УДК 519.632.4

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Т.А. СЕЛУЯНОВА, Н.В. СТАРУН
Херсонський національний технічний університет

ІЄРАРХІЧНІ СХЕМИ В ЗАДАЧАХ ЕРМІТОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

В статті проведено порівняльний аналіз властивостей інтерполяційних поліномів, що будуються за ієрархічною схемою Ерміта та за методом базисних елементів. Показано, що інтерполяційні поліноми, які отримані за методом базисних елементів, є окремим випадком ієрархічних інтерполяційних поліномів, які отримані за схемою Ерміта. Доведено, що на однакових сітках та при однакових степенях інтерполяційних поліномів ці два підходи приводять до побудови тотожних поліномів.
Ключові слова: інтерполяційний поліном, ермітова інтерполяція, метод базисних елементів.

Г.Я. ТУЛУЧЕНКО, Т.А. СЕЛУЯНОВА, Н.В. СТАРУН
Херсонский национальный технический университет

ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СХЕМЫ В ЗАДАЧАХ ЭРМИТОВОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В статье выполнен сравнительный анализ свойств интерполяционных полиномов, построенных на основе иерархической схемы Эрмита и по методу базисных элементов. Показано, что интерполяционные полиномы, полученные методом базисных элементов, являются частным случаем иерархических интерполяционных полиномов, полученных по схеме Эрмита. Доказано, что на одинаковых сетках и при одинаковых степенях интерполяционных полиномов эти два подхода приводят к построению тождественных полиномов.
Ключевые слова: интерполяционный полином, эрмитова интерполяция, метод базисных элементов.

H.Ya. TULUCHENKO, T.A. SELUIANOVA, N.V. STARUN
Kherson National Technical University

THE HIERARCHICAL SCHEMES IN THE PROBLEMS OF HERMITE'S INTERPOLATION

In the article the comparative analysis for the properties of interpolation polynomials, which are constructed on the basis of Hermite's hierarchical scheme and on the method of basis elements is completed. It is shown that the interpolation polynomials, which are obtained by the basis element method, are a special case of hierarchical interpolation polynomials, which are obtained by the Hermite's scheme. It is proved that on the identical grids and with the same degrees of interpolation polynomials, these two approaches lead to the construction of an identical polynomials.
Keywords: interpolation polynomial, Hermite interpolation, the method of basic elements.

Постановка проблеми

У літературі з обчислювальних методів відзначається занадто громіздкий вигляд загального виразу інтерполяційного полінома за схемою Ерміта для його практичного застосування [11]. В той же час відомі прийоми на основі застосування матричного числення для переходу від класичної схеми ермітової інтерполяції до її ієрархічної модифікації. Отримувані при цьому інтерполяційні поліноми є тотожними, але розкладеними за різними базисами у просторі поліномів не вище фіксованого степеня [9–10]. Отже, існує нескінченна множина базисів, що складаються із ієрархічних функцій, за якими може бути розкладений інтерполяційний поліном у схемі Ерміта. Реалізація модифікованих схем Ерміта при застосуванні ієрархічних базисів характеризується суттєвим зменшенням об'ємів виконуваних арифметичних операцій.

Таким чином, при розробці інтерполяційних схем без використання апарату матричного числення їх ідентифікація стосовно належності до ієрархічних схем ермітової інтерполяції є не завжди очевидною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В численних роботах Дикусара Н.Д. [1-8] розробляється метод базисних елементів (МБЕ), який на початку свого створення був орієнтований на оптимізацію алгоритму інтерполяції функції одного змінного на заданому відрізку. Надалі метод був узагальнений для розв'язання задач кусочно-поліноміальної апроксимації у різноманітних постановках. Метод базисних елементів позиціонується розробником як такий, що має переваги по оцінкам точності, приводить до зниження складності розрахункових алгоритмів стосовно відомих методів, тощо.

