УДК 536.24

Ю.В. БРАЗАЛУК, А.И. ГУБИН, Д.В. ЕВДОКИМОВ, М.А. СТОЯНОВСКИЙ
Днепровский национальный университет имени Олеся Гончара

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АБЛИРУЮЩИХ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ

Аблирующие покрытия являются основой систем тепловой защиты спускаемых аппаратов в ракетно-космической технике, а также ряда других устройств, применяемых в экстремальных температурных условиях. Расчет подобных покрытий представляет собой значительную трудность из-за сложности процессов, протекающих в аблирующем покрытии. С целью создания эффективных методов расчета рассматриваемых объектов была предложена асимптотическая математическая модель процессов тепломассообмена в теплозащитных покрытиях. На модельных задачах была разработана и протестирована расчетная схема для анализа и проектирования аблирующих теплозащитных покрытий.

Ключевые слова: теплозащитное покрытие, абляция, асимптотический подход, метод малого параметра, краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, задача Коши.

Ю.В. БРАЗАЛУК, О.І. ГУБІН, Д.В. ЄВДОКИМОВ, М.А. СТОЯНОВСЬКИЙ
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

АСИМПТОТИЧНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АБЛЯЦІЙНИХ ТЕПЛОЗАХИСНИХ ПОКРИТТІВ

Аблюючі покриття є основою систем теплового захисту апаратів, що повертаються, у ракетно-космічній техніці, а також ряду інших пристроїв, які застосовуються в екстремальних температурних умовах. Розрахунок подібних покриттів являє собою значні труднощі через складність процесів, що протікають в аблюючому покритті. З метою створення ефективних методів розрахунку розглянутих об'єктів була запропонована асимптотична математична модель процесів тепломасообміну в теплозахисних покриттях. На модельних задачах була розроблена і протестована розрахункова схема для аналізу і проектування аблюючих теплозахисних покриттів.

Ключові слова: теплозахисне покриття, абляція, асимптотичний підхід, метод малого параметра, крайова задача для звичайного диференціального рівняння, задача Коші.

IU.V. BRAZALUK, O.I. GUBIN, D.V. YEVDOKYMOV, M.A. STOIANOVSKYI
Oles Honchar Dnipro National University

ASYMPTOTIC MATHEMATICAL MODEL OF ABLATING THERMAL PROTECTIVE COATINGS

The ablating coatings are the basis of the thermal protection systems of the re-entry space vehicles in missile and space technologies, as well as in a number of other devices used in extreme thermal conditions. Calculations of such coatings present significant difficulties because of the complex processes occurring in the ablating thermal protection coating. In order to create effective methods for calculation of the objects under consideration, an asymptotic mathematical model of heat and mass transfer processes in thermal protection coatings was proposed. A computational scheme was developed and tested on model problems for the analysis and design of ablating thermal protection coatings.

Key words: thermal protection coating, ablation, asymptotic approach, small parameter method, boundary value problem for an ordinary differential condition, Cauchy problem.

