УДК 539.3

Т.С. КАГАДИЙ
НТУ Днепровская политехника
О.В. БЕЛОВА, И.В. ЩЕРБИНА
Национальная металлургическая академия Украины

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ТЕЛ С ЛИНЕЙНОЙ И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Приведены аналитические решения двух новых контактных задач. В первой из них материал пластины обладает прямолинейной, во второй – криволинейной анизотропией. Для решения применен метод возмущения, разработанный в [1]. *Сохранена основная идея подхода, когда на основе асимптотического интегрирования задачи теории упругости сводятся к последовательному решению задач теории потенциала, проведены необходимые обобщения метода. Выполнены различные асимптотические оценки.*

Ключевые слова: асимптотический метод, ортотропный материал, контактное усилие, прямолинейная анизотропия, цилиндрическая анизотропия.

Т.С. КАГАДІЙ
НТУ Дніпровська політехніка
О.В. БІЛОВА, І.В. ЩЕРБИНА
Національна металургійна академія України

УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЗБУРЕНЬ ДЛЯ ТІЛ З ЛІНІЙНОЮ І ЦИЛІНДРИЧНОЮ АНІЗОТРОПІЄЮ

Наведено аналітичні розв'язки двох нових контактних задач. У першій з них матеріал пластини має прямолінійну, у другій - криволінійну анізотропію. Для розв'язання застосований метод збурення, розроблений в [1]. Збережена основна ідея підходу, коли на основі асимптотичного інтегрування задачі теорії пружності зводяться до послідовного розв'язування задач теорії потенціалу, проведені необхідні узагальнення методу. Виконано різні асимптотичні оцінки.

Ключові слова: асимптотичний метод, ортотропний матеріал, контактне зусилля, прямолінійна анізотропія, циліндрична анізотропія

T.S. KAGADIY
NTU Dnieper Polytechnic
O.V. BELOVA, I.V. SHCERBINA
National Metallurgical Academy of Ukraine

GENERALIZATION OF SOLVING THE CONTACT PROBLEMS BY THE PERTURBATION METHOD FOR BODIES WITH LINEAR AND CYLINDRICAL ANISOTROPY

Planar problems about load transfer by one-dimensional elastic elements to two-dimensional complex bodies are of interest for analysis and calculation of mechanical tensions in a variety of airplane constructional elements, for example plates joined with stringers or overlays. Such types of problems have quite a long history and have been sufficiently researched for elastic isotropic as well as for anisotropic infinite or semi-infinite bodies. Similar problems in case of finite and especially multilayered bodies have been significantly less studied. This paper describes such complicated new cases of load transfer and demonstrates how to solve them using of an asymptotic method based on ideas of L.I. Manevich and A.V. Pavlenko. The considered issue is a contact problem about a load transfer by an elastic sustaining element (stringer) to an elastic plate which consists of two joined orthotropic rectangles made of different materials and is fixed at two opposite edges. The stringer is placed in the middle between the other two (free) edges in such a way that the axis of the stringer is perpendicular to the plate's edge and continuously attached to it. The scheme of line contact is assumed to be used here. The paper presents investigation of flat problems considering a load transmission by an elastic rod to an elastic anisotropic half-space through application of various loading types (i.e. uniform and non-uniform distribution of a load). Various asymptotic estimations at "small" and "big" arguments xhave been done. The proposed method has been generalized taking into account also curvilinear coordinates. In particular, the problem about the elastic plate $R_0 \le r < \infty, -\gamma \le \theta \le \gamma$ *fixed at the edges* $\theta = \pm\gamma$ *was considered. The boundary* $r = R_0$ *remains free, the stresses and the deformations are absent at infinity. Along the medial radius (* $\theta = 0$ *) the plate is strengthened by a stringer which is loaded by longitudinal* *efforts* P_0. *The material of the plate is orthotropic; the main directions of anisotropy coincide with the polar coordinates* r, θ. *Analytical solutions of two new contact problems are given. In the first of these, the material of the plate has a rectilinear, in the second - curvilinear anisotropy. For the solution, the perturbation method developed in* [1] *is applied. The basic idea of the approach is preserved, when on the basis of asymptotic integration the problems of the theory of elasticity are reduced to a sequential solution of the problems of potential theory, necessary generalizations of the method are carried out. Various asymptotic estimates are fulfilled.*

Keywords: asymptotic method, orthotropic material, contact force, rectilinear anisotropy, cylindrical anisotropy.

Постановка проблемы и изложение основного материала исследования

1. Задача о контактном взаимодействии ортотропного прямоугольника, обладающего линейной анизотропией со штампом.