Алгоритм реалізації ермітової інтерполяції описаний практично в усіх посібниках з чисельних методів. Розрахункова схема на основі використання блочних матриць для побудови ієрархічних інтерполяційних поліномів обґрунтовується в роботі [11].

Мета дослідження

Метою дослідження є доведення тотожності інтерполяційних поліномів рівних степенів, що будуються на однакових сітках за методом базисних елементів та за класичною схемою інтерполяції Ерміта.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо задачу побудови ермітової інтерполяції на трьохточковій сітці $\Delta_3^{ab} : x_a < x_0 < x_b$. Не зменшуючи загальності отриманих результатів, будемо вважати, що $x_0 = 0$.

Інтерполяційний поліном Дикусара Н.Д.. У МБЕ інтерполяційний поліном $\varphi_D(x)$ (індекс обрано за прізвищем розробника метода) для функції $f(x)$ (яка є диференційованою потрібну кількість разів) шукається у локальній системі координат на відрізку $[x_a; x_b]$ у вигляді:

$$\varphi_D(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b_j^T} \cdot \mathbf{r_j} = \sum_{j=0}^{m} Q^j \cdot w^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r_j}, \tag{1}$$

де $\mathbf{r_j} = (r_{ja}; \quad r_{jb}; \quad r_{j0})$ – вектор невідомих шуканих коефіцієнтів;

$\mathbf{w} = (w_1; \quad w_2; \quad w_3)$ – вектор базисних елементів у вигляді поліномів другого степеня:

$$w_1 = -\frac{x(x - x_b)}{x_a(x_b - x_a)}; \quad w_2 = \frac{x(x - x_a)}{x_b(x_b - x_a)}; \quad w_3 = \frac{(x - x_a)(x - x_b)}{x_a x_b};$$

$Q = (x - x_a) \cdot x \cdot (x - x_b)$ – допоміжна "зануляюча" кубічна парабола

Особливістю полінома (1) є те, що він має найстарший степінь виключно $(3m + 2)$. Невідомі коефіцієнти $\mathbf{r_j}$ знаходяться із вимоги рівності значень інтерполяційного полінома та значень його похідних в вузлах сітки із відповідними значеннями функції, що інтерполюється, та її похідних:

$$\left(f(x) - \varphi_D(x)\right)^{(j)}\Big|_{x = x_a, x_b, x_0} = 0, \quad j = \overline{0; m}. \tag{2}$$

Особлива структура полінома (1) призводить до того , що кожне рівняння системи (2) містить тільки один невідомий коефіцієнт із вектора $\mathbf{r_j}$.

Звернемо увагу на те, що вимоги (2) співпадають із вимогами до інтерполяційного полінома Ерміта $\varphi_E(\tau)$ з тими ж вузлами $\{x_a, x_0, x_b\}$.

Інтерполяційний поліном Ерміта. Розглянемо класичну схему Ерміта для побудови інтерполяційного полінома, як і у попередньому випадку, степеня $(3m + 2)$ на сітці Δ_3^{ab}. Поліноми степеня не старше $(3m + 2)$ утворюють лінійний простір із стандартним базисом, що складається з мономів $\{x^i\}$, $i = \overline{0; 3m + 2}$. Отже, досліджуваний лінійний простір має вимірність $3 \cdot (m + 1)$.

При реалізації класичної інтерполяційної схеми за Ермітом у кожному вузлі інтерполяції мають бути відомі значення функції, що підлягає наближенню, та значення її похідних. Для нашої досліджуваної сітки з трьома вузлами будемо мати $3 \cdot (m + 1)$ базисні функції:

$$N = \left(N_1(x), N_2(x), \dots, N_{3\cdot(m+1)}(x)\right)^{\mathrm{T}},$$

які утворюють інтерполяційний поліном за правилом:

$$\varphi_E(x) = \left(f_{Val} \;\middle|\; f_{Val}^{(1)} \;\middle|\; f_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; f_{Val}^{(m)} \right) \cdot N, \tag{3}$$