Постановка проблемы

Трудно представить современный мир без разнообразных систем теплоизоляции и терморегулирования – они согревают нас в холода и не дают перегреться в жару, благодаря им сохраняется тепло, что помогает бороться с энергетическим кризисом. Однако есть один класс систем теплозащиты, где от эффективности такой системы зависят не просто комфортные условия функционирования или эффективность оборудования, а выживаемость изделий в целом. Речь идет о неотъемлемой части современной ракетно-космической техники – спускаемых аппаратах космических кораблей, которые при движении через атмосферу с большими сверхзвуковыми скоростями подвергаются столь интенсивному аэродинамическому нагреву, что нуждаются в исключительно высокоэффективных системах тепловой защиты. Учитывая, что без подобной тепловой защиты спускаемый аппарат просто разрушился бы, можно сделать вывод об актуальности тематики настоящей статьи, посвященной расчету именно таких систем тепловой защиты. В отличие от традиционных теплозащитных покрытий, призванных, в первую очередь, уменьшать тепловой поток к защищаемому аппарату на протяжении длительного промежутка времени, их аналогам, установленным на спускаемых аппаратах, надлежит в течение относительно короткого промежутка времени локализовать чрезвычайно большое количество теплоты, подвергаясь одним из самых высоких используемых в технике тепловых потоков. Вследствие указанного обстоятельства традиционные схемы тепловой защиты оказываются малоэффективными для спускаемых аппаратов. Среди альтернативных подходов наиболее эффективными и перспективными считаются аблирующие теплозащитные покрытия. Поскольку возможности исследования теплозащитных покрытий путем лабораторного или полетного экспериментов существенно ограничены из-за технических трудностей осуществления и неприемлемо высокой стоимости, особенно для полетного эксперимента, преимущественным способом изучения принципов функционирования аблирующих покрытий является математическое и численное моделирование. Однако, совершенно ясно, что физико-химические процессы, происходящие при высокотемпературной абляции, столь сложны и многоплановы, что не приходится надеяться на удачное математическое и численное моделирование рассматриваемого явления при помощи одних лишь традиционных методов вычислительного тепломассообмена. На протяжении всей истории развития в ракетно-космической технике действует жесткое требование минимального веса всех конструкций и систем летательного аппарата, а это означает, что теплозащитное покрытие должно быть максимально тонким. Последнее обстоятельство порождает многомасштабность, которая проявляется в значительном различии (на несколько порядков) характерных размеров теплозащитного покрытия в перпендикулярном и продольном направлениях. В результате, тепловые потоки в перпендикулярном и продольном относительно слоя направлениях могут существенно разниться (на несколько порядков), что весьма непохоже на традиционные задачи теории теплопроводности. Все специфические вычислительные проблемы, связанные с многомасштабными задачами, в полной мере имеют место и в рассматриваемом случае. Как правило, для преодоления подобных трудностей расчета используются асимптотические подходы, что и будет сделано в настоящей работе. Указанные выше соображения наглядно демонстрируют не только актуальность выбранного направления научных исследований, о чем уже говорилось выше, но и безусловную актуальность развиваемого здесь подхода, основанного на асимптотическом анализе неасимптотически тонких теплозащитных покрытий.

Следует отметить, что асимптотический подход, в том числе в задачах теории теплопроводности и теории тепломассообмена, весьма популярен на протяжении уже достаточно долгого времени. Особенно велика была его популярность в пятидесятые – шестидесятые годы минувшего века. Но, уже начиная с семидесятых, асимптотические методы, как и все аналитические подходы, постепенно вытеснялись численными алгоритмами, которые были универсальнее и производительнее. Современный взгляд на асимптотические алгоритмы существенно отличен: если в середине прошлого века асимптотический подход считался мощным приближенным методом, то в настоящее время он чаще трактуется как специфический прием, упрощающий дальнейшую численную реализацию. В целом, авторы настоящей статьи придерживаются второй точки зрения.

Анализ последних исследований и публикаций

Задача об аблирующем теплозащитном покрытии, равно как и другие задачи о теплозащитных покрытиях спускаемых аппаратов, отнюдь не нова – она возникла на заре космонавтики, то есть, в пятидесятые – шестидесятые годы прошлого века. Учитывая высокую актуальность рассматриваемых систем тепловой защиты для самых разнообразных областей техники и технологий и, в первую очередь, ракетно-космической техники, не приходится удивляться тому, что за прошедший весьма длительный период времени накоплена значительная литература, посвященная данной проблематике. К счастью, наличие трех глубоких и обширных монографий Ю.В. Полежаева [1 – 3], содержащих достаточно полные обзоры по упомянутой проблематике, избавляет от необходимости приводить здесь полный обзор соответствующих работ и сравнительный анализ различных типов покрытий. Отметим только популярность аблирующих теплозащитных покрытий в практике проектирования спускаемых аппаратов, обширный накопленный экспериментальный (в том числе и результаты полетных экспериментов) и наблюдательный материал, но в то же время некоторую скудость расчетных средств теоретического анализа.

Хотя мысль о совместном применении асимптотических и численных методов высказывалась неоднократно на протяжении длительного промежутка времени, в том числе и в специализированных монографиях [4, 5], касающихся решения краевых задач теории тепломассообмена при помощи асимптотических методов, реальное применение в расчетных методиках эта идея нашла относительно недавно [6], а полностью такой подход в применении к тонкому покрытию описан лишь в работе [7]. Таким образом, не приходится говорить о сколько-нибудь широком использовании подобных расчетных схем в современной вычислительной практике, что ставит дополнительную задачу разработки соответствующих алгоритмов.

