ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 515.2.2

О.О. КАЛІНІН, Т.О. КАЛІНІНА, Г.В. КОВАЛЬОВА
Одеська державна академія будівництва та архітектури

АНАЛІТИЧНА ПОБУДОВА СПІЛЬНОЇ ДОТИЧНОЇ ДО ДВОХ ЕЛІПСІВ

Робота присвячена питанням побудови спряження двох еліпсів, а саме відшуканню точок, для яких можливе спряження еліпсів за допомогою спрягаючого кола. Для цього аналітично розв'язується задача про відшукання точок дотику спільної дотичної до двох еліпсів. Розглянуті всі випадки взаємного розташування еліпсів, осі яких розташовані на паралельних прямих.

Ключові слова: коло, еліпс, дотична, спряження.

А.А. КАЛИНИН, Т.А. КАЛИНИНА, Г.В. КОВАЛЕВА
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕЙ КАСАТЕЛЬНОЙ К ДВУМ ЭЛЛИПСАМ

Работа посвящена вопросам построения сопряжения двух эллипсов, а именно отысканию точек, для которых возможно сопряжение эллипсов с помощью сопрягающей окружности. Для этого аналитически решается задача об отыскании точек касания общей касательной к двум эллипсам. Рассмотрены все случаи взаимного расположения эллипсов, оси которых расположены на параллельных прямых.

Ключевые слова: круг, эллипс, касательная, сопряжение.

O.O. KALININ, T.O. KALININA, G.V. KOVALOVA
Odessa State Academy of Construction and Architecture

ANALYTICAL BUILDING OF THE COMMON TANGENT TO THE TWO ELLIPSES

The work is devoted to the composition of the conjugation of two ellipses, namely the search for points for which conjugation of ellipses by conjugation circle is possible. For this purpose, the problem of finding the points of contact of the joint tangent to two ellipses is solved analytically. All cases of the mutual arrangement of ellipses are considered, the axes of which are located on parallel straight lines.

Keywords: circle, ellipse, tangent, conjugation.

Постановка проблеми

При проектуванні відповідальних будов (наприклад, в кораблебудуванні), де потрібен обтічний контур, складений з гладких кривих, необхідна точна графічна побудова точок дотику або спрягаючої кривої за заданими точками дотику. Таким чином, розглядувана задача становить не тільки теоретичний, але й практичний інтерес.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В роботі [1], присвяченій спряженню кривих другого порядку, був розглянутий графоаналітичний метод побудови спряження кола та еліпса за заданою на еліпсі точкою дотику. Проте залишилось відкритим питання про геометричне місце точок на еліпсі, для яких така побудова взагалі можлива. Тим більш на це питання немає відповіді у випадку двох еліпсів.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є аналітичне визначення координат точок дотику спільної дотичної до двох еліпсів, осі яких розташовані на паралельних прямих. Оскільки спільну дотичну можна розглядати як спрягаюче коло нескінченного радіусу, таким чином ми знайдемо дуги на еліпсах, для точок яких можливо побудувати спряження.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо задачу про знаходження загальної дотичної до двох еліпсів з паралельними осями. Нехай еліпси задано в декартовій системі координат рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

та

$$\frac{(x-x_0)^2}{A^2}+\frac{(y-y_0)^2}{B^2}=1 \qquad (2)$$

відповідно. Тоді еліпс (1) можна завдати за допомогою параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t; \end{cases} \qquad (3)$$

де x, y – декартові координати точки еліпса, a та b – його півосі, t – параметр, пов'язаний з кутом повороту проти годинникової стрілки від напряму осі Ox до напряму на розглядувану точку еліпса [3]. Враховуючи ці рівняння, отримаємо, що рівняння дотичної до еліпса (1) в довільній точці $M(x;y)$ має вигляд

$$y=-\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\, t\cdot x+\frac{b}{\sin t}.$$