де $\left(f_{Val} \;\middle|\; f_{Val}^{(1)} \;\middle|\; f_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; f_{Val}^{(m)} \right)$ – блочний вектор-рядок із (m+1) блоків зі значеннями функції, що інтерполюється, та її похідних до порядку m в вузлах сітки Δ_3^{ab};

$\left| f_{Val}^{(i)} \right| = \left| f^{(i)}(x_a) \quad f^{(i)}(x_b) \quad f^{(i)}(0) \right|$ – вміст i-ого блоку, $i = \overline{0; m}$.

В статті [10] показано як, знаючи стандартний базис лінійного простору і сітку вузлів інтерполяції, можна побудувати множину базисних функцій, які асоційовані з вузлами сітки:

$$E_{3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)} = C_{3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)} \cdot \left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \;\middle|\; \right),$$

де $C_{3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)}$ – матриця розмірності $3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)$ коефіцієнтів базисних функцій *N*;

$E_{3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)}$ – одинична матриця аналогічної розмірності;

$\left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \right)$ – блочна матриця розмірності $3\cdot(m+1)\times 3\cdot(m+1)$,

X_{Val} – транспонована матриця Вандермонда для вузлів сітки Δ_3^{ab} розмірності $3\cdot(m+1)\times 3$;

$X_{Val}^{(i)}$ – матриці значень *i*-их похідних від функцій стандартного базису в вузлах сітки Δ_3^{ab} розмірності $3\cdot(m+1)\times 3$.

Очевидно, що

$$C = E \cdot \left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \right)^{-1} = \left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \right)^{-1}$$

Тоді базисні функції можуть бути знайдені так:

$$N = \left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \right)^{-1} \cdot X_e,$$

де X_e – вектор-стовпець із функцій стандартного базису;

Твердження. Інтерполяційні поліноми рівних степенів, які отримані за методом базисних елементів (1), та інтерполяційні поліноми, які отримані за схемою Ерміта (3), на однакових сітках є тотожними.

Доведення.

Частина I. Позначимо за D матрицю коефіцієнтів базисних функцій для полінома Дикусара Н.Д.:

$$D = \left(w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad Qw_1 \quad Qw_2 \quad Qw_3 \ldots Q^m w_1 \quad Q^m w_2 \quad Q^m w_3 \right)^T. \tag{4}$$

Як показано далі (у частині II) визначник матриці *D* не дорівнює нулю при виконанні умов задачі. Це означає, що функції (4) утворюють базис лінійного простору поліномів степеня не старше $(3m+2)$. Отже, існує матриця переходу *T* від базису ермітової інтерполяції до базису поліномів Дикусара Н.Д.:

$$T \cdot \left(X_{Val} \;\middle|\; X_{Val}^{(1)} \;\middle|\; X_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; X_{Val}^{(m)} \right)^{-1} = D. \tag{5}$$

Тоді вектор вагових коефіцієнтів інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. може бути отриманий із вектора вагових коефіцієнтів інтерполяційного полінома Ерміта за допомогою формули:

$$\left(r_{0a} \quad r_{0b} \quad r_{00} \ldots r_{ma} \quad r_{mb} \quad r_{m0} \right) = \left(f_{Val} \;\middle|\; f_{Val}^{(1)} \;\middle|\; f_{Val}^{(2)} \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; f_{Val}^{(m)} \right) \cdot T^{-1} \tag{6}$$

Частина II. Нехай $m = 0$, тоді базис лінійного простору інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. складається із трьох поліномів $\{w_1, \quad w_2, \quad w_3\}$. Матриця *D* в цьому випадку має вигляд:

$$D\Big|_{m=0} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_b}{(x_b - x_a)\cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_a} \\ 0 & -\frac{x_a}{(x_b - x_a)\cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_b} \\ 1 & -\frac{x_b + x_a}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} \end{pmatrix}.$$

Її визначник дорівнює $\left\| D\Big|_{m=0} \right\| = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)}$, тобто є відмінним від нуля.

