УДК 658.51.012

В.Д. ХОДУСОВ
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
М.О. ПИГНАСТЫЙ
Харьковский Национальный Университет
Радиоэлектроники "ХНУРЭ "

О МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ЛИНИЙ

Поточная линия – это динамическая распределенная система. Все большее распространение при проектировании систем управления таким поточным производством получают модели с использованием уравнений в частных производных (PDE-модели). Основными параметрами в данных моделях являются размер межоперационных накопителей и значение темпа обработки предметов труда. Их значения зависят от времени и места в технологическом маршруте (технологической позиции обработки изделия). Поточная линия постоянно испытывает колебания потоковых параметров. Наличие колебаний потоковых параметров в отдельных случаях приводит к остановке производственного процесса из-за отсутствия заготовок в межоперационном заделе перед технологической операцией или из-за переполнения межоперационного бункера после технологической операции. Так как остановка производственного процесса является недопустимым фактом в большинстве случаев, то обеспечение устойчивости функционирования параметров производственной линии относительно нормативного невозмущенного состояния является одним из главных требований, предъявляемых к производственной системе. В связи с этим, важным вопросом является определение критериев или соотношений между потоковыми параметрами производственной системы, которые позволяют предсказать остановку производственного процесса. В статье рассмотрены методы исследования устойчивости поточных линий и обсуждаются критерии в виде соотношения между потоковыми параметрами, которые позволяют определить режимы бесперебойного функционирования производственного процесса.

Ключевые слова: кинетическое уравнение, производственная линия, массовое производство, незавершенное производство, балансовые уравнения, квазистатический процесс, стохастический процесс.

В.Д. ХОДУСОВ
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
М.О. ПІГНАСТИЙ
Харківський Національний Університет
Радіоелектроніки"ХНУРЕ"

ПРО МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПОТОКОВИХ ПАРАМЕТРІВ ВИРОБНИЧИХ ЛІНІЙ

Поточна лінія – це динамічна розподілена система. Все більше розповсюдження при проектуванні систем керування таким поточним виробництвом отримують моделі з використанням рівнянь у частинних похідних (PDE-моделях). Основними параметрами в даних моделях є розмір міжопераційних накопичувачів та значення темпу обробки предметів праці. Ці значення залежать від часу та місця в технологічному маршруті (технологічної позиції обробки виробів). Поточна лінія постійно відчуває впливи коливань потокових параметрів. Наявність коливань потокових параметрів у окремих випадках приводить до зупинки виробничого процесу через відсутність заготовок в міжопераційному заділі перед технологічною операцією або через переповнення міжопераційного бункера після технологічної операції. Оскільки зупинка виробничого процесу є неприпустимим фактом у більшості випадків, тому забезпечення стабільності функціонування параметрів виробничої лінії відносно нормативного незбуреного стану є однією з головних вимог, які висуваються до виробничої системи. У зв'язку з цим важливим питанням є визначення критеріїв або співвідношення між потоковими параметрами виробничої системи, які дозволяють передбачити зупинку виробничого процесу. В статті розглядаються методи дослідження стійкості поточних ліній і обговорюються критерії у вигляді співвідношення між потоковими параметрами, які дозволяють визначити режими безперебійного функціонування виробничого процесу.

Ключові слова: кінетичне рівняння, виробнича лінія, масове виробництво, незавершене виробництво, балансові рівняння, квазістатичний процес, стохастичний процес.

V.D. KHODUSOV
V. N. Karazin Kharkiv National University
M.O. PIHNASTYI
Kharkiv National University of Radio Electronics