В качестве численного метода, дополняющего аналитический подход, в настоящей работе использовался метод граничных элементов. Это хорошо известный метод [8, 9], его достоинства и недостатки подробно проанализированы в работах [10, 11]. Среди достоинств данного численного подхода высокая точность, эффективность при решении задач в областях сложной геометрической формы, эффективность при решении линейных краевых задач эллиптического типа, а к его недостаткам относятся существенные трудности, возникающие при решении нелинейных и неоднородных задач.

Формулирование целей исследования

В силу изложенных выше фактов и описанных обстоятельств, становится очевидной основная цель настоящей работы – построение адекватной и, по возможности, эффективной расчетной схемы для теоретического и прикладного количественного анализа процессов функционирования аблирующих теплозащитных покрытий. Разрабатываемая расчетная схема должна соответствовать ряду требований, проистекающих, в первую очередь, из технических и технологических особенностей исследуемого класса теплофизических систем, а именно: корректный учет тонкости теплозащитного покрытия, то есть, преодоление проблем, связанных с многомасштабностью задачи, надлежащим образом; возможность включения в рассмотрение широкого спектра физических, механических и физико-химических явлений без кардинального изменения структуры применяемых математических моделей и расчетной схемы в целом; минимальное необходимое время расчета и возможность проведения грубых оценочных расчетов с невысокой точностью, но качественно адекватными результатами для сокращения времени проектирования, поскольку расчет систем тепловой защиты спускаемых аппаратов входит составной частью в разработку конструктивно-компоновочных схем изделий ракетно-космической техники, которая требует многократных, многовариантных расчетов системы в целом; потенциальная возможность оптимизации теплозащитных покрытий с учетом параметров внешнего теплового воздействия для достижения минимальной массы изделия и потенциальная возможность решения обратных задач для улучшения и углубления понимания процессов, протекающих в аблирующем покрытии, что может послужить его дальнейшему совершенствованию.

Достичь поставленных в настоящей работе целей ее авторы предполагают при помощи асимптотических подходов, для чего целесообразно решить следующие задачи:

– сформулировать модельную задачу о теплопроводности в неасимптотически тонком слое, состоящем из материала, теплофизические свойства которого существенно зависят от температуры, покрывающем массивное тело, вообще говоря, произвольной формы, подверженное высокоинтенсивному внешнему термическому воздействию, которое, в свою очередь, вызывает фазовый переход на поверхности слоя;
– применить к сформулированной модельной задаче асимптотический подход и проанализировать свойства полученной асимптотической математической модели;
– разработать методы решения полученных асимптотических краевых задач;
– применить метод граничных элементов для расчета (при необходимости) поля температур в защищаемом теле.

Следует отметить, что авторы намеренно не включили в число целей настоящей статьи и не внесли в список поставленных задач расчеты конкретных теплозащитных покрытий, дабы не отягощать предлагаемую работу техническими подробностями и чрезвычайно сложными вопросами природы, структуры и количественных характеристик внешнего термического воздействия.

Основной материал исследования

Поскольку применение к исходной постановке асимптотического подхода является чистой формулировкой задачи, но, в то же время, является и неотъемлемой частью процедуры решения, целесообразно изложить постановку задачи и метод решения совместно, не разрывая их в различные структурные части статьи.

Чтобы избежать путаницы с обозначениями будем здесь придерживаться системы обозначений и терминологии, принятых в статье [7], с учетом необходимых дополнений, связанных со спецификой рассматриваемой задачи. Итак, поле температур в неасимптотически тонком слое описывается уравнением теплопроводности

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\lambda(T)\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial T}{\partial \xi_1}\right)+\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\lambda(T)\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial T}{\partial \xi_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\lambda(T)\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial T}{\partial \xi_3}\right)\right], \tag{1}$$

