими умовами

$$\theta_S(\rho,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta_S(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0, \tag{4}$$

граничними умовами

$$\int_0^t\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=W(\varphi,z),\qquad \int_0^t\left.\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2}e^{\frac{\zeta-t}{\tau_r}}d\zeta=V(\varphi,z), \tag{5}$$

$$\theta_s(\rho,\varphi,0,t)=0,\quad \theta_s(\rho,\varphi,1,t)=0, \tag{6}$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_1(\rho_1,\varphi,z,t)=\theta_2(\rho_1,\varphi,z,t) \tag{6}$$

$$\lambda_1\frac{\partial\theta_1(\rho_1,\varphi,z,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\theta_2(\rho_1,\varphi,z,t)}{\partial\rho} \tag{7}$$

де $\rho_1=\dfrac{R_1}{R}$; $\rho_0=\dfrac{R_0}{R}$; $\rho_2=1$; R_0- внутрішній радіус циліндра; R_1- радіус межі шарів; λ_S - коефіцієнт теплопровідності, $\gamma_S -$ щільність, c_S-питома теплоємність, $a_S=\dfrac{\lambda_S}{c_S\gamma_S}$ - коефіцієнт температуропровідності s –го шара циліндра ;$\alpha_S^2=\dfrac{a_S}{R^2}$; s=1,2; $z=\dfrac{z}{L}$; $\chi=\left(\dfrac{R}{L}\right)^2$;
$W(\varphi,z)=\dfrac{G_1(\varphi,z)\tau_r}{\lambda_1(T_{\max}-G_0)}$; $V(\varphi,z)=\dfrac{G(\varphi,z)\tau_r}{\lambda_2(T_{\max}-G_0)}$; $G_1(\varphi,z),\ G(\varphi,z)\in\mathrm{C}(0,2\pi)$.

Тоді рішення крайової задачі (3)-(7) $\theta_S(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ , φ, t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [5], тобто $\theta_S(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $W(\varphi,z)$, $V(\varphi,z)$, $\theta_S(\rho,\varphi,z,t)$, можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [5]:

$$\begin{Bmatrix}\theta_S(\rho,\varphi,z,t)\\ W(\varphi,z)\\ V(\varphi,z)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_{S,n}(\rho,z,t)\\ W_n(z)\\ V_n(z)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \tag{8}$$

де

$$\begin{Bmatrix} \theta_{s,n}(\rho, z, t) \\ W_n(z) \\ V_n(z) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \theta_s(\rho, \varphi, z, t) \\ W(\varphi, z) \\ V(\varphi, z) \end{Bmatrix} \cdot \exp(-in\varphi) d\varphi ;$$

$\theta_{s,n}(\rho, z, t) = \theta_{s,n}^{(1)}(\rho, z, t) + \mathrm{I}\,\theta_{s,n}^{(1)}(\rho, z, t)$; $\mathrm{V_n}(z) = V_n^{(1)}(z) + I\,\mathrm{V_n^{(2)}}(z)$; $\mathrm{W_n} = W_n^{(1)}(z) + I\,\mathrm{W_n^{(2)}}(z)$;
I–уявна одиниця.

З огляду на те, що $\theta_s(\rho, \varphi, z, t)$ функції дійсні, обмежимося надалі розглядом $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$ для n=0,1,2,…,тому що $\theta_{s,n}(\rho, z, t)$ і $\theta_{s,-n}(\rho, z, t)$ будуть комплексно спряженими [5]. Підставляючи значення функцій з (8) у (3)-(7) одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t} + \vartheta_n^{(i)} \theta_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r \frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial t^2} + \tau_r \vartheta_n^{(i)} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(m_i)}}{\partial t} = \alpha_s^2 \left[\frac{\partial^2 \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \theta_{s,n}^{(i)} + \chi \cdot \theta_{s,n}^{(i)} \right] \quad (9)$$

с початковими умовами

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0) = 0, \qquad \frac{\partial \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

з граничними умовами

$$\int_0^t \left. \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = W_n^{(i)}(z), \qquad \int_0^t \left. \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2} e^{\frac{\zeta - t}{\tau_r}} d\zeta = V_n^{(i)}(z), \quad (11)$$

$$\theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \qquad \theta_{s,n}^{(i)}(\rho, 1, t) = 0, \quad (14)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t) = \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t), \quad (12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \theta_{1,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho} = \lambda_2 \frac{\partial \theta_{2,n}^{(i)}(\rho_1, z, t)}{\partial \rho}, \quad (13)$$

де $\vartheta_n^{(1)} = -\omega n$; $\vartheta_n^2 = \omega n$; $\mathrm{m}_1 = 2$, $\mathrm{m}_2 = 1$; ; i,s=1,2.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (9) з умовами (10)-(13) інтегральне перетворення Лапласа[6]:

