УДК 666.97.033.16

И.Н. СИВАК, Ю.В. ЧОВНЮК
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины
В.Т. КРАВЧУК
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

УТОЧНЁННЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИБРАЦИОННОЙ ФОРМЫ С БЕТОННОЙ СМЕСЬЮ ПРИ РАЗНОНАПРАВЛЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Составлены математические модели взаимодействия бетонной смеси с днищем вибрационной формы при вертикальных и горизонтальных колебаниях, а также с вертикальными стенками вибрационной формы при горизонтально направленных колебаниях. Уплотняемая среда представлена в виде сплошной среды с распределёнными параметрами. В результате решения уравнения колебаний уплотняемой среды в частных производных, удовлетворяющего заданным граничным условиям при разнонаправленных колебаниях, определена закономерность деформирования уплотняемой среды в зависимости от нарастающей во времени плотности формуемой смеси, её физико-механических характеристик, толщины уплотняемого слоя, массы вибрационной формы, частоты и амплитуды возмущающей силы. Определены приведенные массы и коэффициент сопротивления бетонной смеси при разнонаправленных колебаниях, действующих на днище и вертикальные стенки вибрационной формы. Определены амплитуды колебаний вибрационной формы и напряжения, возникающие в уплотняемой среде. Исследованы основные характеристики свободных колебаний, возникающих в системе.

Ключевые слова: вибрационная форма, колебания, взаимодействие, уплотняемая среда.

І.М. СІВАК, Ю.В. ЧОВНЮК
Національний університет біоресурсів і природокористування України
В.Т. КРАВЧУК
Київський національний університет будівництва і архітектури

УТОЧНЕНИЙ АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ ВІБРАЦІЙНОЇ ФОРМИ З БЕТОННОЮ СУМІШШЮ ПРИ РІЗНОСПРЯМОВАНИХ КОЛИВАННЯХ

Складено математичні моделі взаємодії бетонної суміші з днищем вібраційної форми при вертикальних і горизонтальних коливаннях, а також з вертикальними стінками вібраційної форми при горизонтально направлених коливаннях. Ущільнюване середовище представлене у вигляді суцільного середовища з розподіленими параметрами. У результаті розв'язання рівняння коливань ущільнюваного середовища у частинних похідних, що задовольняють заданим граничним умовам при різноспрямованих коливаннях, визначена закономірність деформування ущільнюваного середовища у залежності від наростаючої у часі щільності формованої суміші, її фізико-механічних характеристик, товщини ущільнюваного шару, маси вібраційної форми, частоти і амплітуди вимушеної сили. Визначено наведені маси і коефіцієнт опору бетонної суміші при різноспрямованих коливаннях, що діють на дно і вертикальні стінки вібраційної форми. Визначені амплітуди коливань вібраційної форми і напруги, що виникають в ущільнюваному середовищі. Досліджені основні характеристики вільних коливань, виникаючих у системі.

Ключові слова: вібраційна форма, коливання, взаємодія, ущільнюване середовище.

I.N. SIVAK, Y.V. CHOVNYUK
National University of Bioresources and Life Sciences of Ukraine
V.T. KRAVCHYUK
Kyiv National University of Construction and Architecture

ASCERTAIN ANALYSIS OF THE INTERACTION BETWEEN VIBRATING FORM AND CONCRETE MIXTURE WITH DIFFERENTLY DIRECTED OSCILLATIONS

Purpose. *To study the interaction of concrete mix with bottom and vertical walls vibrating shapes with differently directed oscillations. The concrete account of the forces of resistance of cement concrete mix largely determines the accuracy of the establishment of the law of vibrations of the vibrating form, the choice of her rational parameters and technological parameters of vibration exposure on the treated environment. These resistance forces arise in the vertical, horizontal and torsion (angular) vibrations at vibrating forms and they are performed simultaneously, they have different values. Therefore, for justification of rational parameters of vibrating the forms necessary to accurately determine the pattern of deformation generated environment in vertical and horizontal directions, and the deformation of the concrete environment of the side walls of the mold.* ***Methodology.***

Mathematical model of interaction of concrete mix with bottom vibrating the forms with vertical and horizontal vibrations, vertical wall of the vibration shape at the horizontally directed oscillations. Here the sealing environment is presented in the form of continua with disturbed parameters. As a result of solutions to the equations of oscillations of the sealing medium equations, satisfying the given boundary conditions with differently directed oscillations, determined the pattern of deformation of the sealing medium depending on the rise time of the density of the moldable mixture, its physical and mechanical characteristics, the thickness of the sealing layer of the vibrating mass shape, frequency and amplitude of disturbing force. The free oscillations of the system are account as well. ***Results.*** *On the basis of oscillation theory to continuum mechanics, studied the process of propagation of waves of deformation in the sealing environment, presented in the form of systems with disturbed parameters, and defined the law of deformation of the sealing medium with multidirectional vibrations acting on the bottom of the vibrating shape in the vertical and horizontal directions and the vertical wall of the vibration shape at the horizontally directed oscillations, subjected to horizontally directed vibrations from the vertical, closely spaced to each other walls of the vibrating shape. The theoretical expression that allows to accurately describe the behavior of a real dynamical system "form of vibratory-compacted environment" in the molding of concrete products from ready mix concrete by the application of multidirectional vibrations. The parameters of free and force oscillations of the system are calculated.* ***Originality.*** *The obtained theoretical expressions allow computer simulation of the laws of motion and mode shapes of the sealing layers of the concrete mix, to analyze them from the point of view of effective influence on the processed medium multidirectional vibrations, to justify the shape and form of vibration exposure, and to substantiate the rational parameters of vibrating equipment.* ***Practical value.*** *The proposed method of determining the laws of motion and basic parameters of vibration forms for compaction of concrete mixture will be widely used in the design of new vibrating machines for compacting concrete mixes.*

Keywords: form vibration, oscillation, interaction, the sealing environment.