где T – температура в данной точке слоя; $c(T)$ – теплоемкость материала слоя; $\rho(T)$ – плотность материала слоя; $\lambda(T)$ – теплопроводность материала слоя; ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координаты, отсчитываемые в некоторой криволинейной ортогональной системе (как правило, и для дальнейшего анализа это будет наиболее удобным вариантом, локальную систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 связывают с поверхностью исследуемого тела, в данном случае целесообразно, чтобы поверхность защищаемого массивного тела, она же внутренняя поверхность теплозащитного слоя, соответствовала уравнению $\xi_1=0$, а ось $O\xi_1$ была направлена по нормали к этой поверхности, направления $O\xi_2$ и $O\xi_3$ касательны к поверхности $\xi_1=0$ и взаимно ортогональны); H_1, H_2, H_3 – соответствующие коэффициенты Ляме [13]; τ – время. Уравнение (1) должно быть дополнено начальными и граничными условиями. В начальный момент времени

$$T(\tau = 0) = T_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \tag{2}$$

на внешней границе:

$$T\big|_{\Gamma_{out}} = T_{p.t.}, \tag{3}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{out}} = q_{out}, \tag{4}$$

где $T_{p.t.}$ – температура фазового перехода, q_{out} – некоторый внешний тепловой поток на внешней границе Γ_{out}. Пусть в системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 поверхность Γ_{out} задана уравнением

$$\xi_1 = \delta(\tau, \xi_2, \xi_3), \tag{5}$$

где δ – текущая толщина теплозащитного слоя. Пусть

$$\delta^* = \max \delta(\tau = 0), \tag{6}$$

тогда величину δ^* можно считать поперечным линейным масштабом теплозащитного слоя. Линейный масштаб теплозащитного слоя в тангенциальном направлении совпадает с характерным линейным размером защищаемого тела, обозначим его через L. Очевидно, что

$$\delta^* << L, \tag{7}$$

в силу требования минимального веса. Рассмотрим граничные условия на внутренней поверхности теплозащитного слоя. Таковые граничные условия должны быть поставлены в зависимости от физической природы защищаемого тела. Поскольку геометрия и свойства защищаемых объектов могут варьироваться в весьма широких пределах, произвести исчерпывающую систематизацию этих свойств представляется весьма затруднительным, поэтому ограничимся анализом двух предельных случаев.

1. *Интегральная теплоемкость*. Предполагается, что внутри спускаемого аппарата находится жидкая или газообразная среда, подверженная интенсивной циркуляции, благодаря чему с достаточной степенью точности можно считать, что температура внутри защищаемого пространства везде одинакова и равна $T_в(\tau)$. Тогда изменение количества теплоты внутри защищаемого объема

$$\frac{dQ}{d\tau} = \int\limits_{\Gamma_{in}} q_{in} dS. \tag{8}$$

Учитывая, что

$$dQ = c_в dT_в, \tag{9}$$

из (8) получаем:

$$\frac{dT_в}{d\tau} = \frac{1}{c_в}\int\limits_{\Gamma_{in}} q_{in} dS, \tag{10}$$

$$T_в(\tau = 0) = T_{в0}, \tag{11}$$

где $c_в$ – теплоемкость защищаемого объема, которую можно принять постоянной.

Задача Коши (10), (11) легко решается аналитически или численно, но, учитывая, что решение этой задачи войдет неотъемлемой составной частью в более общий процесс решения, то предпочтительнее использовать численную процедуру. Для температуры теплозащитного слоя на его внутренней поверхности можно поставить граничное условие

$$T\big|_{\Gamma_{in}} = T_в(\tau), \tag{12}$$

а q_{in} искать из решения краевой задачи для уравнения (1).

2. *Твердое тело*. Случай, когда аблирующее покрытие защищает теплопроводное твердое тело, является традиционным в теории теплопроводности. Если теплозащита работает надлежащим образом, то перепады температур таковы, что поле температур внутри защищаемого тела можно описать линейным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_в}{\partial \tau} = a_в div(grad\, T_в), \tag{13}$$

при этом уравнение (13) вполне можно записывать в декартовой ортогональной системе координат, а не в системе ξ_1, ξ_2, ξ_3.

В данном случае на внутренней поверхности теплозащитного слоя следует поставить граничные условия четвертого рода (условия идеального теплового контакта):

$$T\big|_{\Gamma_{in}} = T_{в}\big|_{\Gamma_{in}}, \tag{14}$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{in}} = \lambda_{в} \frac{\partial T_{в}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{in}}, \tag{15}$$

где $\lambda_{в}$ – теплопроводность защищаемого твердого тела.