Підставимо це значення в рівняння другого еліпса (2) і спростимо:

$$\left(B^2+\frac{b^2A^2}{a^2}\mathrm{ctg}^2 t\right)x^2-2\left(B^2x_0+\frac{A^2b}{a}\mathrm{ctg}\, t\left(\frac{b}{\sin t}-y_0\right)\right)x+B^2x_0^2+A^2\left(\frac{b}{\sin t}-y_0\right)^2-A^2B^2=0. \qquad (4)$$

Це квадратне рівняння відносно x. Якщо дотична першого еліпса є дотичною і другого, то рівняння (4) має тільки один корінь, і його дискримінант має дорівнювати нулю. Звідси отримуємо рівняння

$$a^2(B^2-y_0^2)\sin^2 t+b^2(A^2-x_0^2)\cos^2 t-2abx_0y_0\sin t\cos t+2a^2by_0\sin t+2ab^2x_0\cos t-a^2b^2=0. \qquad (5)$$

Перейдемо в цьому рівнянні до тангенса половинного кута і зробимо заміну

$$z=\mathrm{tg}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} &b^2(A^2-(a+x_0)^2)z^4+4ab(a+x_0)y_0z^3+2(2a^2(B^2-y_0^2)-b^2(A^2-x_0^2)-a^2b^2)z^2+ \\ &+4ab(a-x_0)y_0z+b^2(A^2-(a-x_0)^2)=0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Розв'язавши це рівняння, ми знайдемо параметр t точок дотику на першому еліпсі за рівнянням

$$t=2\,\mathrm{arctg}\, z,$$

а потім за рівняннями (3) – координати цих точок.

Щоб знайти відповідні точки дотику на другому еліпсі, можна скористатися колінеарністю дотичних векторів в точках дотику до обох еліпсів, звідки

$$\mathrm{tg}\,\tau=\frac{aB}{Ab}\mathrm{tg}\, t. \qquad (7)$$

З цього рівняння знаходимо параметр τ відповідної точки дотику на другому еліпсі та обчислюємо її координати на другому еліпсі за наступними параметричними рівняннями [3, с. 112]:

$$\begin{cases} x = A\cos\tau+x_0; \\ y = B\sin\tau+y_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Залежно від взаємного розташування еліпсів рівняння (6) може мати чотири різних дійсних кореня (рис. 1), три різних дійсних кореня (рис. 2), два різних дійсних кореня (рис. 3), один дійсний корінь (рис. 4) , або не мати дійсних коренів (рис. 5), що відповідає кількості спільних дотичних.

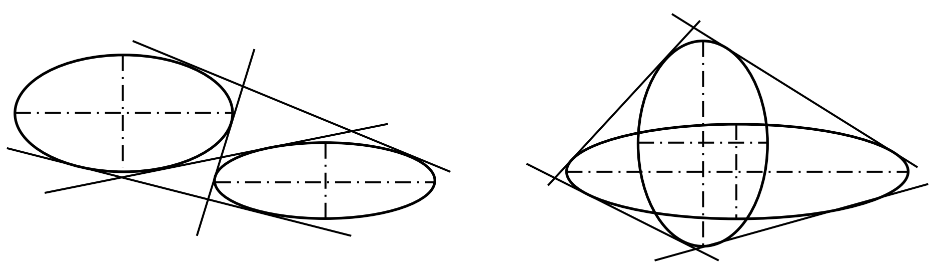

Рис. 1. Варіанти взаємного розташування еліпсів, що мають чотири спільних дотичних

