

УДК 532.51:536.24

А.И. БРУНЕТКИН

Одесский национальный политехнический университет

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ**

Вместо упрощения дифференциальной, и соответственно сложной, математической модели до уровня возможности ее решения, рассматривается описание исследуемого процесса с помощью общих интегральных (наиболее простых) балансовых соотношений законов сохранения с последующей их детализацией (усложнением) до уровня необходимой точности получаемого решения. Возможности такого подхода проиллюстрированы на примерах: решения задач определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью; решения задачи прогрева тел различной формы (бесконечная пластина, бесконечный цилиндр, шар).

Ключевые слова: интегральный подход, динамика жидкости, нестационарные задачи нагрева тел, критерии подобия, числа подобия.

О.І. БРУНЕТКІН

Одеський національний політехнічний університет

ИНТЕГРАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Замість спрощення диференціальної, і відповідно складної, математичної моделі до рівня можливості її рішення, розглядається опис досліджуваного процесу за допомогою загальних інтегральних (найбільш простих) балансових співвідношень законів збереження з подальшою їх деталізацією (ускладненням) до рівня необхідної точності одержуваного рішення. Можливості такого підходу проілюстровані на прикладах: рішення задач визначення власної частоти коливань рідини з вільною поверхнею; рішення задачі прогріву тіл різної форми (нескінченна пластина, нескінченний циліндр, куля).

Ключові слова: інтегральний підхід, динаміка рідини, нестационарні задачі нагріву тіл, критерії подібності, числа подоби.

A.I. BRUNETKIN

Odessa National Polytechnic University

INTEGRATED SOLUTIONS FOR DYNAMICS OF THERMOPHYSICAL PROCESSES

Instead of simplifying the differential, and correspondingly complex, mathematical model to the level of the possibility of solving it, we consider the description of the process under investigation with the help of general integral (simplest) balance relationships of conservation laws with their subsequent specification (complication) to the level of necessary accuracy of the solution obtained. The possibilities of this approach are illustrated by examples: solving problems of determining the natural oscillation frequency of a fluid with a free surface; Solution of the problem of heating bodies of various shapes (an infinite plate, an infinite cylinder, a ball).

Keywords: Integrated approach - fluid dynamics - dependent problems of heating bodies - similarity criteria - the number of similarities.

Постановка проблеми

Изменение исследуемых параметров во времени и в пространстве рассматривается исследователями как необходимость записи исходной математической модели в дифференциальной форме. Назовем такой подход «дифференциальным». В дальнейшем усилия сосредотачиваются на упрощении модели с сохранением определенной степени адекватности описания исследуемого процесса. Проводятся минимально возможные упрощения, позволяющие получить решения тем или иным способом. Развитость математического аппарата и компьютерной техники позволяют получать решения, во всяком случае численные, сложных моделей. Это ведет к учету тонких явлений. В ряде случаев это необходимо, более того, является целью исследования. Но зачастую их учет не оказывает существенного влияния на величину параметров основного исследуемого процесса, в то же время являясь основным источником сложностей решения и затрат ресурсов. Более того, учет малозначимых факторов маскирует проявление основных явлений и затрудняет возможность прогноза их развития в широком диапазоне изменения исходных данных.

Во многих случаях практические задачи требуют упрощения решения для обеспечения управления технологическими процессами в режиме реального времени. Проблема состоит в малом спектре методов,

обеспечивающих баланс между простотой решения и адекватностью их результатов параметрам рассматриваемых процессов.

Примером могут служить задачи определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм или определение температуры внутри тел в процессе их прогрева (охлаждения).