Постановку задачи следует завершить условием Стефана, которое является естественным следствием уравнения теплового баланса на границе Γ_{out}:

$$q_{ext} - q_{out} = q_{p.t.}, \tag{16}$$

где q_{ext} – тепловое воздействие окружающей среды (с учетом, разумеется, теплового излучения в окружающую среду) на поверхность теплозащитного покрытия; величина q_{out}, определенная формулой (4), – тепловой поток, уходящий внутрь слоя; $q_{p.t.}$ – тепловой эффект фазового перехода, определенный как

$$q_{p.t.} = -\rho \chi \frac{\partial \delta}{\partial \tau}; \tag{17}$$

χ – скрытая теплота фазового перехода. Тогда условие Стефана:

$$q_{ext} - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_{out}} = -\rho \chi \frac{\partial \delta}{\partial \tau}. \tag{18}$$

Дальнейшее изложение способа решения описанной задачи предварим предположением о достаточной гладкости границ Γ_{out}, Γ_{in} и об ограниченности коэффициентов Ляме H_1, H_2, H_3.

Обезразмерим уравнение (1) и соответствующие условия однозначности. При этом характерным размером в направлении оси ξ_1 естественно выбрать величину δ^* (6), а вдоль осей $O\xi_2, O\xi_3$ характерный размер тела L. Обезразмеривание температуры проведем традиционным способом

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{p.t.} - T_0}, \tag{19}$$

безразмерные координаты:

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\xi_1}{\delta^*}; \quad \bar{\xi}_2 = \frac{\xi_2}{L}; \quad \bar{\xi}_3 = \frac{\xi_3}{L}. \tag{20}$$

Теплопроводность λ обезразмерим некоторой величиной λ_0, имеющей соответствующую размерность, теплоемкость c величиной c_0, а плотность ρ величиной ρ_0. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{c}\bar{\rho}\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3}\Bigg[\frac{L^2}{\delta^{*2}}\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_1}\left(\bar{\lambda}\,\frac{\bar{H}_2\bar{H}_3}{\bar{H}_1}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_2}\left(\bar{\lambda}\,\frac{\bar{H}_1\bar{H}_3}{\bar{H}_2}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}_3}\left(\bar{\lambda}\,\frac{\bar{H}_1\bar{H}_2}{\bar{H}_3}\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\xi}_3}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{21}$$

где, как обычно, число Фурье

$$Fo = \frac{a_0\,\tau}{L^2}; \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0\,\rho_0}. \tag{22}$$

Вообще говоря, коэффициенты Ляме могут быть метрическими величинами и при обезразмеривании существенно изменяться, но здесь и далее полагаем, что обезразмеренные коэффициенты Ляме $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3$ просто останутся конечными, и для каждой конкретной системы координат вопрос об обезразмеривании коэффициентов Ляме следует рассматривать отдельно.

Отметим, что в уравнении (21) можно выделить малый параметр (в силу (7))

$$\varepsilon = \frac{\delta^{*2}}{L^2}, \tag{23}$$

откуда

$$\varepsilon \bar{c}\bar{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial Fo}=\frac{1}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_1}\left(\bar{\lambda}(\theta)\frac{\bar{H}_2\bar{H}_3}{\bar{H}_1}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\xi}_1}\right)+ \\ +\frac{\varepsilon}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_2}\left(\bar{\lambda}(\theta)\frac{\bar{H}_1\bar{H}_3}{\bar{H}_2}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\xi}_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_3}\left(\bar{\lambda}(\theta)\frac{\bar{H}_1\bar{H}_2}{\bar{H}_3}\frac{\partial\theta}{\partial\bar{\xi}_3}\right)\right]. \quad (24)$$

Начальные и граничные условия обезразмериваются следующим образом:

$$\theta(Fo=0)=0, \quad (25)$$

$$\theta\big|_{\Gamma_{in}}=\theta_{in}, \quad (26)$$

$$\theta\big|_{\Gamma_{out}}=\theta_{out} \quad (27)$$

и так далее.