Пусть упругий ортотропный прямоугольник $0 \le x \le h,\ \ |y| \le b$ закреплен по кромкам $y = \pm b$. В грань прямоугольника $(x = 0)$ вдавливается жесткий прямоугольный штамп ширины $2l\ \ (l < b)$, который под действием центральной силы P_0 движется поступательно параллельно оси $0x$. На штамп действует сдвигающая сила Q_0. Между штампом и прямоугольником учитывается сила трения, подчиняющаяся закону Кулона. Рассматривается состояние предельного равновесия штампа. Противоположная грань прямоугольника $(x = h,\ \ y < b)$ остается свободной. Прямоугольник представляет собой пластину толщины h_*, работающую в условиях обобщенного плоского напряженного состояния. Требуется определить закон распределения напряжений под штампом и в прямоугольнике.

Задача сводится к интегрированию уравнений равновесия прямоугольника в перемещениях:

$$B_1 u_{xx} + G u_{yy} + mG\upsilon_{xy} = 0,\ B_2\upsilon_{yy} + G\upsilon_{xx} + mGu_{xy} = 0 \tag{1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered}\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0 \quad (x = 0,\quad l < |y| < b), u = const,\quad \sigma_{12} = \rho\sigma_{11} \quad (x = 0,\ |y| < l),\\ u = \upsilon = 0 \quad (y = \pm b),\qquad \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0,\qquad (x = h,\ |y| < b),\end{gathered} \tag{2}$$

где $B_j = \dfrac{\mathrm{E}_j h_*}{1 - \nu_{12}\nu_{21}},\ G = G_{12}h_*,\quad m = 1 + \nu_{21}\dfrac{B_1}{G}.$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости вдоль главных направлений Ox; Oy, ν_{12}, ν_{21} – коэффициенты Пуассона, G_{12} – модуль сдвига, σ_{11}, σ_{22} – нормальные напряжения, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ – касательные напряжения; u и υ – компоненты вектора перемещений; h_* – толщина пластинки; индексы x и y означают дифференцирование по соответствующим координатам.

Кроме того, должны быть выполнены условия равновесия штампа:

$$\int_{-l}^{l} \sigma_{11}(0, y)\,dy + P_0 = 0,\qquad \int_{-l}^{l} \sigma_{12}(0, y)dy + Q_0 = 0\,. \tag{3}$$

Задача решается асимптотическим методом [1]. Для нахождения аналитической в прямоугольнике $0 \le x_1 \le h,\ \ |y_1| \le \beta$ функции $u^{1,0}$ по заданным граничным условиям (2) отображают прямоугольник из плоскости $z_1\,(z_1 = y_1 + ix_1)$ в полуплоскость изображений плоскости $\zeta_1\ \ (\eta_1 = \eta_1 + i\xi_1)$ с помощью функции

$$Z_1 = c_1 \int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{\left(1 - \zeta_1^2\right)\left(1 - k_1^2\xi_1^2\right)}}, \tag{4}$$

причем параметры $k_1\,(0 < k_1 < 1)$ и c_1 определяют из уравнений:

$$\beta = c_1 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}} = c_1 K\left(k_1\right), \quad h_1 = c_1 \int_1^{1/k_1} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2-1\right)\left(1-k_1^2t^2\right)}} = c_1 K\left(k_1^1\right) \tag{5}$$

где $K\left(k_1\right)-$ полный эллиптический интеграл первого рода $k_1' = \sqrt{1-k_1^2}$.

Тогда $\dfrac{K\left(k_1'\right)}{K\left(k_1\right)} = \dfrac{h_1}{\beta} = æ_1$. Так как на границе полуплоскости ζ_1 в интервале $\left|\eta_1\right| < l_1$ действительная часть функции φ_1^0 равна нулю, а на остальной части мнимая ее часть равна нулю, то решение для функции φ_1^0 во всей полуплоскости имеет вид:

$$\varphi_1^0\left(\zeta_1\right) = \frac{A}{\sqrt{\zeta_1^2 - l_1^2}}, \tag{6}$$

где A – действительная постоянная; выбирается та ветвь корня, которая положительная при положительных значениях аргумента.

Действительная и мнимая часть $\varphi_1^0\left(\zeta_1\right)$ определяют функции $u_{y_1}^{1,0}$ и $u_{x_1}^{1,0}$.