ABOUT METHODS OF RESEARCH OF STABILITY OF STREAM PARAMETERS OF PRODUCTION LINES

The flow line is a dynamic distributed system. More and more widely used in the design of control systems for such flow production are models using partial differential equations (PDE-models). The main parameters in these models are the size of interpretational stocks and the pace of processing of labor items. Their values depend on the time and place in the technological route (the technological position of processing the product). The flow line constantly experiences fluctuations in the flow parameters. The presence of fluctuations in the flow parameters in some cases leads to the stopping of the production process due to the absence of blanks in the interpretational stock before the technological operation or because of the overflow of the interoperable hopper after the technological operation. Since stopping the production process is an unacceptable fact in most cases, ensuring the stability of the functioning of the parameters of the production line relative to the normative unperturbed state is one of the main requirements for the production system. In this regard, an important issue is the definition of criteria or relationships between the flow parameters of the production system, which allow us to predict the stoppage of the production process. In the article the review of the works devoted to methods of research of stability of stream parameters of production lines is given. Methods for investigating the stability of production lines using the decomposition of stream parameters along the technological route into a Fourier series are proposed. The characteristic equation of the production system for the synchronized mode of functioning of equipment along the technological route is recorded in the first approximation and its investigation is carried out. A critical case is considered in detail. Stability criteria for flow parameters in the form of interrelation of flow parameters that determine the modes of uninterrupted operation of the production process are determined.

Keywords: kinetic equation, the production line, mass production, work in progress, balance equations, quasi-static process, stochastic process.

Постановка проблемы

Вопрос устойчивого функционирования поточных линий является важнейшей теоретической и практической проблемой управления производством [1–3]. Особое значение вопрос устойчивости приобретает в тех случаях, в которых нужна большая точность и скорость управления [3–7]. Незначительные отклонения параметров поточной линии по производству полупроводниковой продукции могут приводить к крупномасштабным отклонениям потоковых параметров [8, С. 9]. Приводимые экспериментальные данные свидетельствуют о том, что об отклонения пропускной способности поточной линии от заданного нормативного значения достигают 20%. Время существования возмущений составляет нескольких недель. При рассмотрении квазистатических моделей производственных процессов подчеркивается, что PDE-уравнения и дополняющее уравнение состояния должны основываться на устойчивом поведении потоковых параметров [9, С. 4590].

Потоковые параметры производственной линии, также, как и параметры механической системы, является устойчивыми, если состояние производственного процесса мало изменяются под действием внутренних и внешних возмущающих воздействий, и наоборот, неустойчивым, если ее состояние сильно изменяются даже под действием очень малых внешних возмущающих воздействий. Если под действием малых внутренних или внешних возмущающих воздействий некоторые из потоковых параметров отклоняются от заданного технологией режима (например, режима синхронизации работы оборудования), то возникает необходимость вернуть их в первоначальное невозмущенное состояние. Перед руководителем производства встает важный вопрос: необходимо ли для этого использовать имеющиеся в распоряжении технологические ресурсы или для поточной линии восстановится исходное состояние параметров самостоятельно, без дополнительных затрат технологических ресурсов?