Поскольку уравнение (24) содержит разные по порядку величины (по степеням ε), то естественно отыскивать решение задачи в виде

$$\theta=\theta_0+\varepsilon\theta_1+\varepsilon^2\theta_2+\ldots+\varepsilon^n\theta_n+\ldots \quad (28)$$

Подставляя разложение (28) в уравнение (24) и приравнивая 0 сумму членов при одинаковых степенях ε , получим:

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_1}\left(\bar{\lambda}(\theta_0)\frac{\bar{H}_2\bar{H}_3}{\bar{H}_1}\frac{\partial\theta_0}{\partial\bar{\xi}_1}\right)=0\,, \quad (29)$$

$$\frac{1}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3}\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_1}\left(\bar{\lambda}(\theta_0)\frac{\bar{H}_2\bar{H}_3}{\bar{H}_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\bar{\xi}_1}\right)=\bar{c}(\theta_0)\bar{\rho}(\theta_0)\frac{\partial\theta_0}{\partial Fo}- \\ -\frac{1}{\bar{H}_1\bar{H}_2\bar{H}_3}\left[\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_2}\left(\bar{\lambda}(\theta_0)\frac{\bar{H}_1\bar{H}_3}{\bar{H}_2}\frac{\partial\theta_0}{\partial\bar{\xi}_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{\xi}_3}\left(\bar{\lambda}(\theta_0)\frac{\bar{H}_1\bar{H}_2}{\bar{H}_3}\frac{\partial\theta_0}{\partial\bar{\xi}_3}\right)\right], \quad (30)$$

…………………

Вообще говоря, начиная с первого приближения, в правой части могут появиться члены, порожденные зависимостями $c,\ \rho,\ \lambda$ от θ , но в практически важных задачах они не играют существенной роли. Очевидно, что решение уравнения (29) не зависит от начальных условий. Физически это означает, что тонкий слой быстро прогревается до равновесной температуры. Подстановка разложения (28) в граничные условия выполняется элементарно, например

$$\theta_0\big|_{\Gamma_{in}}=\theta_{in}, \quad (31)$$

$$\theta_1\big|_{\Gamma_{in}}=0, \quad (32)$$

…………………

$$\theta_0\big|_{\Gamma_{out}}=\theta_{out}, \quad (33)$$

$$\theta_1\big|_{\Gamma_{out}}=0, \quad (34)$$

…………………

и так далее.

Заметим, что уравнение (29) элементарным интегрированием сводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными, и, будучи дополнено условиями (31), (33), образует краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, которое может быть проинтегрировано в квадратурах. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие в последующих приближениях, в принципе, тоже могут быть проинтегрированы в квадратурах, однако вычисление производных по времени и по тангенциальным координатам, входящих в правые части последующих приближений, от сечения к сечению чрезмерно громоздко. В то же время применение численного подхода устраняет многие вычислительные трудности.

Различным членам разложения (28) можно поставить в соответствие различные положения границы Γ_{out} , если ее обезразмеренную координату $\bar{\delta}=\delta/\delta^*$ представить в виде

$$\bar{\delta}=\bar{\delta}_0+\varepsilon\bar{\delta}_1+\varepsilon^2\bar{\delta}_2+\ldots+\varepsilon^n\bar{\delta}_n+\ldots \quad (35)$$

Подставив разложение (35) в обезразмеренное условие Стефана (18)

$$\overline{q}_{ext} - f_\lambda \,\overline{\lambda}(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial \overline{n}} = -\frac{\partial \overline{\delta}}{\partial \tau_{St}}, \tag{36}$$

где $\overline{q}_{ext}$ – тепловой поток, обезразмеренный характерным тепловым потоком q^*;

$$f_\lambda = \frac{\lambda_0 \left(T_{p.t.} - T_0\right)}{q^* \delta^*};$$

$$\tau_{St} = \frac{\tau\, q^*}{\rho \chi \delta^*},$$

получим:

$$\overline{q}_{ext} - f_\lambda \,\overline{\lambda}(\theta_0)\frac{\partial \theta_0}{\partial \overline{n}} = -\frac{\partial \overline{\delta}_0}{\partial \tau_{St}}, \tag{37}$$

$$f_\lambda \,\overline{\lambda}(\theta_0)\frac{\partial \theta_1}{\partial \overline{n}} = \frac{\partial \overline{\delta}_1}{\partial \tau_{St}}, \tag{38}$$

…………………

Дополнив уравнения (37), (38), … начальными условиями, получим задачу Коши, описывающую процесс абляции.