Анализ основных исследований и публикаций

Начало решения задач определения собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью было положено еще в XIX веке и продолжалось на протяжении всего XX. Не потеряла практической значимости эта задача и в настоящее время. Колеблющаяся жидкость может оказывать влияние (чаще всего негативное) на цистерны железнодорожного и автомобильного транспорта (большинство ж/д аварий происходит с цистернами), танкеры, емкости хранения жидкого топлива на нефтебазах, бассейны выдержки ядерного топлива и др. В последних двух случаях колебание жидкости может происходить из-за сейсмического воздействия [1]. Решение чаще всего искали с помощью вариационных или экспериментальных [2] методов. Решения принципиально получены, но они либо относятся к частным случаям [2], либо дают сложный инструмент решения задачи, который нужно еще уметь использовать, а применение его, опять же, дает частный результат. Это не позволяет на основе полученных решений сделать обобщающие выводы для различных форм емкостей или различной степени их заполнения.

Аналогичная ситуация складывается и при решении задач определения температуры в заданных точках внутри тела в процессе его нагрева (охлаждения). Существуют аналитические решения задач определения температуры в характерных точках внутри простых тел (пластина, цилиндр, шар) [3-4] при их нагреве (охлаждении). Но они относятся к частным случаям симметричного температурного воздействия. «Частность» следует понимать в смысле невозможности применения используемого метода к решению чаще всего возникающих задач теплопередачи, или иными словами, несимметричного температурного воздействия на тела. Как и в случае с определением собственной частоты колебаний жидкости со свободной поверхностью имеются многочисленные численные решения [5-6], но они также не позволяют получить обобщающие решения.

Цель исследования

Проиллюстрировать возможности и результаты применения упрощенного «интегрального» подхода на примере решения задач:

- определения собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью в емкостях различных форм;
- определения времени переходного процесса при нагреве тел (пластина, цилиндр, шар).

Результаты исследования. Во многих случаях существует альтернатива «дифференциальному» подходу. Назовем его «интегральным». В основе его лежит запись балансовых уравнений сохранения (количества движения, вещества, энергии) в самом общем, интегральном виде или, иными словами, в сосредоточенной постановке. В дальнейшем происходит усложнение (а не упрощение как в «дифференциальном» подходе) элементов математической модели. Детализация проводится до уровня минимально необходимой точности получаемого решения. Часто решения для таких моделей существенно проще, чем для «дифференциального» подхода и, кроме того, на всех этапах преобразования модели сохраняются интегральные балансы исследуемых величин. Их распределенность с точностью до небольшого числа коэффициентов может быть описана с помощью несложных априорных зависимостей. Характер зависимостей может быть определен из простых модельных экспериментов или из полученных ранее частных (зачастую сложных) решений. Коэффициенты определяются из малого числа такого же рода экспериментов. Такой подход приводит к появлению некоторых приближений и, соответственно, погрешностей. Но следует учитывать, что при решении прикладных задач замеры исследуемых величин происходят также с погрешностью. Поэтому некоторая неточность вычислений допустима, хотя ее величина должна быть оценена. В результате можно получить простые зависимости для расчета искомых величин, поддающиеся широкому обобщению.

Для определения параметров, связанных с колебанием жидкости необходимо выявить характер распределения скоростей ее движения по мере увеличения глубины. Это можно сделать с помощью визуализации движения жидкости, пример которой приведен на рис. 1. Исследовалось движение жидкости в прозрачной плоской (прямоугольной) емкости. Радиус отмеченной полуокружности соответствует половине ширины емкости. Из приведенных фотографий видно, что движение жидкости практически не распространяется на глубины большие, чем половина ширины емкости. Назовем эту глубину эффективной. Пренебрегая диссипацией энергии при колебании жидкости, можно получить верхнюю оценку частоты колебаний. Для этого закон сохранения энергии для колебаний можно запишем в виде:

$$\Delta K = \Delta U, \quad (1)$$

где ΔK – изменение кинетической энергии; ΔU – изменение потенциальной энергии.