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} \, \mathrm{d}\tau .$$

В результаті одержуємо систему диференціальних рівнянь

$$s\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} + \vartheta_n^{(i)} \left(\tilde{\theta}_{s,n}^{(m_i)} + \tau_r s \tilde{\theta}_n^{(m_i)} \right) + \tau_r s^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} = \alpha_s^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)} + \chi \frac{\partial^2 \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}}{\partial z^2} \right] \quad (14)$$

граничними умовами

$$\left. \frac{\partial \tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \tilde{W}_n^{(i)}(z), \qquad \left. \frac{\partial \tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_2} = \tilde{V}_n^{(i)}(z), \quad (15)$$

$$\tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \qquad \tilde{\theta}_{s,n}^{(i)}(\rho, 0, t) = 0, \quad (16)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t), \qquad (17)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\tilde{\theta}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\tilde{\theta}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}, \qquad (18)$$

де $\tilde{W}_n^{(i)}(z)=W_n^{(i)}(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$; $\tilde{V}_n^{(i)}(z)=V_n^{(i)}(z)\left(1+\frac{1}{s\tau_r}\right)$ (i,s=1,2).

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (14) інтегральне перетворення Фур'є:

$$\bar{f}(\lambda_m)=\int_0^1 f(x)\sin(\pi\cdot \mathrm{m}\cdot \mathrm{x})\,\mathrm{dx},$$

де $\lambda_m=\pi\cdot m$; m=1,2,…,а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$f(x)=2\sum_{m=1}^{\infty}\sin(\pi\cdot \mathrm{m}\cdot \mathrm{x})\cdot\bar{f}(\lambda_m). \qquad (19)$$

В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$s\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(m_i)}+\tau_r s\overline{\tilde{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}=\alpha_s^2\left[\frac{d^2\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}}{d\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}-\chi\lambda_m^2\overline{\tilde{\theta}}_{s,n}^{(i)}\right] \qquad (20)$$

з граничною умовою

$$\left.\frac{\partial\overline{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=\overline{\tilde{W}}_n^{(i)}, \qquad \left.\frac{\partial\overline{\tilde{\theta}}_{2,n}^{(i)}}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_2}=\overline{\tilde{V}}_n^{(i)}, \qquad (21)$$

умовами ідеального теплового контакту

$$\overline{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)=\overline{\tilde{\theta}}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t), \qquad (22)$$

$$\lambda_1\frac{\partial\overline{\tilde{\theta}}_{1,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}=\lambda_2\frac{\partial\overline{\tilde{\theta}}_{2,n}^{(i)}(\rho_1,t)}{\partial\rho}. \qquad (23)$$

Для розв’язання крайової задачі (20)-(23) побудуємо інтегральне перетворення:

$$\hat{f}(\mu_{n,k})=\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha(\rho)}\,\rho\,\mathrm{f}(\rho)d\rho=\sum_{s=1}^{2}\int_{\rho_{s-1}}^{\rho_s}\frac{Q_s(\mu_{n,k}\rho)}{\alpha_s^2}\,\rho\,\mathrm{f}(\rho)d\rho, \qquad (24)$$

де

$$Q_0(\mu_{n,k}\rho),\ \alpha(\rho)=\begin{cases}Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right),\ \alpha_1^2 & \textit{якщо}\quad \rho\in(\rho_0,\rho_1)\\ Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right),\ \alpha_2^2 & \textit{якщо}\quad \rho\in(\rho_1,\rho_2)\end{cases}.$$

Власні функції $Q_0(\mu_{n,k}\rho)$ мають вигляд:

$$Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)=\frac{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)}{\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)},\qquad Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)},\tag{25}$$

де $\Lambda\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho\right)\right]$;

$\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_m\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$; $J_n(x), Y_n(x)$ – функції Бесселя $1^{го}$ і $2^{го}$ роду $n^{го}$ порядку відповідно[5].

Власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв’язку трансцендентного рівняння:

$$\frac{\mu_{n,k}J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}=\sigma\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)},\tag{26}$$

де $H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)=\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\left[Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)-J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)Y_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho\right)\right]$; $\sigma=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\,\hat{f}(\mu_{n,k}),\tag{27}$$

де

$$\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2=\frac{\rho_1^2}{2\alpha_1^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_1^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{\mu_{n,k}J_n'\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}{\alpha_1 J_n\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_1\right)}\right]^2\right\}+\frac{\rho_2^2}{2\alpha_2^2}\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_2^2}\right)\left[\frac{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_2\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2-$$

$$-\frac{\rho_1^2}{2\alpha_2^2}\left\{\left(1-\frac{\mathrm{n}^2\alpha_2^2}{\mu_{n,k}^2\rho_1^2}\right)+\left[\frac{H\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}{\Psi\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\rho_1\right)}\right]^2\right\}.$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (20) з умовами (21)-(23) інтегральне перетворення (24), де власні функції $Q_s(\mu_{n,k}\rho)$ визначаються по формулам (25), а власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться із розв’язку трансцендентного рівняння (26) і враховуючи позначення (1), в результаті одержуємо систему звичайних алгебраїчних рівнянь відносно $\hat{\hat{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}$:

$$s\overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(i)} + \vartheta_n^{(i)}\left(\overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(m_i)} + \tau_r s\overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(m_i)}\right) + \tau_r s^2\overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(i)} = q_{n,k}\left(\frac{\mu_{n,k}\hat{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{q_{n,k}} - \overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(i)}\right), \tag{28}$$

де $q_{n,k} = \mu_{n,k}^2 + \chi\lambda_m^2$; . $\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})} = \rho_0 Q_1\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_1}\rho_0\right)\tilde{W}_n^{(i)} + Q_2\left(\frac{\mu_{n,k}}{\alpha_2}\right)\tilde{V}_n^{(i)}$, i=1,2.

Розв'язавши систему рівнянь (28) одержуємо:

$$\overline{\overline{\tilde{\theta}}}_n^{(i)} = \frac{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right) + (-1)^{i+1}\omega n\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(m_i)}(1 + s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2 + s + \mathrm{q}_{\mathrm{n,k}}\right)^2 + \omega^2 n^2 (1 + s\tau_r)^2}. \tag{29}$$

Застосовуючи до зображення функцій (29) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\overline{\overline{\theta}}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r\omega nI\right] + \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n - (2\tau_r s_j + 1)I\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r\omega nI\right] + \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n + (2\tau_r s_j + 1)I\right]\right\} \tag{30}$$
$$\cdot\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

$$\overline{\overline{\theta}}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) + \tau_r\omega nI\right] - \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n - (2\tau_r s_j + 1)I\right]\right\}\cdot$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right) + \sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\left\{\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\left[(2\tau_r s_j + 1) - \tau_r\omega nI\right] - \Omega_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\left[\tau_r\omega n + (2\tau_r s_j + 1)I\right]\right\} \tag{31}$$
$$\left(e^{s_j t} - 1\right),$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \frac{0.5 s_j^{-1}}{(2\tau_r s_j + 1)^2 + (\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для j=1,2,3,4 визначаються за формулами

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r\omega ni - 1) \pm \sqrt{(1 + \tau_r\omega ni)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\ s_{,3,4} = \frac{(\tau_r\omega ni + 1) \pm \sqrt{(1 - \tau_r\omega ni)^2 - 4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином з урахуванням формул обернених перетворень (8),(19) і (27) одержуємо температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса , який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,\mathrm{z},t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left\langle 2\sum_{m=1}^{\infty}\left[\overline{\overline{\theta}}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t) + I\cdot\overline{\overline{\theta}}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\sin(\pi\,\mathrm{m\,z})\right\rangle\cdot\frac{Q_0(\mu_{n,k}\rho)}{\left\|Q_0(\mu_{n,k}\rho)\right\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi),$$

де значення $\overline{\overline{\theta}}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\overline{\overline{\theta}}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються по формулам (30),(31).

Висновки

У статті знайдено температурне поле кусково-однорідного кругового циліндра в напрямку полярного радіуса, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ , з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, у вигляді збіжних ортогональних рядів по функціям Бесселя і Фур'є. Знайдений аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при модулюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, прокатних валках, турбінах і т.і.).

Список використаної літератури

1. Бердник М. Г. Математичне моделювання тривимірної узагальненої задачі теплообміну суцільного циліндра, який обертається / Бердник М. Г. // Питання прикладної математики і математичного моделювання. Дніпропетровськ. -2014.– С. 26-35.
2. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. // Львів. - 2011. - 48 с.
3. Голицына Е. В. Математическое моделирование температурного поля в полом вращающемся цилиндре при нелинейных граничных условиях / Е.В. Голицына //Теплофизика высоких температур. – 2008. – Т. 46. -№ 6. – С. 905 – 910.
4. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових Середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. // Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ. - 2009. - 120 с.
5. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики / Маркович Б. М. – Львів: Львівська політехніка. - 2010. - 384 с.
6. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур"є, Лапласа: узагальнення та застосування /Г.П. Лопушанська, А.О., Лопушанський, О.М. М"яус // Львів: ЛНУ ім. Івана Франка. - 2014. - 152 с.