Расчет системы тепловой защиты в зависимости от вида защищаемого тела, указанного выше, сводится к пошаговому процессу, в котором внутренняя температура либо определяется из решения уравнения (8), либо требует включения в расчет краевой задачи для уравнения (13), которая также может быть решена пошаговым по времени методом. При обезразмеривании в задаче возникают разные масштабы времени $\tau,\ Fo,\ \tau_{St}$, поэтому вопрос о выборе шага по времени представляется достаточно нетривиальным и должен решаться с учетом соотношений указанных масштабов.

Понятно, что при численной реализации границы Γ_{out} и, соответственно, Γ_{in} следует разбить на части, подобные граничным элементам, и на каждой из этих частей проводить процедуру асимптотического решения. Этим и обусловлено стремление решать задачу теплопроводности для защищаемого тела методом граничных элементов [8, 9]. Кроме того, метод граничных элементов обеспечивает высокую точность численного решения поставленной задачи и удобство при работе с областями сложной геометрической формы. Для рассматриваемого класса расчетов можно применить традиционный вариант метода граничных элементов. При использовании аналитических решений асимптотических краевых задач учет наличия теплозащитного слоя в первом приближении сводится к модификации граничных условий в методе граничных элементов.

Выводы

Предложенная асимптотическая математическая модель, безусловно, является более полной и точной, чем традиционно применяемые схемы инженерного расчета аблирующих теплозащитных покрытий. Возможность использовать предложенный асимптотический подход вместе с методом граничных элементов позволяет надеяться на создание общего вычислительного алгоритма более высокой точности и эффективности по сравнению с другими численными методами, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов. Разумеется, используемые на практике покрытия имеют более сложную структуру, нежели предполагалась в вышеописанной модели, например, большая часть современных теплозащитных покрытий выполняются из композитных материалов, однако, если рассматривать предложенный здесь подход в качестве части общей расчетной схемы по определению тепловых режимов головных частей ракет и спускаемых аппаратов, то его эффективность вполне оправдывает подобные упрощения.

Перспективы дальнейших исследований в данном случае совершенно очевидны и состоят в следующем: усложнение модели материала теплозащитного покрытия, поскольку предложенный асимптотический подход, вообще говоря, распространяется и на более сложные модели теплопроводности в жертвенном слое; разработка прикладного программного обеспечения для использования в практических расчетах; с математической точки зрения, было бы желательно исследовать сходимость получаемых в процессе решения асимптотических последовательностей краевых задач, особенно вблизи угловых точек, если таковые имеются.

Полученные результаты могут быть использованы не только в ракетно-космической технике, но и в металлургии, энергетике и других отраслях, где применяются высокотемпературные процессы.

Список использованной литературы

1. Полежаев Ю.В. Тепловая защита / Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич. – М.: «Энергия», 1976. – 392 с.
2. Панкратов Б.М. Взаимодействие материалов с газовыми потоками / Б.М. Панкратов, Ю.В. Полежаев, А.К. Рудько. – М.: Машиностроение, 1975. – 224 с.
3. Полежаев Ю.В. Тепловое разрушение материалов / Ю.В. Полежаев, Г.А. Фролов. – К.: Изд-во ИПМ НАНУ, 2005. – 288 с.
4. Зино И.Е. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости / И.Е. Зино, Э.А. Тропп. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
5. Федоткин И.М. Асимптотические методы в задачах тепломассопереноса: / И.М. Федоткин, А.М. Айзен. – К.: Наукова думка, 1975. – 252 с.
6. Евдокимов Д.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Н. Ивасишина, А.А. Кочубей, Н.В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. – С. 141-156.
7. Бразалук Ю.В. Об одной задаче теории теплоизоляции / Ю.В. Бразалук, А.И. Губин, Д.В. Евдокимов, О.А. Коваленко // Системные технологии. Региональный межвузовский сборник научных работ. – Выпуск 3 (104). – Днепропетровск, 2016. – С. 45-56.
8. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
9. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
10. Поляков Н.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. / Часть 1. Линейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 7-25.
11. Поляков Н.В. Вычислительная теория потенциала. Современное состояние и перспективы использования в механике сплошной среды. / Часть 2. Нелинейные задачи / Н.В. Поляков, Д.В. Евдокимов // Вісник Дніпропетровського університету. Сер. Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 25-42.
12. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: “Высшая школа”, 1982. – т. 1. – 327 с., т. 2. – 304 с.
13. Борисенко А.И. Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А.И. Борисенко, И.Е. Тарапов. – Х.: Вища школа, 1986. – 216 с.