

УДК 539.3

И.П. БОКОВ, Н.С. БОНДАРЕНКО, Е.А. СТРЕЛЬНИКОВА
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ НАГРУЗОК**

Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной нагрузки, которая распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Используются выражения для внутренних силовых факторов, полученные на базе обобщенной теории в варианте $\{1,0\}$ -аппроксимации. Данная теория учитывает все компоненты тензора напряжений, включая поперечные сдвиговые и нормальные напряжения. Проведены численные исследования, демонстрирующие поведение внутренних силовых факторов для трансверсально-изотропных пластин в зависимости от упругих постоянных трансверсально-изотропного материала.

Ключевые слова: теория $\{m,n\}$ -аппроксимации, напряженно-деформированное состояние, трансверсально-изотропные пластины, локальные нагрузки, изгибающие моменты.

I. P. BOKOV, N. S. BONDARENKO, O. O. STRELNIKOVA
Институт проблем машинобудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ**ПРУЖНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН
ЗА ДІЇ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

Розглянуто задачу про дію на трансверсально-ізоотропну пластину локального навантаження, яке розподілене рівномірно і діє в нормальному до серединної площини напрямку. Використано вирази для внутрішніх силових факторів, отримані на базі узагальненої теорії у варіанті $\{1,0\}$ -апроксимації. Ця теорія враховує всі компоненти тензора напружень, включаючи поперечні зсувні і нормальні напруження. Проведено чисельні дослідження, що демонструють поведінку внутрішніх силових факторів для трансверсально-ізоотропних пластин у залежності від пружних констант трансверсально-ізоотропного матеріалу.

Ключові слова: теорія $\{m,n\}$ -апроксимації, пружно-деформований стан, трансверсально-ізоотропні пластины, локальні навантаження, згинальні моменти.

I. P. BOKOV, N. S. BONDARENKO, E. A. STRELNIKOVA
A. N. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NAS of Ukraine**STRESS-STRAIN STATE OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES UNDER LOCAL LOADS**

A transversal isotropic plate under local load distributed uniformly and acted normally to the middle plane of this plate is considered. Expressions for the internal force factors based on the generalized theory in the variant of $\{1,0\}$ -approximation are used. This theory takes into account all components of the stress tensor, including shear and normal stresses. Numerical studies have been performed demonstrating the behavior of the internal force factors for transversely isotropic plates as a function of the elastic constants of a transversally isotropic material.

Key words: theory of $\{m,n\}$ -approximation, stress-strain state, transversely isotropic plates, local loads, bending moments.

Постановка проблеми

Широкое применение в современной технике композитных материалов, обладающих резкой анизотропией упругих свойств, приводит к необходимости учитывать физико-механические характеристики этих материалов при проведении прочностных расчётов. При расчётах тонкостенных элементов конструкций из таких материалов целесообразным является использование уточнённых теорий пластин и оболочек. Теория $\{m,n\}$ -аппроксимации, основанная на методе И. Н. Векуа разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра [1], позволяет учесть сдвиговую податливость, характерную для большинства композитных материалов. Силовые воздействия относятся к одному из основных видов нагрузки, которым подвергаются объекты и изделия современной промышленности. Эти воздействия могут носить сосредоточенный или локальный характер. Поэтому исследование напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропных пластин при действии локальных силовых нагрузок является актуальным и важным научно-техническим заданием.

Анализ последних исследований и публикаций

Об актуальности рассматриваемой проблемы свидетельствуют её аналитические и численные исследования, проведенные в публикациях [2–5]. В работе [4] рассмотрена задача о действии на тонкую ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределенной по произвольной области. Численно исследовано поведение прогиба пластины при действии внезапно приложенной динамической нагрузки степенного вида, распределенной по круговой площадке. Задача о построении фундаментальных решений системы динамических уравнений теории тонких изотропных оболочек с учетом линейного демпфирования, решена в работе [5]. На основании полученных решений исследована задача о действии на оболочку локальной нагрузки, распределенной по круговой области.

В публикациях [6–8] рассмотрены задачи термоупругости, в которых источники тепла распределены равномерно по локальной области. Работа [6] посвящена исследованию термоупругого состояния локально нагретой ортотропной цилиндрической оболочки, находящейся в условиях теплового контакта с окружающей средой. В [7] решена задача термоупругости для ортотропных сферических оболочек, нагреваемых источником тепла в виде линии и исследовано влияние условий теплообмена на поведение внутренних силовых факторов. В статье [8] предполагается линейное распределение тепла по толщине оболочки и конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. В случае симметричного теплообмена с окружающей средой исследовано поведение внутренних силовых факторов для различных типов оболочек и для пластины.