Нехай тепер $m = 1$, тоді базис лінійного простору інтерполяційного полінома Дикусара Н.Д. складається із шести поліномів $\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ Qw_1,\ Qw_2,\ Qw_3\}$. Матриця *D* в цьому випадку має вигляд:

$$D\Big|_{m=1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x_b}{(x_b - x_a)\cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_a}{(x_b - x_a)\cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_b} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{x_b + x_a}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x_b^2}{x_b - x_a} & -\frac{(2x_a + x_b)\cdot x_b}{(x_b - x_a)\cdot x_a} & \frac{x_a + 2x_b}{(x_b - x_a)\cdot x_a} & -\frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_a} \\ 0 & 0 & -\frac{x_a^2}{x_b - x_a} & \frac{(x_a + 2x_b)\cdot x_a}{(x_b - x_a)\cdot x_b} & -\frac{2x_a + x_b}{(x_b - x_a)\cdot x_b} & \frac{1}{(x_b - x_a)\cdot x_b} \\ 0 & x_b \cdot x_a & -2\cdot(x_a + x_b) & \frac{(x_a^2 + 4x_b \cdot x_a + x_b^2)}{x_b \cdot x_a} & -\frac{2\cdot(x_a + x_b)}{x_b \cdot x_a} & \frac{1}{x_b \cdot x_a} \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо матрицю $D\Big|_{m=1}$ на чотири квадратні блоки та застосуємо для обчислення її визначника відому формулу [12, С. 57]:

$$\begin{Vmatrix} D_{11} & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{Vmatrix} = \|D_{11}\| \cdot \|D_{22}\|.$$

Очевидно, що $\|D_{11}\| = \left\| D\Big|_{m=0} \right\| \neq 0$. Безпосереднім обчисленням пересвідчуємося, що визначник $\|D_{22}\|$ є також відмінним від нуля:

$$\|D_{22}\| = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)}.$$

Отже, $\left\| D\Big|_{m=1} \right\| \neq 0$. Кожна наступна матриця $D\Big|_{m}$ коефіцієнтів поліномів $\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ Qw_1,\ Qw_2,\ Qw_3, ..., Q^m w_1,\ Q^m w_2,\ Q^m w_3\}$ утворюється із попередньої $D\Big|_{m-1}$

додаванням до неї трьох рядків із коефіцієнтами поліномів $\{Q^m w_1,\ \ Q^m w_2,\ \ Q^m w_3\}$. Тоді визначник $\left\| D \Big|_m \right\|$ також можна розбити на чотири блоки, де $\|D_{11}\| = \left\| D \Big|_{m-1} \right\| \neq 0$, а у визначнику $\|D_{22}\|$ кожний рядок складається із трьох коефіцієнтів при старших степенях поліномів $\{Q^m w_1,\ \ Q^m w_2,\ \ Q^m w_3\}$. Пропускаючи не складні, але надзвичайно громіздкі перетворення, запишемо вигляд визначника блока D_{22} при довільному значенні $m \in N$:

$$\left\| D_{22} \Big|_m \right\| = \frac{1}{x_a^2 x_b^2 (x_b - x_a)^2} \cdot$$

$$\cdot \left\| \begin{matrix} \left(\frac{1}{2}m(m-1)x_a^2 + m(m+1)x_a x_b + \frac{1}{2}m(m+1)x_b^2\right) & \left(m x_a + (m+1)x_b\right) & 1 \\ \left(\frac{1}{2}m(m+1)x_a^2 + m(m+1)x_a x_b + \frac{1}{2}m(m-1)x_b^2\right) & \left((m+1)x_a + m x_b\right) & 1 \\ \left(\frac{1}{2}m(m+1)x_a^2 + (m+1)^2 x_a x_b + \frac{1}{2}m(m+1)x_b^2\right) & \left((m+1)x_a + (m+1)x_b\right) & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{x_a x_b (x_b - x_a)} \neq 0.$$