Анализ последних исследований и публикаций

Поточная линия постоянно испытывает колебания потоковых параметров [2; 8, С. 9]. Если управляющие воздействия организованы в требуемом объеме, то отклонения от заданного технологией режима будут оставаться малыми. В этом случае поведение потоковых параметров будет устойчиво. Если же этого добиться не удается, то отклонения потоковых параметров с течением времени могут привести к переполнению межоперационных накопителей или их опустошению, что приведет к остановке поточной линии [11]. Функционирование поточной линии может стать неустойчивым как от внутренних, так и от внешних возмущающих факторов, возникающих внезапно или непрерывно. Отключение подачи электроэнергии, выход из строя теплообменника, компрессора или другого оборудования могут настолько нарушить нормальный режим производства, что производственный процесс станет неустойчивым. Устойчивость функционирования производственной линии является одним из главных требований, предъявляемых к производственной системе [9, 11]. Основная задача сохранения устойчивости параметров производственного процесса состоит в определении признаков устойчивости или неустойчивости [11–13; 14, С. 1077]. Исследование устойчивости потоковых параметров не представляет серьезных трудностей в тех случаях, когда дифференциальные уравнения возмущенного движения удается проинтегрировать в замкнутой форме [10]. Но такого рода случаи являются исключительными и на практике встречаются редко. Усилия исследователей направлены на то, чтобы разработать методы решения задач устойчивости, не прибегая к интегрированию уравнений движения. При этом используется часто метод линеаризации уравнений в малых возмущениях. Происходит замена нелинейной системы уравнений линейной, то есть замена одной задачи другой. Если правомерность такой замены обоснована, то следующим шагом является получение необходимых и достаточных условия устойчивости по первому приближению [13]. Выяснив условия, при которых задача решается в первом приближении, рассмотрим основные случаи, когда при исследовании устойчивости нельзя ограничиваться рассмотрением первого приближения. Приемы решения задачи устойчивости для параметров производственного процесса могут быть разделены на две категории. К первой категории относятся способы, которые заключаются в определении общего или частного решения дифференциальных уравнений. Решения приходится искать в виде рядов. Можно указать способы решения задачи устойчивости, которые не требуют поиска частных или общих решений уравнений возмущенного движения, а приводят к отысканию некоторых функций от времени и возмущенных переменных. Примером служит теорема Лагранжа об устойчивости равновесия. Устойчивость обеспечивается существованием силовой функции, обладающей специальными свойствами. В основу такого метода положено несколько основных теорем Ляпунова. Эти теоремы оказались настолько эффективными, что при их помощи удалось исключительно просто решить задачу об устойчивости параметров поточной линии в квазистатическом приближении для одного из простых случаев уравнения состояния [12, С. 4588]. Второй метод Ляпунова в настоящее время является основным методом решения задачи устойчивости. Установлена универсальность и эффективность второго метода Ляпунова для широкого круга производственных задач. При исследовании устойчивости параметров производственного процесса первым методом Ляпунова взаимосвязь параметров может быть получена из системы многомоментных балансовых уравнений [15–16]. В качестве невозмущенного решения выбирается, как правило, нормативный режим. В большинстве практических случае таким режимом является равновесный синхронизированный режим функционирования оборудования [12, С. 4588; 9, 14]. Отклонения от невозмущенного состояния потоковых параметров, которые вызываются возмущающими воздействиями на параметры поточной линии, нежелательны.

Изложение основного материала исследования

Пусть потоковые параметры $[\chi]_k$ получат случайные малые возмущения:

$$[y]_k = [\chi]_k - [\chi]_k^* \tag{1}$$

в окрестности $[\chi]_k^*$. Линеаризуем систему многомоментных уравнений [15] относительно малых возмущений (1) в окрестности невозмущенного состояния $[\chi]_k^*$. Системе уравнений в малых возмущениях с постоянными коэффициентами соответствует характеристическое уравнение [4, 17]. Если корни характеристического уравнения имеют отрицательную реальную часть, то параметры производственного процесса являются устойчивыми. Решение задачи устойчивости для системы уравнений в малых возмущениях усложняется в случае, если коэффициенты не являются постоянными. В данном случае эффективным представляется исследование устойчивости потоковых параметров методом функций Ляпунова [12, С. 4588; 18, С. 39]. Если удастся найти положительно определенную функцию $V([y]_1,[y]_2,...,[y]_k,...,[y]_{N_k})$, такую, что

$$V(0,0,...,0,...,0) \equiv 0\,, \quad ([y]_1,[y]_2,...,[y]_k,...,[y]_{N_k}) > 0\,, \quad \frac{d}{dt}V([y]_1,[y]_2,...,[y]_k,...,[y]_{N_k}) \le 0\,,$$

тогда параметры производственного процесса устойчивы, причем в случае строгого неравенства – асимптотически. Простейшим случаем, когда теоремы Ляпунова дают возможность установить устойчивость невозмущенного состояния потоковых параметров, является очевидно тот, когда балансовые уравнения допускают аналитическое интегрирование уравнения движения [18, С. 39; 10, 19, 20]. Дополнительные возможности предоставляются при исследовании устойчивости потоковых параметров первым методом Ляпунова с использованием метода собственных функций. Если коэффициенты в уравнении для малых возмущений не зависят от времени, то малое произвольное возмущение можно представить в виде разложения в ряд Фурье:

$$[y]_k = \{y_k\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\{y_k\}_j \cdot \sin[k_j \cdot S] + \sum_{j=1}^{\infty}[y_k]_j \cdot \cos[k_j \cdot S], \qquad k_j = \frac{2\cdot\pi\cdot j}{S_d}\,, \tag{2}$$