Постановка проблемы

Известно, что на характер колебаний вибрационной формы и эффективность обработки цементобетонных смесей большое влияние оказывают физико-механические характеристики обрабатываемой среды. В практике создания вибрационных машин их движение и определение основных параметров производят, как правило, рассматривая только вертикальные либо только горизонтальные колебания. При этом не учитывается вибрационное воздействие на бетонную среду, осуществляемое в другой плоскости. Правильный учёт сил сопротивления цементобетонной смеси во многом определяет точность установления закона колебаний вибрационной формы, выбора её рациональных параметров и технологических параметров вибрационного воздействия на обрабатываемую среду. Эти силы сопротивления возникают при вертикальных, горизонтальных и крутильных (угловых) колебаниях вибрационной формы, осуществляемые одновременно, и имеют при этом различные значения. Поэтому для обоснования рациональных параметров вибрационной формы необходимо точно определить закономерность деформирования формуемой среды в вертикальном и горизонтальном направлениях, а также деформирование бетонной среды боковыми стенками формы.

Анализ последних исследований и публикаций

Авторы [1–3] исследовали основные физико-механические характеристики виброформуемых цементобетонных смесей. Созданию вибрационных машин с вертикально направленными колебаниями посвящены работы [4–6], а с горизонтально направленными колебаниями – работы [7–9].

Теория вибромашин для уплотнения строительных смесей на основе синтеза дискретно-континуальных систем предложена в работах [10–15], однако развитый в них подход некорректен, поскольку авторы используют метод разделения переменных (метод Фурье) для решения волнового уравнения при подвижных граничных условиях (что недопустимо!). Наиболее обоснованный подход к решению задач такого класса, по мнению авторов данного исследования, изложен в [16–20]. Именно его мы и будем придерживаться в дальнейшем изложении.

Цель исследования

Цель работы – обоснование модели взаимодействия бетонной смеси с днищем и вертикальными стенками вибрационной формы при разнонаправленных колебаниях, на основе которой проведен анализ основных параметров, характеризующих свободные и вынужденные колебания указанной смеси, а также установлены основные технологические параметры самой вибрационной формы, оптимизирующие процессы уплотнения и формообразования смеси.

Изложение основного материала исследования

1. Анализ собственных колебаний вибрационной формы с бетонной смесью.

1.1. Взаимодействие вибрационной формы с обрабатываемой цементобетонной средой в вертикальном направлении.

Для определения характера взаимодействия вибрационной формы с обрабатываемой цементобетонной средой в вертикальном направлении авторы [15] исследовали динамическую систему "вибрационная форма – цементобетонная среда" следующим образом. Вибрационная форма считалась конструктивно выполненной с плоским днищем, а обрабатываемая среда представлялась в виде системы с распределёнными параметрами. Вибрационная форма установлена на основании при помощи упругих амортизаторов и на неё действует возмущение в виде вертикально направленной гармонической силы $Q\sin\omega t$.

Зависимость между напряжением и деформацией обрабатываемой цементобетонной среды в первом приближении авторами цитированной выше работы описывается известным уравнением:

$$\sigma = E\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}, \tag{1}$$

где u и z – эйлерова и лагранжева координаты; $E-$ динамический модуль упругой деформации обрабатываемой цементобетонной смеси.

Дифференциальное уравнение движения уплотняемой смеси в направлении координаты z за время t будет иметь вид [21] (с учётом зависимости (1)):

$$E\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = \rho\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $\rho-$ плотность цементобетонной смеси.

В соответствии с работой [22], относительно уравнения (2) необходимо отметить следующее. Периодические возмущения, вызывающие упругие деформации среды, распространяются в ней с некоторой скоростью (в данном случае – в цементобетонной смеси эта скорость составляет $a=\sqrt{E/\rho}$), зависящей от её физических свойств. В [15] указанная скорость a некорректно названа фазовой скоростью распространения возмущения в обрабатываемом слое (**следует знать, что фазовая скорость волны не переносит никакой энергии и никакого вещества!)**. Процесс колебательного движения, при котором возмущение, вызвавшее деформацию, не сопровождается поступательным перемещением вещества, называется волновым. Необходимыми условиями распространения волн в среде являются её упругость (отсутствие пластического течения) и инертность (противодействие деформациям). При этом всегда различают продольные и поперечные волны. В случае продольных волн в твёрдом теле упругость характеризуется модулем упругости (модуль Юнга, здесь – это E), а поперечных – модулем сдвига (G). Во всех волновых процессах в формулу скорости распространения волны входят плотность среды (ρ) и модуль Юнга ($E)$, характеризующие соответственно её инертность и упругость.

Уравнения, описывающие волновые процессы, являются гиперболическими. Получение их точных аналитических решений в случаях незатухающих (вынужденных) колебаний, происходящих под действием некоторой возмущающей силы, представляет значительные трудности. Решения подобных задач получены лишь в отдельных частных случаях при конкретно заданных законах изменения возмущающей нагрузки [23–28]. При этом рассмотрение вопросов, связанных с решением проблемы бесконечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей (деформаций и напряжений), в известной литературе авторами данного исследования не обнаружено. Однако, как показали выполненные в настоящей работе исследования, учёт релаксационных свойств среды (цементобетонной смеси) приводит к существенному отличию колебательного процесса по сравнению со случаем их неучёта. Учёт этих свойств позволяет устранить проблему скачкообразного изменения напряжений, деформаций и смещений в обрабатываемой среде во времени, возникающую ввиду заложенной в формуле закона Гука (1) бесконечной скорости распространения возмущений. В самом деле, продольное напряжение σ и деформация $\varepsilon=\partial u(z,t)/\partial z$ здесь не разделены во времени (в формуле закона Гука отсутствует напрямую время). Устранение проблемы бесконечной скорости приводит к существенному изменению не только формы колебаний, но и времени затухания колебательного процесса.