Цель исследования

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$, которая находится под действием локальной силовой нагрузки. Отнесём пластину к ортогональной системе безразмерных координат x_i ($i = \overline{1,3}$), определенных с точностью до полутолщины пластины h . Будем считать, что граничный контур пластины существенно удален от начала координат. Локальная сила распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Размеры локальной области намного меньше характерного размера пластины.

Цель данной работы состоит в исследовании поведения внутренних силовых факторов для трансверсально-изотропной пластины, которые получены на базе уточненной теории в варианте {1,0}-аппроксимации, в зависимости от упругих постоянных.

Локальный характер нагрузки позволяет использовать для решения поставленной задачи формулу свертки [9]

$$P(\vec{r}) = \iint_{\Omega} E(\vec{r} - \vec{t}) W(\vec{t}) d\Omega, \tag{1}$$

где P – внутренние силовые факторы; E – силовые компоненты фундаментального решения для трансверсально-изотропной пластины, полученные на базе уточненной теории в варианте {1,0}-аппроксимации; Ω – область локального нагружения; \vec{r} и \vec{t} – вектора текущей точки и точки интегрирования соответственно.

Изложение основного материала исследования

В статье [10] было получено фундаментальное решение уравнений статики для трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории в варианте {1,0}-аппроксимации. Переводя внутренние силовые факторы в полярную систему координат и полагая $q_1^* = m_1^* = q_2^* = m_2^* = 0$; $q_3^* = 1$, получим выражения для радиальных и окружных моментов и перерезывающих сил

$$M_r = -\frac{1}{8\pi} \left[2(1+\nu) \ln \frac{\gamma r}{2} + 1 - \nu \right]; \quad M_\varphi = -\frac{1}{8\pi} \left[2(1+\nu) \ln \frac{\gamma r}{2} - 1 + \nu \right];$$

$$H_{r\varphi} = 0; \quad Q_r = -\frac{1}{2\pi r}; \quad Q_\varphi = 0,$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$ – константа Эйлера.

Запишем формулу свертки (1) для таких областей:

1) область Ω_1 – отрезок длины $2a$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат:

$$P(\vec{r}) = \int_{-a}^a E(x_1 - t_1, x_2) W(t_1) dt_1;$$

2) область Ω_2 – круг радиуса r_0 с центром в начале координат:

$$P(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho;$$

3) область Ω_3 – эллипс с полуосями a и b с центром в начале координат:

$$P(\vec{r}) = ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho E(x_1 - \rho \cos \theta, x_2 - \rho \sin \theta) W(\rho, \theta) d\rho.$$

В качестве примера рассмотрим действие силы, равномерно распределенной ($W \equiv 1$) в областях Ω_1 ($a = 3$), Ω_2 ($r_0 = 1$) и Ω_3 ($a = 1, b = 2$). Для данных областей рассчитаны значения внутренних силовых факторов вдоль оси ординат. Численные расчеты проведены для трёх материалов: M_1 – кварц ($\nu = 0,087$), M_2 – алевролит ($\nu = 0,22$) и M_3 – песчаник ($\nu = 0,3484$).

Результаты расчетов в случае силовой нагрузки, распределенной по областям $\Omega_1 - \Omega_3$, представлены на рис. 1–3 соответственно. Кривые 1–3 на всех рисунках отвечают материалам $M_1 - M_3$.