где $\{y_k\}_0$, $\{y_k\}_j$, $[y_n]_j$ – коэффициенты разложения малых возмущений $[y]_k$ параметров $[\chi]_k$ вдоль технологического маршрута. Подставляя в систему балансовых уравнений вместо $[y]_k$ их разложения в ряд Фурье (2), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $[y]_k$ параметров $[\chi]_k$ [15]. Метод собственных функций [19–22] позволяет аналитически получить критерий устойчивости по Ляпунову для потоковых параметров производственного процесса. Если производственной системе можно поставить в соответствии функционал [12, С. 4588]:

$$W = \int_0^{S_d} w(t,S)\cdot dS\,, \qquad \frac{dW}{dt} \le 0\,,$$

тогда исследование устойчивости потоковых параметров относительно малых возмущений $[y]_n$ сводится к исследованию минимума функционала. В работе [12, С. 4588] функционал представлен виде:

$$W = \int_0^1 \left[(m+\rho(S,t))^3 - (m+\rho_{SS}(S,t))^3\right]^2 dS\,,$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{3}\left[\rho(S,t)-\rho_{SS}(S,t)\right]^4 - \frac{2}{3}\left[\rho(S,t)+2\rho_{SS}(S,t)+3m\right]^2\left[\rho(S,t)-\rho_{SS}(S,t)\right]^2 \le 0\,,$$

где m – количество единиц технологического оборудования поточной линии, $\rho(S,t)$, $\rho_{SS}(S,t)$ плотность предметов труда вдоль технологического маршрута в возмущенном и невозмущенном состоянии соответственно. Если подынтегральная функция является первым интегралом движения или их комбинацией, тогда условие $\frac{dW}{dt} = 0$ переходит в тождество, а исследование устойчивости потоковых параметров относительно малых возмущений $[y]_n$ сводится к исследованию минимума функционала относительно невозмущенного состояния $W\big|_0$:

$$W - W\big|_0 = \left(\int_0^{S_d} w\cdot dS - W\big|_0\right) = \int_0^{S_d}\left(w - w\big|_0\right)\cdot dS > 0\,.$$

Из произвольности малых возмущений $[y]_n$ следует, что подынтегральное выражение должно быть определенно положительно в любой точке S, причем равенство выполняется только для $[y]_0 = [y]_1 = \ldots = [y]_N \equiv 0$. Рассмотренный подход широко используется при исследовании устойчивости равновесного состояния системы многих тел, получил название энергетического принципа [22, 23].

Критерии устойчивости потоковых параметров. Влияние малых возмущающих факторов на состояние потоковых параметров является не одинаковым для разных поточных линий [8]. Для одних поточных линий это влияние незначительно, так как возмущенное состояние потоковых параметров мало отличается от невозмущенного. Напротив, для других влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы неизбежно существуют, то задача устойчивости параметров поточных линий приобретает очень важное теоретическое и практическое значение [9, 12, 14]. Под возмущающими факторами потоковых параметров будем понимать воздействия, не учитываемые при описании технологического процесса вследствие их малости по сравнению с основными факторами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно, так и непрерывно. В первом случае их влияние сведется к малому изменению начального состояния параметров поточной линии. Во втором случае это означает, что составленные уравнения для потоковых параметров отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены.

а)Условия устойчивости параметров в нулевом приближении по параметру $Kv \ll 1$ ($Pm \approx 1$) [15]. При исследовании параметров производственного процесса для случая $Kv \ll 1$, $Pm \approx 1$ воспользуемся замкнутой системой уравнений балансов в нулевом приближении по малому параметру $Kv \ll 1$ для 2-х моментного описания [25]. Условием синхронизации производительности технологического оборудования является $\left.\frac{\partial[\chi]_{1\psi}}{\partial S}\right|_0 = 0$. Будем полагать, что существует невозмущенное решение $[\chi]_k^* = [\chi]_k^*(t,S)$. Пусть параметры $[\chi]_k$ получат случайные малые возмущения $[y]_k = [\chi]_k - [\chi]_k^*$ (1). Линеаризованная система балансовых уравнений в малых возмущениях $[y]_k$ в окрестности невозмущенного состояния $[\chi]_k^*$ с учетом условия синхронизации технологического оборудования имеет вид:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}=0, \qquad A=\left.\frac{[\chi]_{1\psi}-[\chi]_1}{[\chi]_0}\right|_0, \qquad \left.\frac{\partial[\chi]_{1\psi}}{\partial S}\right|_0=0 \quad B=\left.\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\right|_0,$$

$$\frac{\partial[y]_1}{\partial t}+\frac{\partial[y]_1}{\partial S}\cdot B+[y]_1\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot A\cdot B+[y]_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0. \tag{3}$$