Таким образом, уравнение (2) описывает незатухающие колебания упругих тел (цементобетонной смеси). Для того, чтобы учесть затухание колебаний, волновое уравнение должно содержать слагаемые, учитывающие силы внутреннего трения. Согласно формуле (1) закона Гука, напряжение в смеси, вызванное некоторой силой, мгновенно (скачком) достигает соответствующих этой силе величин, то есть в этом законе заложена бесконечная скорость распространения возмущений. Однако скорости распространения любых физических величин не могут принимать бесконечных значений, и, следовательно, как напряжение, так и величина ε не могут мгновенно достигать любых конкретных величин. В реальной физической среде их изменения происходят с некоторым запаздыванием во времени согласно релаксационным свойствам материала (цементобетонной смеси), учитываемым некоторым коэффициентом τ_r (коэффициентом релаксации). Используя подход [22], можно получить уравнение, описывающее изменение продольного перемещения цементобетонной смеси $u(z,t)$ с учётом релаксационных свойств обрабатываемой среды:

$$\tau_r \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + a^2 \cdot \tau_r \cdot \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial z^2 \partial t}. \quad (3)$$

В уравнении (3) отсутствуют члены, учитывающие внутреннее сопротивление цементобетонной смеси при воздействии на неё нагрузки, вызывающей упругие перемещения её участков. Для учёта сопротивления среды примем, что сила сопротивления пропорциональна скорости изменения перемещения во времени:

$$F_c = -r \cdot \frac{du(z,t)}{dt}, \quad (4)$$

где знак "минус" означает, что сила сопротивления F_c имеет направление, противоположное скорости изменения перемещения; $r = a^2 \cdot \tau_r / \delta^2$ – коэффициент сопротивления, имеющий размерность с$^{-1}$, $\delta \equiv H$ – толщина обрабатываемого слоя цементобетонной смеси.

Таким образом, коэффициент r при фиксированных значениях a и H зависит лишь от коэффициента релаксации τ_r. Коэффициент r принят в таком виде, чтобы размерность соотношения $-r \cdot du/dt$ совпадала с размерностью всех других членов уравнения (3).

Для выполнения второго закона Ньютона (являющегося уравнением закона сохранения энергии в механике) применительно к затухающим колебаниям в цементобетонной смеси соотношение (4) подставим в правую часть уравнения (3):

$$\tau_r \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \tau_r \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} \right) - r \cdot \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (5)$$

Найдём точное аналитическое решение краевой задачи о затухающих колебаниях цементобетонной смеси, неподвижной на её поверхности ($z = H$) и на линии контакта с днищем формы ($z = 0$). По сути, это решение описывает (свободные, собственные) колебания в смеси при отсутствии внешних возмущающих сил. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид, аналогичный представленному в [22], а именно:

$$r \cdot \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + \tau_r \cdot \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial t^3} = a^2 \cdot \left\{ \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \tau_r \cdot \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial z^2 \partial t} \right\}, \quad (t > 0; 0 < z < H). \quad (6)$$

$$u(z,0) = \frac{\rho g}{E} \cdot z \cdot (H - z), \;\; \partial u(z,0)/\partial t = 0, \;\; \partial^2 u(z,0)/\partial t^2 = 0, \;\; u(0,t) = 0, \;\; u(H,t) = 0. \quad (7)$$

В (7) g – ускорение свободного падения. Ввиду громоздкости это решение, полученное в [22], здесь не представлено. Анализ результатов расчётов перемещений смеси по формуле (3.35) [22] позволяет заключить, что для

$$a \cdot \tau_r / H \le 10^{-4} \quad (8)$$

практически получаются незатухающие колебания в смеси.

Ниже, в табл. 1 представлены возможные значения τ_r для типичных значений a в цементобетонной смеси и высот H формуемых изделий.

Таблица 1

Значения τ_r, с для различных значений a и H

H, м	a, м/с			
	30	50	70	100
0,2	6,7x10^{-7}	4,0x10^{-7}	2,9x10^{-7}	2,0x10^{-7}
0,5	1,7x10^{-6}	1,0x10^{-6}	7,1x10^{-7}	5,0x10^{-7}
1,0	3,0x10^{-6}	2,0x10^{-6}	1,4x10^{-6}	1,0x10^{-6}

Анализ результатов, представленных в табл. 1, позволяет утверждать, что с увеличением высоты слоя формуемой цементобетонной смеси при неизменной скорости распространения возмущений в ней, предельное значение времени релаксации, когда можно считать колебания в смеси незатухающими, возрастает. Для одного и того же значения толщины слоя формуемой смеси, при увеличении скорости распространения возмущений в ней предельное значение времени релаксации для незатухающих колебаний уменьшается.

Из неравенства (8) следует, что время распространения возмущения по всей длине формуемого изделия (H/a) должно быть, как минимум, в 10^4 раз больше, чем время релаксации колебаний в смеси (τ_r). Тогда можно считать, что данная цементобетонная смесь способна поддерживать незатухающие колебания, а расчёты, проведенные в [15], справедливы. В иной ситуации необходимо, кроме решения (2), определяющего вынужденные колебания в смеси, учитывать также и собственные (свободные) колебания смеси, что значительно усложняет все расчёты.