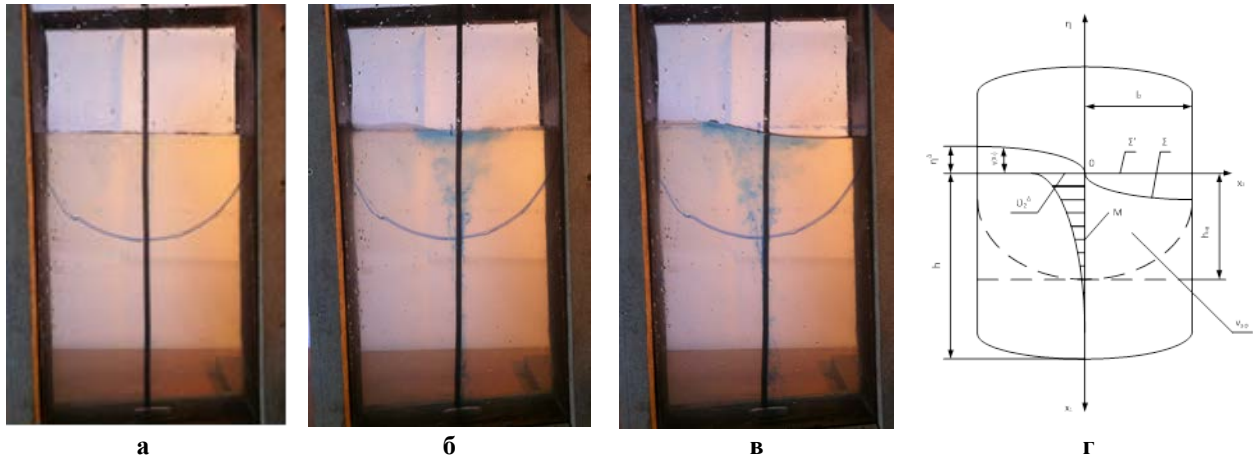


Рис. 1. Визуалізація руху рідини (а-в) і прийнята розрахункова схема (г).

Полагаая, что минимум потенциальной энергии при $\eta=0$, а минимум кинетической энергии при $v=0$, получим:

$$\Delta K = \rho \cdot \int_V \frac{v^2}{2} dV; \quad \Delta U = \rho n g \iint_{S_\Sigma} \frac{\eta^2}{2} dx_2 dx_3 \quad (2)$$

Выполнив соответствующие преобразования в конечном итоге было получено решение в виде:

$$\omega = \sqrt{\frac{ng}{R}} \cdot \sqrt{\bar{h}_{эф}} \cdot k_\omega, \quad \bar{h}_{эф} = \begin{cases} 1 - e^{-k_\phi \bar{h}}, & \text{при } \bar{h} < 1; \\ 1, & \text{при } \bar{h} > 1. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь: ω - собственная (круговая) частота колебаний свободной поверхности жидкости; n - перегрузка (при нормальных условиях на поверхности земли $n=1$); g - ускорение свободного падения; $\bar{h}_{эф}$ - относительная эффективная глубина заполнения емкости (глубина, на которой сказывается колебание свободной поверхности); $\bar{h} = h/R$ - относительная глубина заполнения емкости; h - глубина заполнения емкости; R - характерный размер емкости (для цилиндрической – радиус; для прямоугольной – половина ширины). Такой подход может быть применен для емкостей различных форм. Коэффициенты k_ω и k_ϕ – коэффициент формы могут быть определены из немногочисленных экспериментов путем обработки их результатов с помощью выражений (3). Результаты для емкостей различных форм и направлений возмущающих воздействий приведены в табл.1.

Таблица 1

Коэффициенты для расчета собственных частот колебаний

№	Форма емкости, положение и направление воздействий	k_ϕ	k_ω	Закон распределения нормированного отклонения расчетных результатов от экспериментальных
1	Прямоугольный прямой параллелепипед, боковые грани вертикальны, вдоль боковой грани, $\bar{h} \geq 0.3$	3,68	1,27	(0,011; 0,00042)
2	Круговой цилиндр, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,3	1,37	(0; 0,00064)
3	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, вдоль оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 3$	3,51	1,61	(0; 0,0028)
4	Круговой цилиндр, ось горизонтальна, поперек оси, $0.2 \leq \bar{h} \leq 1,8$	2,44	1,3	(0; 0,00037)
5	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 20° , поперек оси	5	1,22	(0; 0,000676)
6	Конус усеченный, ось вертикальна, угол раствора 50° , поперек оси	7,58	0,915	(0; 0,000525)
7	Коаксиальные круговые цилиндры, ось вертикальна, поперек оси, $\bar{h} \geq 0.4$	4,31	1,4	(0,02; 0,001)