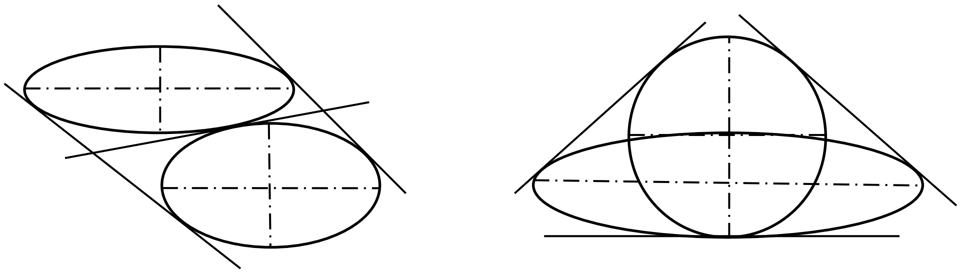

Рис. 2. Варіанти взаємного розташування еліпсів, що мають три спільні дотичні

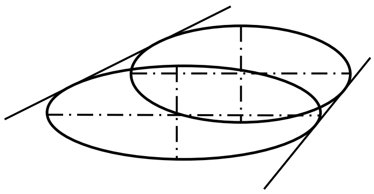

Рис. 3.
Еліпси мають дві спільні дотичні.

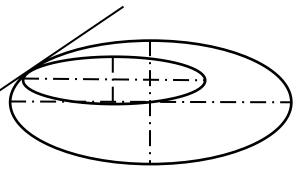

Рис. 4.
Еліпси мають одну спільну дотичну

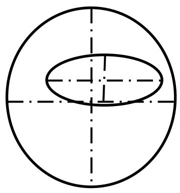

Рис. 5.
Еліпси не мають спільних дотичних

Розглянемо деякі частинні випадки.

1. Нехай еліпси мають однаковий ексцентриситет, тобто вони подібні. Тоді

$$aB = Ab, \tag{9}$$

і рівняння (3) спрощується:

$$a^2 y_0^2 \sin^2 t + b^2 x_0^2 \cos^2 t + 2abx_0 y_0 \sin t \cos t - 2a^2 b y_0 \sin t - 2ab^2 x_0 \cos t + a^2 b^2 - A^2 B^2 = 0 .$$

Ліву частину цього рівняння можна подати, як різницю квадратів, і звести до двох рівнянь:

$$ay_0 \sin t + bx_0 \cos t - b(a + A) = 0 \tag{10}$$

або

$$ay_0 \sin t + bx_0 \cos t - b(a - A) = 0 . \tag{11}$$

Після заміни $z = \mathrm{tg}\left(\dfrac{t}{2}\right)$ з рівнянь (10) та (11) отримаємо два квадратні рівняння, дискримінанти яких відповідно мають вигляд

$$D_1 = 4(a^2 y_0^2 + b^2 (x_0^2 - (a + A^2)) ,$$

$$D_2 = 4(a^2 y_0^2 + b^2 (x_0^2 - (a - A^2)) .$$

Завдяки умові (9) у випадку подібних еліпсів має місце рівність

$$\mathrm{ctg}\, \tau = \mathrm{ctg}\, t ,$$

тобто параметри відповідних точок дотику або співпадають, або відрізняються на π.

Якщо еліпси не мають спільних точок (перший варіант розташування на рис. 1), розв'язки рівняння (10) відповідають внутрішнім дотичним, а рівняння (11) – зовнішнім. Якщо один з дискримінантів додатний, а другий дорівнює нулю, то еліпси мають три спільні дотичні (рис. 2), якщо один з дискримінантів додатний, а другий від'ємний, – еліпси мають дві спільні дотичні (рис. 3), якщо один з дискримінантів від'ємний, а другий дорівнює нулю, – еліпси мають одну спільну дотичну (рис. 4), і якщо обидва дискримінанти від'ємні – еліпси не мають спільних дотичних (рис. 5).