1.2. Взаимодействие вибрационной формы с обрабатываемой цементобетонной средой в горизонтальном направлении.

Цементобетонная смесь при сдвиговых деформациях, так же как и при нормальных деформациях, обладает инерционными свойствами. Однако при действии сдвиговых деформаций в бетонной смеси, возникающих в результате крутильных колебаний вибрационной формы, определение характеристик взаимодействия вибрационной формы с бетонной смесью при помощи волновой теории колебаний представляет собой довольно сложную задачу. Поэтому для определения сил сопротивления цементобетонной смеси при сдвиговых деформациях следует, по нашему мнению, воспользоваться косвенными методами. В этом случае расчётная схема динамической системы "вибрационная форма – цементобетонная смесь" представляется следующим образом. Вибрационная форма имеет плоское днище и установлена на основании на упругих амортизаторах. На неё действует возмущение в виде горизонтально направленной гармонической силы $Q\sin\omega t.$ (Здесь, в этом пункте исследования, рассмотрены собственные колебания вибрационной формы).

При колебаниях вибролотка, на него со стороны цементобетонного слоя будет действовать сила кулонова трения

$$R = m_b g f_{mp} = FH\rho g f_{mp}, \tag{9}$$

где $F-$площадь днища вибрационной формы, m_b-масса обрабатываемого слоя смеси, $f_{mp}-$коэффициент трения цементобетонного слоя с днищем вибрационной формы; $H-$высота обрабатываемого слоя смеси.

На основании выражения (9), движение вибрационной формы в горизонтальном направлении может быть описано следующим нелинейным уравнением:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c_2 y + \Psi(t) = Q\sin\omega t, \tag{10}$$

где $m-$ масса вибрационной формы, $y-$ перемещение вибрационной формы в горизонтальном направлении; c_2- коэффициент жёсткости упругих амортизаторов в горизонтальном направлении; $\Psi(t)-$ нелинейная функция:

$$\Psi(t) = R\cdot sign\left(\frac{dy}{dt}\right). \tag{11}$$

Можно предположить, что вибрационная форма под действием гармонической силы $Q\sin\omega t$ будет совершать периодические колебания с частотой ω (т.е. вынужденные колебания). Тогда при стационарных колебаниях вибрационной формы нелинейную функцию $\Psi(t)$ с достаточной степенью точности можно представить в виде ряда Фурье [21]:

$$\Psi(t) = \frac{4R}{\pi}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}\right\}. \tag{12}$$

Подставляя функцию (12) в уравнение (10), можно получить следующее уравнение собственных колебаний вибрационной формы с цементобетонной смесью:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c_2 y = -\frac{4R}{\pi}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}\right\}. \tag{13}$$

Решение (13) при начальных условиях $y\big|_{t=0} = y_0$ и $\dot{y}\big|_{t=0} = \dot{y}_0$ имеет следующий вид:

$$y = y_0\cos\Omega t + \frac{\dot{y}_0}{\Omega}\sin\Omega t - \frac{4R}{\pi}\cdot\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\left(c_2 - m\cdot(2n+1)^2\omega^2\right)}\cdot\sin[(2n+1)\omega t)]\right]\right\}. \tag{14}$$

Анализ полученного выражения (14) показывает, что в динамической системе "вибрационная форма – цементобетонная смесь" в самой обрабатываемой среде (при горизонтально направленных колебаниях внешней возмущающей силы $Q\sin\omega t$) возникают свободные колебания с частотой $\Omega = \sqrt{c_2 / m}$, и она играет роль отрицательного возмущающего сопротивления. Более того, на частотах ω, удовлетворяющих соотношению

$$\omega = \Omega / (2n+1), \quad n = 0, 1, 2, 3, ..., \tag{15}$$

эти собственные колебания сопровождаются субрезонансными колебаниями, приводящими к раскачиванию вибрационной формы относительно её нейтрального положения. (По-видимому, подобные явления, приводящие к перекачке энергии, передаваемой возмущающей силой $Q\sin\omega t$, в субрезонансные колебания вибрационной формы, не всегда полезны! Поэтому, в ряде случаев следует предпринять специальные меры по подавлению подобных колебаний).

Если использовать метод эквивалентной линеаризации силы кулоновского трения [2], тогда (10) можно привести к следующему виду:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b_e\frac{dy}{dt} + c_2 y = Q\sin\omega t, \tag{16}$$

где b_e – эквивалентный коэффициент вязкого трения бетонной смеси в горизонтальном направлении:

$$b_e = \frac{4R}{\pi A_e \omega} = \frac{4m_b g f_{mp}}{\pi A_e \omega}, \tag{17}$$

где A_e – амплитуда колебаний вибрационной формы с учётом действия эквивалентного трения бетонной смеси.

В работе [15] определено значение A_e, которое с учётом замеченной авторами ошибки, имеет следующий вид:

$$A_e = \frac{Q}{\sqrt{(c_2 - m\omega^2)^2 + b_e^2\omega^2}}. \tag{18}$$

Подставляя зависимость (17) в выражение (18), найдём окончательно амплитуду (вынужденных) колебаний вибролотка с учётом значений эквивалентного коэффициента вязкого трения бетонной смеси b_e, т.е.

$$A_e = \sqrt{Q^2 - \frac{16R^2}{\pi^2}} / (c_2 - m\omega^2). \tag{19}$$

Собственные (свободные) колебания вибролотка определяются из (16) с правой частью, равной нулю:

$$y = \exp\left\{-\frac{b_e}{2m}\cdot t\right\}\left\{y_0\cos\tilde{\Omega}t + \frac{\left(\dot{y}_0 + y_0\cdot\frac{b_e}{2m}\right)}{\tilde{\Omega}}\cdot\sin\tilde{\Omega}t\right\}, \tag{20}$$

где $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{b_e^2}{4m^2}}$. При условии:

$$Q = 4R/\pi \tag{21}$$

свободные колебания вибролотка быстро затухают, а при $\omega = \Omega$ – становятся незатухающими:

$$y = y_0\cos\Omega t + \frac{\dot{y}_0}{\Omega}\sin\Omega t. \tag{22}$$

2. Анализ вынужденных колебаний вибрационной формы с бетонной смесью.