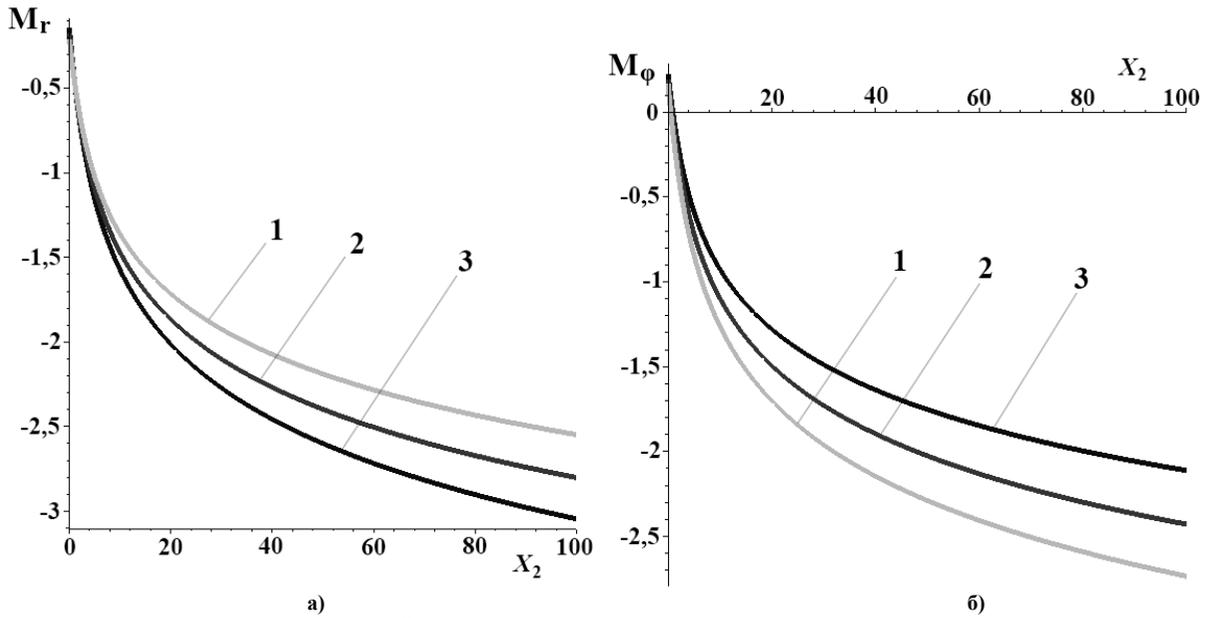


Рис. 1. Область действия нагрузки – отрезок. Внутренние силовые факторы:
а) изгибающий момент M_r
б) изгибающий момент M_ϕ

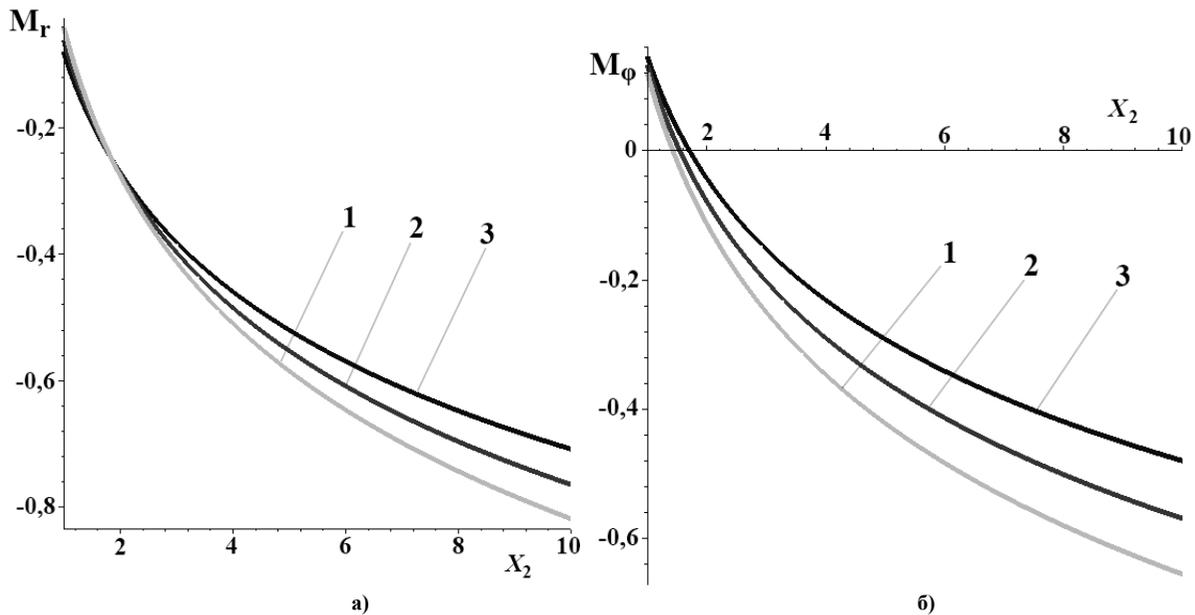


Рис. 2. Область действия нагрузки – круг. Внутренние силовые факторы:
а) изгибающий момент M_r