Для расчета собственной частоты колебаний жидкости между коаксиальными цилиндрами (7 позиция в табл. 1) в выражении (3) вместо R необходимо подставить $R+r$. Здесь r – радиус центрального тела (внутреннего цилиндра); R – радиус наружного цилиндра.

Сложность решения задач нагрева тел определяется распределенностью процесса и, как следствие, использованием для его описания математических моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из путей упрощения решения задачи может быть замена во времени и пространстве нагреваемого тела переменной температуры ее специальным образом определенной среднеинтегральной величиной, изменяющейся только во времени. Это даст возможность перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Из результатов аналитических, численных решений, экспериментальных исследований известно, что характер изменения температуры при нагреве (охлаждении) тел носит экспоненциальный характер. Положим, что температура, например, для бесконечной пластины в центральной точке тела может быть определена из соотношения

$$\vartheta_x = \vartheta_y + (\vartheta_n - \vartheta_y) \cdot \exp(-l/x). \tag{4}$$

Здесь $\vartheta_n, \vartheta_y, \vartheta_x$ – температуры на поверхности, в центре и в текущей точке тела соответственно. Точнее речь идет об отклонениях от начальной температуры окружающей среды t_0 и определяются из соотношений:

$$\vartheta_n = t_n - t_0; \quad \vartheta_y = t_y - t_0; \quad \vartheta_{срд} = t_{срд} - t_0 = const,$$

где $t_{срд}$ – температура окружающей среды в процессе нагрева тела.

Выполнив осреднение в соответствии с

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{V_T} \int_0^l \vartheta_x S_x dx, \tag{5}$$

подставим его в модель, описывающую нагрев тела в сосредоточенных параметрах:

$$c \cdot \rho \cdot V_T \frac{d\bar{\vartheta}}{d\tau} = S_{бок} \frac{\lambda}{\delta} (\vartheta_n - \bar{\vartheta}) \tag{6}$$

$$\frac{\lambda}{\delta} S_{бок} (\vartheta_n - \bar{\vartheta}) = \alpha \cdot S_{бок} (\vartheta_{срд} - \vartheta_n). \tag{7}$$

Здесь c, ρ, λ – теплоемкость, плотность, теплопроводность нагреваемого тела соответственно; α – коэффициент теплоотдачи от окружающей среды к нагреваемому телу; V_T – объем тела; $S_{бок}$ – площадь боковой поверхности тела. Уравнение (6) выражает закон сохранения энергии. В правой части определяется энергия, передаваемая от границы (поверхности тела) внутрь за счет разности (напора) потенциала термодинамической силы (разности температур). В левой – энергия, накапливаемая за счет емкости (теплоемкости) тела. Уравнением (7) описано граничное условие III рода и так же выражает баланс энергий. В правой части описана энергия, передаваемая от окружающей среды к телу. В левой, как и в предыдущем уравнении, энергия, отводимая от поверхности внутрь тела.

Разрешив с учетом (4) уравнения (6-7) можно получить выражение для определения температуры в центре пластины

$$\bar{\vartheta}_y = 1 - \exp(-\hat{Ho}); \quad \hat{Ho} = Fo \frac{S_{бок} \cdot \delta}{V_T} \cdot \frac{Bi}{1 + k \cdot Bi}, \tag{8}$$

где Fo, Bi – число Фурье, критерий Био, соответственно; k – коэффициент, определяемый из известных аналитических расчетов или экспериментальных исследований. Величина \hat{Ho} – модифицированное число гомохронности – является единственным параметром, определяющим температуру в центре тела (в рассматриваемом случае в центре пластины).