2.1. Анализ вертикально направленных вынужденных колебаний.

Решение волнового уравнения колебаний (2) будем отыскивать методом, развитым в [16], при следующих граничных условиях [15]:

$$\begin{cases} -m\dfrac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - c_1 u(0,t) + EF\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial z} = -Q\sin\omega t; \\ E\dfrac{\partial u(H,t)}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где c_1 – коэффициент жёсткости упругих амортизаторов в вертикальном направлении; Q – здесь и выше амплитуда возмущающей силы; ω – угловая частота вынужденных колебаний; F – площадь днища вибрационной формы с бетонной смесью.

Учитывая то обстоятельство, что граничные условия задачи (23) подвижные, метод Фурье разделения переменных при отыскании решений (2) следует применять не напрямую, как это сделано в [15], а найти ещё и решение задачи (2), (22) при следующих граничных и начальных условиях:

$$E\frac{\partial u_0(0,t)}{\partial z}=0;\ E\frac{\partial u_0(H,t)}{\partial z}=0;\ E\frac{\partial u(z,0)}{\partial z}=\rho g(H-z)\Leftrightarrow u(z,0)=\frac{\rho g}{E}\left(Hz-\frac{z^2}{2}\right), u(z,0)\equiv u_0(z,0)\ .(24)$$

В итоге получаем следующее решение задачи (2), (22):

$$u(z,t)=\frac{Q}{\left(c_1-\left[m+\frac{\rho F}{k}tgkH\right]\cdot\omega^2\right)}\cdot\frac{\cos k(H-z)}{\cos kH}\cdot\sin\omega t+u_0(z,t), \tag{25}$$

где $k=\frac{\omega}{a}$ – волновое число, а функция $u_0(z,t)$, являющаяся неучтённым компонентом решения, представленного в [15], обусловленная граничными и начальными условиями (24), и определяющая собственные колебания цементобетонной смеси при вертикально направленных колебаниях, имеет следующий вид:

$$u_0(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\sin\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{z}{H})\right]\cdot\sin\left[(2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{at}{H}\right], \tag{26}$$

где A_n – амплитуда n-ой собственной формы колебаний цементобетонной смеси при вертикально направленных колебаниях определяется соотношением:

$$A_n=\frac{\int_0^H\frac{\rho g}{E}\left\{z\cdot(H-\frac{z}{2})\right\}\cdot\sin\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{z}{H})\right]dz}{\int_0^H\sin^2\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{z}{H})\right]dz\cdot\left\{1-\frac{m}{c_1}\cdot\left[(2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{a}{H}\right]^2\right\}}. \tag{27}$$

Из анализа полученного решения (25) уравнения (2) следует, что выражение $\left(\frac{\rho F}{k}\mathrm{tg}kH\right)\omega^2$, названное в [15] величиной силы инерции цементобетонной смеси в вертикальном направлении (а на самом деле – это эффективная жёсткость цементобетонной смеси в вертикальном направлении), вряд ли может быть таковой при наличии резонансов вибрационной формы (имеющей собственную частоту колебаний $\Omega_1=\sqrt{\frac{c_1}{m}}$) с одной из частот собственных колебаний цементобетонной смеси ω_n, т.е. при наличии условия:

$$\Omega_1=(2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{a}{H},\ \ n\in N. \tag{28}$$

Анализ резонансного условия (28) показывает, что в рассматриваемой системе возможны субрезонансные колебания системы "вибрационная форма – цементобетонная смесь", которые здесь условно названы субрезонансами (2*n*–1)-ого порядка столба смеси высотой H, возникающие при условии:

$$H=\frac{\pi\cdot a\cdot(2n-1)}{\sqrt{c_1/m}}=\frac{\pi\cdot a}{\{\Omega_1/(2n-1)\}}. \tag{29}$$

Ниже, в табл. 2 представлены значения высоты столба смеси для типичных значений скорости распространения возмущений в ней a, при которой возникает наиболее мощный основной резонанс (*n*=1) для $\Omega_1=62{,}8c^{-1}$.

В табл. 3 представлены значения высоты столба цементобетонной смеси для различных значений скорости a (при $\Omega_1=62{,}8$с$^{-1}$), соответствующих субрезонансным колебаниям *m*-ого (3-го, 5-го и 7-го) порядка, *m*=2*n*–1.