При $\xi_1 = 0$ $\left(x_1 = 0; \quad \text{или } y_1 = \pm\beta; \quad \text{или} \quad x_1 = h_1, \ \left|y_1\right| < \beta\right)$ $\quad \varphi_1^0\left(\eta_1\right) = \dfrac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}$,

$$u_{y_1}^{1,0} = 0, \quad u_{x_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}} \quad \left(\left|\eta_1\right| < l_1\right), u_{y_1}^{1,0} = \frac{A}{\sqrt{\eta_1^2 - l_1^2}}, \quad u_{x_1}^{1,0} = 0 \quad \left(\left|\eta_1\right| > l_1\right), \tag{7}$$

где $\eta_1 = sn\left(K\left(k_1\right)y_1/\beta, k_1\right)$.

$$A = -\frac{P_0}{2\sqrt{GB_1}\, c_1\, \mu}, \text{ где } \mu = \int_0^{l_1} \frac{d\eta_1}{\sqrt{\left(l_1^2 - \eta_1^2\right)\left(1-\eta_1^2\right)\left(1-k_1^2\,\eta_1^2\right)}}. \tag{8}$$

Нормальное напряжение $\sigma_{11}^{1,0}$ и составляющая касательного напряжения σ_{12}, соответствующая функции $u^{1,0}$ находятся по формулам:

$$\sigma_{11}^{1,0} = B_1 u_{x_1}^{1,0} = \left(\sqrt{GB_1}/l\right)u_{x_1}^{1,0}; \quad \sigma_{12}^{1,0} = G u_y^{1,0} = \left(G/l\right)u_y^{1,0}.$$

В нулевом приближении нормальное напряжение под штампом и составляющая касательного напряжения вне штампа соответственно имеют вид:

$$\sigma_{11}^{1,0} = -\frac{P_0}{2l\,c_1\,\mu}\frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \quad \sigma_{12}^{1,0} = -\frac{G\,P_0}{2l\sqrt{GB_1}\,c_1\,\mu}\frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}, \tag{9}$$

$$\upsilon_{y_1} = -\left(mG/B_2\right)\sqrt{GB_1}\,u_{x_1}^{1,0}, \ \text{ т.е. при } \xi_1 = 0, \quad \left|\eta_1\right| > l_1 \quad \upsilon_y^{1,0} = 0, \ \upsilon_{y_1} = 0 \quad \left|\eta_1\right| < l_1,$$

$$\upsilon_{y_1}^{1,0} = \frac{mG}{B_1 B_2}\frac{P_0}{2c_1\,\mu}\frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_1^2}}. \tag{10}$$

Таким образам, граничные условия по нормальному напряжению под штампом удовлетворяются, но получается невязка по касательному напряжению вне штампа, которая снимается при определении напряженно-деформируемого состояния второго типа в нулевом приближении.

Отметим, что при $h < l$ для напряженно-деформированного состояния второго типа вместо прямоугольника фактически имеет место полуполоса и задача в этом случае будет такой: найти аналитическую в полуплоскости ζ_2 функцию $\upsilon^{2,0}$, при условии, что на действительной оси полуплоскости $\left(\xi_2 = 0\right)$ функция $\upsilon_{x_2}^{2,0}$ принимает значения:

$$\upsilon_{x_2}^{2,0} = \frac{P_0}{2\sqrt{B_1 B_2}\, c_1 \mu} \frac{1}{\sqrt{\eta_2^2 - l_1^2}} \quad \left(l_1 < |\eta_2| < c_2\right), \qquad \upsilon_x^{2,0} = 0 \quad \left(|\eta_2| > c_2\right),$$

$$\upsilon_x^{2,0} = -\frac{\rho P_0}{2\sqrt{G B_2}\, c_1 \mu} \frac{1}{\sqrt{l_1^2 - \eta_2^2}} \quad \left(|\eta_2| < l_1\right) \tag{11}$$

Следует заметить, что при $b > l \ \left(c_2 > l\right)$ формула (11) существенно упрощается, даже при учете нескольких первых приближений по параметру l_1/c_2. В частности в нулевом приближении на границе полуплоскости $\left(\xi_2 = 0\right)$.

После первых двух приближений нормальное напряжение под штампом принимает вид:

$$\sigma_{11} = -\frac{P_0}{\pi\, l} \frac{\pi}{2 c_1 \mu\, l_1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \left\{ 1 + \varepsilon^{1/2} \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{G}{B_2}} \left(\rho \ln \frac{1+t}{1-t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\frac{G}{B_1}} \frac{4\sqrt{1-t^2}}{\pi\, c_2} \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-t^2}{c_2^2 - 1}} + \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln\left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 1}\right) \right] \right) + O(\varepsilon) \right\}, \tag{12}$$

где $\gamma = \dfrac{\pi}{2 c_1 \mu\, l_1}$.

Особенность напряжений σ_{11} в (12) в угловых точках штампа $|y| = l \ \left(|t| = 1\right)$ с учетом трения такая же как и для полуплоскости. Для гладкого штампа особенность совпадает с точной.