Выражения, аналогичные (8), можно получить и для других тел, например для бесконечного цилиндра и шара. Различия проявятся только в величине комплекса $(S_{бок} \cdot \delta)/V_T$ и коэффициента k . Соответствующие величины приведены в табл. 2.

Таблица 2

Коэффициенты формы		
	$(S_{бок} \cdot \delta)/V_T$	k
Пластина	1	0,42
Цилиндр	2	0,39
Шар	3	0,36

Сравнение результатов расчетов на основании выражений (8) и точных аналитических расчетов [3] показывает хорошее их совпадение. Результаты сравнения приведены в табл. 3. Производилось сравнение чисел Фурье из [3] и полученных из (8). Определялась относительная погрешность ε , вычисляемая в %.

Таблица 3

Сравнение точного и приближенного значений времени окончания процесса нагрева

Bi	Пластина $k = 0.42$			Цилиндр $k = 0.39$			Шар $k = 0.36$		
	Fo ₂ , [3]	Fo ₁ , расчет (8)	ε , %	Fo ₂ , [3]	Fo ₁ , расчет (8)	ε , %	Fo ₂ , [3]	Fo ₁ , расчет (8)	ε , %
0,005	600,34	601,26	0,15	300,06	300,6	0,18	200,1	200,4	0,15
0,01	300,9	301,3	0,1	150,4	150,6	0,15	100,20	100,36	0,17
0,1	31,12	31,26	0,5	15,48	15,59	0,7	10,29	10,36	0,7
1,0	4,200	4,26	1,4	2,02	2,085	3,3	1,31	1,36	3,7
10	1,58	1,56	1,3	0,725	0,735	1,3	0,45	0,46	1,4
100	1,34	1,29	3,6	0,612	0,6	1,9	0,38	0,37	3,0
1000	1,32	1,26	3,9	0,601	0,587	2,36	0,37	0,36	3,4

Выводы

Единое решение в виде (3) для задач определения собственных частот колебаний жидкости со свободной поверхностью или (8) для задач прогрева тел удалось получить в следствие перехода к модели в сосредоточенной постановке и использования априорного описания профилей исследуемых параметров:

— при решении задачи определения собственной частоты колебаний жидкости, полученной из визуализации исследуемого процесса;

— при решении задачи прогрева тел из ранее полученных решений подобных задач.

Полученные решения просты, единообразны для рассматриваемого круга задач, их погрешности не превосходят допустимой точности инженерных расчетов.

Список использованной литературы

1. Гнисько, В.И. Численное моделирование плесканий жидкости в упругой цилиндрической оболочке / В.И. Гнисько, В.В. Науменко // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». — 2012. — Вип. 19. — С. 66—72.
2. Богомаз, Г.И. Колебания жидкости в баках: методы и результаты экспериментальных исследований : сборник научных трудов / Г.И. Богомаз, С.А. Сирота ; Нац. акад. наук Украины, Нац. косм. агентство Украины, Ин-т техн. механики. — Днепропетровск : Ин-т техн. механики, 2002. — 305 с.
3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
4. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел. [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер // Пер. с англ., под ред. Померанцева А.А. - М.: Наука, 1964.- 488 с.
5. Seem, J. E. Transfer Functions for Efficient Calculation of Multidimensional Transient Heat Transfer [Text]/ [J. E. Seem](#), [S. A. Klein](#), [W. A. Beckman](#), [J. W. Mitchell](#)// *J. Heat Transfer* 111(1), 2009
6. [Mahapatra](#), T. Dual Solutions in Magnetohydrodynamic Stagnation-Point Flow and Heat Transfer Over a Shrinking Surface With Partial Slip [Text]/ [T. R. Mahapatra](#), [S. K. Nandy](#), [I. Pop](#)// *J. Heat Transfer* 136(10), (Jul 02, 2014) (6 pages) doi: 10.1115/1.4024592