Безусловно, необходимо в практике формования цементобетонных смесей избегать субрезонансных колебаний вибрационной формы со смесью, т.к. они приводят к резким раскачиваниям системы и неминуемым перегрузкам. Поэтому, при избегании резонансов типа (28), (29), можно считать, как и в [15], что приведенная масса цементобетонной смеси в вертикальном направлении m_{np1} может быть определена из следующего выражения:

$$m_{np1} = \frac{\rho F}{k}\,\mathrm{tg}kH. \tag{30}$$

Таблица 2

Значения H, при которых возможен основной резонанс в системе "вибрационная форма – бетонная смесь" при вертикально направленных колебаниях

$a,\ м/с$	30	50	70	100
$H,\ м$	1,5	2,5	3,5	5

Таблица 3

Значения H, при которых в системе "цементобетонная смесь – вибрационная форма" возможны субрезонансы 3-го, 5-го и 7-го порядков при вертикально направленных колебаниях

$a,\ м/с$	30	50	70	100
$H,\ м$ (m=3, n=2)	0,50	0,83	1,17	1,67
$H,\ м$ (m=5, n=3)	0,30	0,50	0,70	1,00
$H,\ м$ (m=7, n=4)	0,21	0,36	0,50	0,71

Величина удельной (на единицу площади поверхности вибрационной формы) приведенной массы цементобетонной смеси в вертикальном направлении определяется из выражения (30):

$$m_{y1} = m_{np1} / F = \frac{\rho}{k}\,\mathrm{tg}kH. \tag{31}$$

Анализ формул (30) и (31) показывает, что при определённых значениях высоты столба смеси H и заданных значениях k, а, значит, и ω, a, возможны ситуации, когда эта масса (приведенная или удельная) принимает бесконечно большие значения, что в физическом смысле означает отсутствие возмущений в смеси при наличии внешней возмущающей силы (с амплитудой Q и частотой ω):

$$\frac{\omega}{a}\cdot H = \frac{\pi}{2}\cdot(2n-1),\quad n\in N. \tag{32}$$

Следует отметить, что подобное утверждение вовсе не означает, что в смеси вообще отсутствуют какие-либо возмущения, поскольку, в соответствии с изложенным выше, смесь даже в этом случае может поддерживать собственные колебания.

Существуют также условия, при которых смесь не проявляет никаких инерционных свойств при вертикально направленных колебаниях внешней возмущающей силы:

$$\frac{\omega}{a}\cdot H = n\cdot\pi,\quad n\in N. \tag{33}$$

В соответствии с (30), (31), это физически означает, что вся подводимая извне к вибрационной форме энергия растрачивается не на уплотнение смеси, а на бесполезное раскачивание самой формы (её массы m). Безусловно, таких режимов функционирования системы следует избегать, как неэффективных!

Значения приведенной и удельной масс цементобетонной смеси существенно зависят от её динамического модуля упругой деформации E, плотности смеси ρ, скорости распространения возмущений в уплотняемом слое a, толщины обрабатываемого слоя H, площади опорной поверхности днища формы F, угловой частоты колебаний ω. Кроме того, эти значения во многом определяются и наличием (отсутствием) условий (соотношений) типа (32), (33). По мнению авторов настоящего исследования, полученные в [15] формулы для приведенной и удельной масс цементобетонной смеси некорректны, т.к. не учитывают диссипативных процессов в ней, что существенно изменяет все представленные по этим параметрам соотношения. (По-видимому, это является предметом отдельного научного исследования).

2.2. Анализ взаимодействия вертикальных стенок вибрационной формы с цементобетонной смесью при горизонтально направленных колебаниях.

Для определения характера взаимодействия противоположными вертикальными стенками вибрационной формы, а с обрабатываемой цементобетонной средой при действии нормальных горизонтально направленных колебаний исследуем динамическую систему "вибрационная форма – цементобетонная смесь", которая аналогична представленной в [15]. Здесь вибрационная форма конструктивно выполнена с плоским днищем, а обрабатываемая среда представлена в виде системы с распределёнными параметрами. Вибрационная форма смонтирована на основании с помощью упругих амортизаторов и на неё действует возмущение в виде горизонтально направленной гармонической силы $Q\sin\omega t$.

При изучении взаимодействия цементобетонной смеси с вертикальными стенками вибрационной формы пренебрегаем действием сил трения бетонной смеси о днище вибрационной формы. Тогда дифференциальное уравнение движения уплотняемой смеси в направлении горизонтальной (вдоль днища формы) координаты y за время t будет иметь вид [21]:

$$E\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} = \rho\frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial t^2}. \tag{31}$$

Решение волнового уравнения колебаний (31) будем отыскивать методом, развитым в [16], при следующих граничных условиях:

$$-m\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial t^2} - c_2 u(0,t) + EF_1\frac{\partial u(0,t)}{\partial y} = -Q\sin\omega t;\;\; u(0,t) = u(a_0,t). \tag{32}$$

Здесь F_1 – площадь поверхности одной вертикальной стенки, контактирующей с цементобетонной смесью; a_0 – расстояние между вертикальными стенками (ширина обрабатываемого цементобетонного слоя). Остальные обозначения приведены выше.

Искомое решение задачи (31), (32) представим в виде:

$$u(y,t) = \frac{Q\cdot\left(\dfrac{1-\cos ka_0}{\sin ka_0}\sin ky + \cos ky\right)}{c_2 - \left[m + \dfrac{\rho F_1(1-\cos ka_0)}{k\sin ka_0}\right]\omega^2}\sin\omega t + u_0(y,t), \tag{33}$$

где $u_0(y,t)$ – составляющая решения задачи (31), (32), определяющая свободные собственные колебания бетонной смеси, как системы с распределёнными параметрами, при следующих граничных и начальных условиях:

$$u_0(0,t) = u_0(a_0,t) = 0;\;\; u_0(y,0) = B = const. \tag{34}$$

Решение $u_0(y,t)$ имеет следующий вид:

$$u_0(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{A}_n\cdot\cos\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{y}{a_0})\right]\cdot\cos\left[(2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{at}{a_0}\right],\;\; n\in N. \tag{35}$$