Таким чином, доведено, що система поліномів

$$\{w_1,\ \ w_2,\ \ w_3,\ \ Qw_1,\ \ Qw_2,\ \ Qw_3,\ ...,\ Q^m w_1,\ \ Q^m w_2,\ \ Q^m w_3\}$$

утворює базис лінійного простору поліномів степеня не більшого за *3m+2*.

Висновки

У статті доведено, що інтерполяційні поліноми, які побудовані за схемою Ерміта (3) та за методом базисних елементів (1), є тотожними на однакових сітках. Формули (5–6) описують зв'язок між базисами, що використовуються в цих двох випадках. Розрахункова схема, що запропонована д.ф.-м.н. Н.Д. Дикусаром, є за своєю природою ієрархічною і, відповідно, більш ефективною при проведенні уточнюючих досліджень. Матричний підхід, що застосований авторами даної публікації, вимагає виконання значно більшої кількості арифметичних операцій для побудови інтерполяційного полінома, але дозволяє запропоноване доведення зробити наочним.

Відповідно для обох досліджених у статті форм інтерполяційного полінома має місце однакова поточкова оцінка похибки інтерполяції:

$$\left| f(x) - \varphi(x) \right| \leq \frac{\max\left| f^{(3m+3)}(x) \right|}{(3m+3)!} \cdot \left| (x - x_a)^{m+1} (x - x_0)^{m+1} (x - x_b)^{m+1} \right|,\ \ x \in [x_a; x_b].$$

Список використаної літератури

1. Dikoussar N.D. Function Parametrization by using 4-point Transforms / N.D. Dikoussar // Computer Physics Communication. – 1997. – Vol. 99. – PP. 235-254.
2. Дикусар Н.Д. Кусочно-кубическая аппроксимация в режиме автоматического слежения / Н.Д. Дикусар, Ч. Торок. – Дубно: ОИЯИ, 2004. – 19 с. – (Препринт / Объединенный институт ядерных исследований; Р11-2004-187).
3. Dikoussar N. D. Four-Point Transformation Methods in Approximation and the Smoothing Problems / N.D. Dikoussar // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2008. – Vol. 5, № 3. – PP. 317–323.
4. Дикусар Н.Д. Метод базисных элементов / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22. – № 12. – С. 115-136.
5. Дикусар Н.Д. Разложение полинома по кубической и квадратичным параболам / Н.Д. Дикусар // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. – 2010. – № 3(2). – С. 93-100.
6. Дикусар Н.Д. Кусочно-полиномиальная аппроксимация шестого порядка с автоматическим обнаружением узлов / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26. – № 3. – С. 31-48.

7. Дикусар Н.Д. Полиномиальная аппроксимация высоких порядков / Н.Д. Дикусар // Математическое моделирование. – 2015. – Т. 27. – № 9. – С. 89-109.
8. Дикусар Н.Д. Оптимизация решения в задачах в задачах кусочно-полиномиальной аппроксимации / Н.Д. Дикусар. – Дубно: ОИЯИ, 2016. – 14 с. – (Препринт / Объединенный институт ядерных исследований; Р11-2016-85).
9. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
10. Пинежанинов Ф. Базисные функции для конечных элементов [Электронный ресурс] / Ф. Пинежанинов, П. Пинежанинов. – Режим доступа: http://old.exponenta.ru/soft/mathemat/pinega/a1/a1.asp
11. Утешев А.Ю. К задаче полиномиального интерполирования с кратными узлами / А.Ю. Утешев, Г.Ш. Тамасян // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2010. – Серия 10. – Вып. 3. – С. 76-85.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. / Ф.Р. Гантмахер. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.