2. Нехай $a = A$, $b = B$, тобто еліпси рівні. Тоді рівняння (10) та (11) ще спрощуються, і розв'язки рівняння (10) знаходяться з за формулами

$$t_{1,2} = 2\,\mathrm{arctg}\, \frac{ay_0 \pm \sqrt{a^2 y_0^2 + b^2 (x_0^2 - 4a^2)}}{b(x_0 + 2a)}, \qquad \tau_{1,2} = \pi + t_{1,2} .$$

Розв'язки рівняння (11) мають вигляд

$$t_1 = \tau_1 = -\operatorname{arctg}\frac{bx_0}{ay_0}, \qquad t_2 = \tau_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{bx_0}{ay_0}.$$

3. Центри еліпсів лежать на одній вертикальній або горизонтальній прямій, тобто $x_0 = 0$ або $y_0 = 0$. Тоді рівняння (5) можна звести до рівняння, квадратного відносно $\sin t$ або $\cos t$ відповідно:

$$\left(a^2(B^2 - y_0^2) - A^2b^2\right)\sin^2 t + 2a^2by_0\sin t + b^2\left(A^2 - a^2\right) = 0, \quad (x_0 = 0), \tag{12}$$

$$\left(b^2(A^2 - x_0^2) - a^2B^2\right)\cos^2 t + 2ab^2x_0\cos t + a^2\left(B^2 - b^2\right) = 0, \quad (y_0 = 0). \tag{13}$$

Дискримінанти цих рівнянь мають вигляд відповідно

$$D_1 = 4b^2(a^2A^2y_0^2 + (a^2B^2 - A^2b^2)(a^2 - A^2)), \tag{14}$$

$$D_2 = 4a^2(b^2B^2x_0^2 + (a^2B^2 - A^2b^2)(B^2 - b^2)), \tag{15}$$

а) Бачимо, що для подібних еліпсів ($aB = Ab$) дискримінанти (14) та (15) спрощуються, і можна виписати розв'язки в явному вигляді.

Для випадку $x_0 = 0$:

$$t_{1,2} = \pm\arcsin\frac{(a+A)b}{ay_0}, \qquad \tau_{1,2} = \pi + t_{1,2},$$

$$t_{3,4} = \pm\arcsin\frac{(a-A)b}{ay_0}, \qquad \tau_{3,4} = t_{3,4}, \quad -$$

розв'язки рівняння (12), (якщо вони існують). Якщо розв'язки $t_{1,2}$ існують, то вони відповідають внутрішнім дотичним (перший варіант розташування на рис. 1).

Для випадку $y_0 = 0$:

$$t_{1,2} = \pm\arccos\frac{a(b+B)}{bx_0}, \qquad \tau_{1,2} = \pi + t_{1,2},$$

$$t_{3,4} = \pm\arccos\frac{a(b-B)}{bx_0}, \qquad \tau_{3,4} = t_{3,4} \quad -$$

розв'язки рівняння (13), (якщо вони існують). Якщо розв'язки $t_{1,2}$ існують, то вони відповідають внутрішнім дотичним (перший варіант розташування на рис. 1).

б) Якщо еліпси не подібні, але $a = A$ при $x_0 = 0$ або $b = B$ при $y_0 = 0$, то вирази (14) і (15) так само спрощуються, і отримуємо наступні результати.

Для випадку $a = A,\ x_0 = 0$:

$$t_{1,2} = \pm\arcsin\frac{2by_0}{y_0^2 + b^2 - B^2}, \qquad \tau_{1,2} = \pi + t_{1,2} \quad -$$

для внутрішніх дотичних (якщо вони існують). Зовнішні дотичні в цьому випадку будуть вертикальні:

$$t_{3,4} = \tau_{3,4} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}.$$

Для випадку $b = B,\ y_0 = 0$:

$$t_{1,2} = \pm\arccos\frac{2ax_0}{x_0^2 + a^2 - A^2}, \qquad \tau_{1,2} = \pi + t_{1,2} \quad -$$

для внутрішніх дотичних (якщо вони існують). Зовнішні дотичні горизонтальні:

$$t_{3,4} = \tau_{3,4} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Приклад. Розглянемо спільні дотичні до кола радіуса 2 та еліпса з півосями 2 та 1, координати центра кола (4;3) (рис. 6). В цьому випадку рівняння (6) має вигляд

$$-32z^4 + 144z^3 - 64z^2 - 48z = 0.$$

Це рівняння розкладається на наступні множники:

$$-16z(z-1)(2z^2 - 7z - 3) = 0$$

і відповідно має наступні корені:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = \frac{7+\sqrt{73}}{4}, \quad z_4 = \frac{7-\sqrt{73}}{4}.$$