Амплитуда $\tilde{A}_n$ определяется из следующего соотношения:

$$\tilde{A}_n = \frac{\int\limits_0^{a_0} B\cdot\cos\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{y}{a_0})\right]dy}{\int\limits_0^{a_0}\cos^2\left[(2n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\frac{y}{a_0})\right]dz\cdot\left\{1-\frac{m}{c_2}\cdot\left[(2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{a}{a_0}\right]^2\right\}}. \tag{36}$$

Из анализа решения (33) следует, что при уплотнении цементобетонной смеси с помощью горизонтально направленных колебаний необходимо избегать ситуаций, приводящих к субрезонансным колебаниям смеси совместно с формой, в которой эта смесь находится. Такие колебания реализуются при условии:

$$\Omega_2 = \sqrt{c_2/m} = (2n-1)\cdot\pi\cdot\frac{a}{a_0}. \tag{37}$$

Расстояние между вертикальными стенками (ширина обрабатываемого слоя), при котором реализуются субрезонансные колебания совместно формы и смеси, приводящие к значительным размахам этих колебаний и неизбежному выходу из строя металлоконструкции (самой формы) вибрационной установки для уплотнения цементобетонной смеси, можно найти из соотношения:

$$a_0 = (2n-1)\cdot\pi\cdot a/\Omega_2 = \frac{\pi\cdot a}{\left(\Omega_2/(2n-1)\right)}. \tag{38}$$

Если приняты меры по отстройке от нежелательных субрезонансных колебаний совместно формы и смеси, тогда выражение $\left[\dfrac{\rho F_1(1-\cos ka_0)}{k\sin ka_0}\right]\cdot\omega^2$ представляет собой не что иное, как величину эквивалентной жёсткости цементобетонной смеси при её уплотнении горизонтально направленными колебаниями относительно днища вибрационной формы. (Кстати, в работе [15] неправильно интерпретируется это выражение, как величина силы инерции цементобетонной смеси, взаимодействующей с вертикальными стенками вибрационной формы при горизонтально направленных колебаниях. Чтобы убедиться в правоте высказанных авторами данного исследования суждений по этому поводу, достаточно проанализировать размерность указанного выражения!). Далее можно цементобетонную смесь, взаимодействующую с вертикальными стенками вибрационной формы при горизонтально направленных колебаниях, представлять в виде приведенной массы m_{np2}, т.е.

$$m_{np2} = \frac{\rho F_1(1-\cos ka_0)}{k\sin ka_0} = \frac{\rho F_1}{k}\cdot tg\left(\frac{ka_0}{2}\right). \tag{39}$$

Анализ формулы (39) показывает, что существуют две ситуации, которые по-разному интерпретируют инерционные свойства смеси при её уплотнении таким способом. Ситуация 1. Смесь вообще не проявляет никаких инерционных свойств, т.е. её масса равна нулю. Такое возможно в том случае, если выполняется условие:

$$\frac{\omega\cdot a_0}{2\cdot a} = n\cdot\pi,\quad n\in N. \tag{40}$$

Ситуация 2. Смесь имеет бесконечную по величине массу, которая препятствует действию на неё каких либо возмущений. Такое возможно в том случае, если выполняется условие:

$$\frac{\omega\cdot a_0}{2\cdot a} = (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2},\quad n\in N. \tag{41}$$

Полученные при таком анализе результаты, приведенные выше, свидетельствуют о том, что интерпретация выражения (39) как приведенной массы уплотняемой смеси, не вполне корректна и нуждается в доработке. По-видимому, это должно быть предметом отдельного исследования.

В рассматриваемой динамической системе при горизонтально направленных колебаниях также будут действовать силы трения бетонного столба о днище вибрационной формы, которые можно учесть с помощью эквивалентного коэффициента сопротивления b_e бетонной смеси (17). Тогда с учётом выражений (18), (19), (33) в последней зависимости необходимо внести изменения, а именно: следует в первом члене, пропорциональном $\sin\omega t$, заменить:

$$Q \leftrightarrow \sqrt{Q^2 - \frac{16R^2}{\pi^2}},\quad \omega\cdot t \leftrightarrow \omega\cdot t - \varphi_e, \tag{42}$$

где φ_e – угол сдвига фаз между перемещением и амплитудой возмущающих сил, равный:

$$\varphi_e = arctg\left\{\frac{b_e\cdot\omega}{c_2 - m\omega^2}\right\}. \tag{43}$$

Значения m_{np2} (39) существенно зависят от динамического модуля упругой деформации E обрабатываемой цементобетонной смеси, её плотности ρ, фазовой скорости распространения возмущения в уплотняемом слое a, угловой частоты колебаний ω, ширины обрабатываемого слоя a_0, и площади поверхности одной из вертикальных стенок формы F_1.

По мнению авторов данного исследования, под выражениями $m_{np1}\omega^2$, $m_{np2}\omega^2$, в отличие от мнения авторов [15], следует понимать эффективную жёсткость бетонной смеси, как системы с распределёнными параметрами, подверженной процессу уплотнения вертикально или горизонтально направленными колебаниями извне. Тогда возникает логичный вывод, исходя из соотношений (28)-(33) и (37)-(41), о том, что жёсткостные свойства цементобетонной смеси при её уплотнении в некоторых случаях (в зависимости от высоты столба смеси или ширины днища вибрационной формы) приобретают свойства абсолютно твёрдого тела (жёсткость стремится к бесконечности) или абсолютно податливого тела (жёсткость смеси стремится к нулю).