2. Решение задачи о вдавливании штампа в ортотропную пластину с цилиндрической анизотропией.

Упругая пластина $(R_0 \le r \le \infty; -\gamma \le \theta \le \gamma)$ закреплена по кромкам $\theta = \pm\gamma$. На границу $r = R_0$ действует жесткий штамп с основанием, которое совпадает с $r = R_0$ $(-\lambda \le \theta \le \lambda)$. Штамп нагружен нормальным усилием P_0 и касательным Q_0.

При этом между штампом и пластиной учитывается трение (рассматривается состояние предельного равновесия штампа). На бесконечности $(r \to \infty)$ перемещения и деформации равны нулю.

Решение данной задачи осуществляется с помощью отображения сектора на полуплоскость и сводится к решению смешанной краевой задачи теории аналитических функций для полуплоскости.

Интегрирование уравнений (1) проводится при выполнении следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = B_1\left(R_0 e^{\xi}\right)^{-1}\left(u_\xi + \vartheta_2(v_\eta + u)\right) = 0, \\
&\tau = G\left(R_0 e^{\xi}\right)^{-1}\left(u_\eta + v_\xi - v\right) = 0 \quad (\xi = 0,\ \lambda \le |\eta| \le \gamma), \\
&u = v = 0 \quad (\eta = \pm\gamma), \\
&u = C_0,\ \tau = \rho\,\sigma_1 \ (\xi = 0, |\eta| < \lambda),
\end{aligned}$$

где ρ – коэффициент трения $(\rho < 1)$. На бесконечности перемещения и напряжения стремятся к нулю. Выполняются условия равновесия штампа:

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sigma_1(0,\eta) d\eta + P_0 = 0; \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \tau(0,\eta) d\eta + Q_0 = 0.$$

Найдено распределение напряжений под штампом и в пластине. Исследовано влияние отношения длины штампа кдлине свободной границы пластины на распределение нормальных напряжений под штампом.

Таблица 1

Сравнение распределения нормальных напряжений под штампом для кольцевого полубесконечного сектора и полуполосы

t		0	0.2	0.3	0.5	0.6	0.8	0.99
σ^*	1)	1.09	1.11	1.21	1.33	1.43	2.03	23.26
	2)	1.186	1.203	1.258	1.369	1.59	2.141	26.536

1) известное асимптотическое решение для ортотропной полуполосы [1];
2) полученное в работе асимптотическое решение для ортотропного полубесконечного кольцевого сектора с криволинейной анизотропией.

Влияние трения на усилие под штампом и на характер особенности учитывается с третьего приближения. В окрестности угловой точки штампа характер напряженного состояния такой же, как и для полуплоскости. Поэтому проведено сравнение известного асимптотического решения для полуплоскости [1] с решением Л.А. Галина. Установлено, что указанное решение совпадает с разложенным в ряд точным решением Галина [2].

Учет первых двух приближений дает достаточную аппроксимацию точного решения и указывает на характер особенности в окрестности угловых точек штампа. Как и в [2], эта особенность имеет вид:

$$\sigma = -B\left(1-\eta_1/l_1\right)^{-1/2+\theta}.$$

Для гладкого штампа особенность совпадает с точной. Полученное в исходной задаче решение может быть "подправлено" вблизи особых точек при помощи "сращивания" с указанным особым решением. Известно [1], что с уменьшением значения угла γ точка "сращивания" приближается к границе области контакта.

Выводы

Для исследования применен метод возмущений, который позволил свести решение краевых задач теории упругости к последовательному решению краевых задач теории потенциала. Нужно заметить, что в рассмотренных задачах решения для усилия контактного взаимодействия, полученные асимптотическим методом, справедливы всюду, кроме непосредственной окрестности точек $\xi = 0, \eta = 0$ и $\xi = 0, \eta = \gamma$, где необходимо использовать особое решение $\tau(x) = Ax^{-\lambda}$. Неизвестный постоянный коэффициент A находится из условий "сращивания" (в некоторой точке совпадают как особое и приближенное решения, так и их производные). Эти условия позволяют определить точку сращивания двух решений и константу особого. Показано, что зона, в которой необходимо использовать особое решение, незначительна. Таким образом, полученные на основании предложенного подхода значения для контактных напряжений вместе с особым решением дают равномерно пригодное во всей области контакта приближенное решение поставленных задач.

Список использованной литературы

1. Manevich L.I. Asymptotic method in the theory of an elasticity of an orthotropic skew field / L.I. Manevich, A.V. Pavlenko, S.G. Koblik. – К.: Vusha shkola, 1982. – 152.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин. – М.: Наука, 1980. – 303 с.