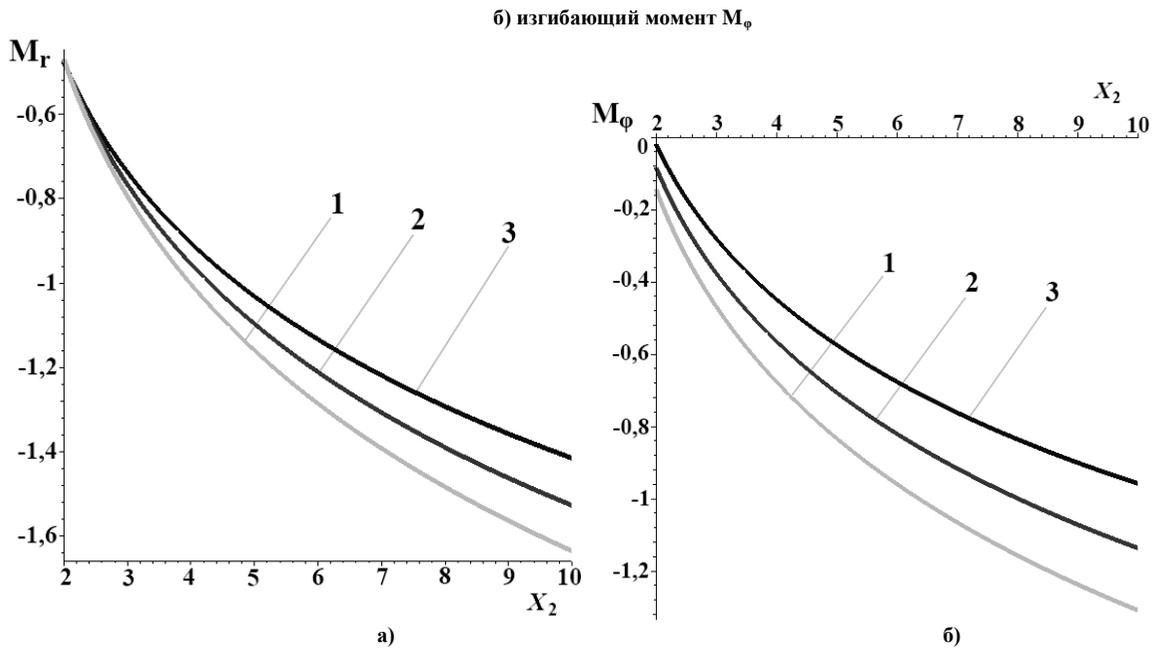


Рис. 3. Область действия нагрузки – эллипс. Внутренние силовые факторы:
а) изгибающий момент M_r
б) изгибающий момент M_ϕ

Численные исследования показали, что при действии нагрузки по области Ω_1 увеличение коэффициента Пуассона приводит к уменьшению значения радиального момента M_r . В случае действия нагрузки по областям Ω_2 , Ω_3 наблюдается обратная зависимость. В то время как значения окружного момента M_ϕ увеличиваются с ростом значения ν . Упругие постоянные трансверсально-изотропного материала не оказывают влияния на перерезывающие силы $Q_{r,\phi}$.

Выводы

Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Для решения данной задачи использован метод фундаментальных решений и формула свертки. Проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и геометрии области локального нагружения на внутренние силовые факторы. Проведенные численные исследования показали, что в общем случае с ростом коэффициента Пуассона значения радиальных и окружных моментов увеличиваются. Таким образом, можно заключить, что при расчете локального напряженно-деформированного состояния тонкостенных пластин существенно важным является учет упругих свойств трансверсально-изотропных материалов.

В перспективе описанная в работе методика может быть использована при рассмотрении локальных силовых нагрузок, действующих по произвольному закону внутри произвольной области. Также возможно изучение напряженно-деформированного состояния пластин на базе обобщенной теории $\{m,n\}$ -аппроксимации для случая удержания большего количества членов рядов разложений искомых функций в направлениях, нормальных к плоскости изотропии.

Список использованной литературы

1. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К. : Наук. думка, 1982. – 296 с.
2. Горшков А. Г. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, А. Г. Старовойтов, А. В. Яровая. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Khov N. An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions / N. Khov, W. L. Li, R. F. Gibson // Composite Structures. – 2009. – V. 90, № 4. – P. 474-481.
4. Шевченко В. П. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – ISSN 1683-4720. – С. 207–215.
5. Ветров О. С. Динамика тонких оболочек с учетом демпфирования под действием локальных нагрузок / О. С. Ветров, В. П. Шевченко, В. Ф. Русаков // Вестник Запорожского национального университета. – 2015. – № 2. – С. 28–36.

6. Гольцев А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии / А. С. Гольцев // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С.139–144.
7. Гольцев А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 76-82.
8. Шевченко В. П. Термоупругость локально нагретых ортотропных оболочек / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2001. – Вип. 4, Т. 1. – С. 208-213.
9. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В. П. Шевченко; под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского // Механика композитов. – Киев, 1998. – Т. 7: Концентрация напряжений. – С. 159–196.
10. Bokov I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – 2/7 (86). – P. 4–12.