Выводы

1. На основании методов математической физики и теории колебаний механики сплошной среды изучен процесс распространения волн деформации в уплотняемой среде, представленной в виде системы с распределёнными параметрами, и определён закон деформирования уплотняемой среды при разнонаправленных колебаниях, действующих на днище вибрационной формы в вертикальном и горизонтальном направлениях, а также на вертикальные стенки вибрационной формы при горизонтально направленных колебаниях, воздействии на неё горизонтально направленными колебаниями со стороны вертикально, близко расположенных друг к другу стенок вибрационной формы.
2. Получены теоретические выражения, позволяющие достаточно точно и корректно описывать поведение реальной динамической системы «вибрационная форма – уплотняемая среда» при формовании бетонных изделий из цементобетонных смесей путём приложения разнонаправленных колебаний.
3. Полученные в данной работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчёта вибромашин для уплотнения строительных/бетонных смесей как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

Список использованной литературы

1. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия вибрирующей плиты с цементобетонной смесью / А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко, Н.А. Маслова // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 2 (67). Частина І. – С. 93-98.
2. Маслов А.Г. Вибрационные машины и процессы в дорожно-строительном производстве / А.Г. Маслов, Ю.С. Саленко. – Кременчук: ПП Щербатых О.В., 2014. – 262 с.
3. Иткин А.Ф. Вибрационные машины для формования бетонных изделий / А.Ф. Иткин. – К.: "МП Леся", 2009. – 152 с.
4. Chen X. Experimental study and analytical formulation of mechanical behavior of concrete / X. Chen, S. Wu, J. Zhou // Construction and Building Materials. – 2013. – Vol. 47. – P. 662-670.
5. Tattersall G.H. Effect of Vibration on the Rheological Properties of Fresh Cement Pastes and Concretes / G.H. Tattersall // Rheology of Fresh Cement and Concrete. Proceedings of the International Conference. P.F.G. Banfill, ed., University of Liverpool, UK, March 16-29. – London: Chapman and Hall, 1990. – P. 323-338.
6. Kakuta S. Rheology of Fresh Concrete under Vibration / S. Kakuta, T. Kojima // Rheology of Fresh Cement and Concrete. Proceedings of the International Conference. P.F.G. Banfill, ed., University of Liverpool, UK, March 16-29. – London: Chapman and Hall, 1990.
7. Szwabowski J. Influence of Three-Phase Structure on the Yield Stress of Fresh Concrete / J. Szwabowski// Rheology of Fresh Cement and Concrete. Proceedings of the International Conference. P.F.G. Banfill, ed., University of Liverpool, UK, March 16-29. – London: Chapman and Hall, 1990. – P. 241-248.
8. Klosinski J. Frequency analysis of vibratory device model (in Polish) / J. Klosinski, A. Trabka // Pneumatyka. – 2010. – Vol. 1. – P. 46-49.
9. Zoltowski B. Research of machine dynamics (in Polish) / B. Zoltowski. – 2002. – Wyd. MARKAR, Bydgoszcz.
10. Назаренко И.И. Прикладные задачи теории вибрационных систем / И.И. Назаренко. – К.: ІСДО, 1993. – 216 с.
11. Назаренко І.І. Вібраційні машини і процеси будівельної індустрії / І.І. Назаренко. – К.: КНУБА, 2007. – 203 с.
12. Свідерській А.Т. Вивчення та впровадження сучасних гідравлічних вібраційних систем у виробничий процес – шлях до створення універсальних самоадаптованих високопродуктивних віброущільнювачів / А.Т. Свідерський // Техніка будівництва. – К.: КНУБА, 2004. – № 13. – С. 66-70.
13. Ручинський М.М. Високоефективна машина для формування фундаментних блоків / М.М. Ручинський // Техніка будівництва. – К.: КНУБА, 2004. – № 13. – С. 63-65.
14. Назаренко І.І. Теорія вібромашин для ущільнення будівельних сумішей на основі синтезу дискретно-континуальних систем / І.І. Назаренко, М.М. Ручинський, Б.М. Пентюк // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – №4 (56). – С. 55-59.
15. Маслов А.Г. Исследование взаимодействия вибрационной формы с бетонной смесью при разнонаправленных колебаниях / А.Г. Маслов, Л.Н. Ахметова, А.И. Елизаров // Вісник Кременчуцкого національного університету імені Михайла Остроградського. – 2017. – Вип. 6 (107). Частина І. – С. 123-128.
16. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
17. Гробов В.А. Теория колебаний механических систем / В.А. Гробов. – К.: Вища школа, 1982. – 183 с.
18. Потураев В.Н. Вибрационная техника и технологии в энергоёмких производствах / В.Н. Потураев, В.П. Франчук, В.П. Надутый. – Днепропетровск: НГА Украины, 2002. – 190 с.

19. Франчук В.П. Учёт большого слоя материала вибрационных машин технологического назначения / В.П. Франчук // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – №2 (62). – С. 48-53.
20. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания механических систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1966. – 336 с.
21. Маслов А.Г. Вибрационные машины для приготовления и уплотнения бетонных смесей / А.Г. Маслов, А.Ф. Иткин, Ю.С. Саленко. – Кременчуг: ЧП Щербатых А.В., 2014. – 324 с.
22. Кудинов И.В. Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учётом релаксационных свойств материалов / И.В. Кудинов, В.А. Кудинов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 2014. – №5. – С. 63-75.
23. Фролов К.В. Избранные труды в двух томах. Т. 1: Вибрация и техника / К.В. Фролов. – М.: Наука, 2007. – 351 с.
24. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 592 с.
25. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
26. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих физиков и техников / Я.Б. Зельдович, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1982. – 510 с.
27. Юнин Е.К. Загадки и парадоксы сухого трения / Е.К. Юнин. – М.: Книжный дом "Либроком", 2009. – 128 с.
28. Кабисов К.С. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями / К.С. Кабисов, Т.Ф. Камалов, В.А. Лурье. – М.: КомКнига, 2010. – 360 с.