Перші два корені відповідають внутрішнім дотичним:

$$z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \Rightarrow \tau_1 = \pi ,$$

точка дотику на еліпсі – (2;0), на колі – (2;3);

$$z_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \tau_2 = \frac{3\pi}{2} ,$$

точка дотику на еліпсі – (0;2), на колі – (4;2). Ці дотичні на рисунку не зображені, щоб його не загромаджувати.

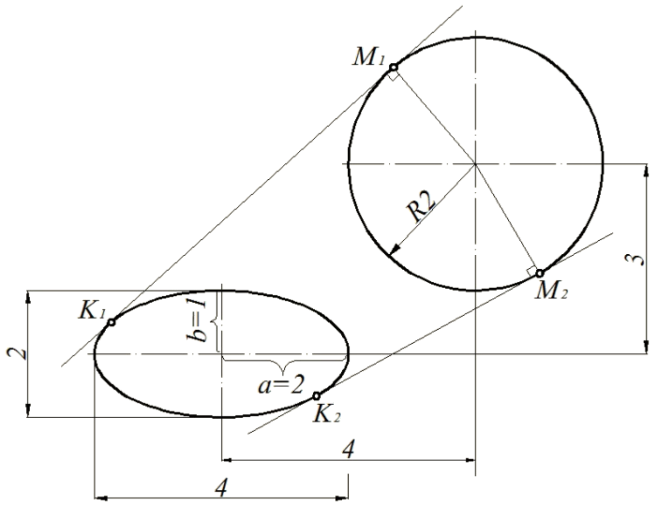

Рис. 6. Зовнішні спільні дотичні до еліпса з півосями 2 та 1 та кола радіуса 2

Корінь z_3 дає точки дотику зовнішньої дотичної K_1M_1 ($t_3 = \mathrm{arctg}\left(2z_3\right) \approx 151°$, за формулою (9) $\tau_3 = \mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\,t_3\right) + 180° \approx 132°$, звідси наближені координати точки K_1 за формулами (3) $x = -1{,}75$; $y = 0{,}37$, а наближені координати точки M_1 за формулами (8) $x = 2{,}66$; $y = 4{,}48$). Аналогічно, корінь z_4 визначає точки дотику дотичної K_2M_2 ($t_4 = \mathrm{arctg}\left(2z_4\right) \approx -42°$, $\tau_4 = \mathrm{arctg}\left(2\,\mathrm{tg}\,t_4\right) \approx -61°$, наближені координати точки K_2 $x = 1{,}48$; $y = -0{,}67$, а наближені координати точки M_2 $x = 4{,}97$; $y = 1{,}25$). Таким чином, для точок зовнішньої дуги K_1K_2 еліпса можливо побудувати спряження з заданим колом, причому відповідна точка спряження на колі буде знаходитись на дузі M_2M_1.

Висновки

Отримані рівняння дозволяють знайти точки дотику спільної дотичної до двох еліпсів з точністю, достатньою для побудови, а також виділити на кожному з еліпсів дуги, для точок яких можна побудувати спрягаюче коло.

Список використаної літератури

1. О.А. Нікітенко, О.О. Калінін, Т.О. Калініна// Деякі задачі для спряжених кривих другого порядку // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник / Луцьк, 2008. – Вип. № 22.
2. О.О. Калінін, Т.О. Калініна, О.А. Нікітенко, В.О. Макаров// Знаходження спряжених еліпсів //Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник / Відпов. ред. М.М. Осєтрін. – К., КНУБА, 2010. – Вип. 36. – С. 175-178.
3. В.П. Дубовик, І.І. Юрик. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2004. – 648 с.