Символ $|_0$ обозначает, что разложение осуществлено в окрестности невозмущенного состояния $[\chi]_k^*=[\chi]_k^*(t,S)$. Период T_v существования возмущения потоковых параметров $[\chi]_k$ составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время как период изменения коэффициентов *A* и *B* (3) при малых возмущениях $[y]_k$ определяется стратегическим управлением предприятия и составляет от нескольких месяцев до нескольких лет [8, 12], (T_d = 8 недель [24, С. 445]). В связи с этим будем предполагать, что для коэффициентов *A* и *B* (3) на протяжении периода T_v существования возмущения:

$$\frac{A}{T_v}>>\frac{\partial A}{\partial t}, \qquad \frac{B}{T_v}>>\frac{\partial B}{\partial t}, - \tag{4}$$

и считать, что коэффициенты при малых возмущениях $[y]_k$ в уравнениях в частных производных (3) зависят только от *S*. Разложим малые возмущения $[y]_k$ потоковых параметров $[\chi]_k$ в ряд Фурье (2). Подставляя в систему уравнений (3) вместо $[y]_k$ их разложение в ряд Фурье, получим систему уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений $[y]_k$ потоковых параметров $[\chi]_k$:

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{\partial\{y_1\}_0}{\partial t}+\{y_1\}_0\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\{y_0\}_0\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0 \tag{5}$$

и для последующих слагаемых разложения:

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt}-[y_1]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt}+\{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{\partial\{y_1\}_j}{\partial t}-[y_1]_j\cdot k_j\cdot B+\{y_1\}_j\cdot\frac{\partial B}{\partial S}-[y_0]_j\cdot k_j\cdot(A\cdot B)+\{y_0\}_j\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial[y_1]_j}{\partial t}+\{y_1\}_j\cdot k_j\cdot B+[y_1]_j\cdot\frac{\partial B}{\partial S}+\{y_0\}_j\cdot k_j\cdot(A\cdot B)+[y_0]_j\cdot\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}=0,$$

с характеристическими уравнениями:

$$\begin{vmatrix}(\vartheta_0) & 0\\ \left(\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right) & \left(\frac{\partial B}{\partial S}+\vartheta_0\right)\end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix}(\vartheta_j) & 0 & 0 & (-k_j)\\ 0 & (\vartheta_j) & (k_j) & 0\\ \left(\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right) & (-k_j\cdot(A\cdot B)) & \left(\vartheta_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right) & (-k_j\cdot B)\\ (k_j\cdot(A\cdot B)) & \left(\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right) & (k_j\cdot B) & \left(\vartheta_j+\frac{\partial B}{\partial S}\right)\end{vmatrix}=0, \tag{7}$$

определяющими связь между собственным числом ϑ_j и волновым числом k_j:

$$\vartheta_0\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial S}+\vartheta_0\right)=0, \quad \vartheta_j^2+\vartheta_j\cdot\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm i\cdot B\cdot k_j\right)+\left(k_j^{\,2}\cdot(AB)\mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial(AB)}{\partial S}\right)=0, \quad i=\sqrt{-1}. \tag{8}$$

Система уравнений (3.110) имеет корни:

$$\vartheta_{01}=0, \qquad \vartheta_{1,2\,j}=-\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm iBk_j\right)}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S}\pm iBk_j\right)^2}{4}-\left(k_j^2(A\cdot B)\mp ik_j\frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right)},$$

$$\vartheta_{02} = -\frac{\partial B}{\partial S}, \qquad \vartheta_{3,4\,j} = -\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S} \pm iBk_j\right)}{2} - \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial B}{\partial S} \pm iBk_j\right)^2}{4} - \left(k_j{}^2 (A\cdot B) \mp ik_j \frac{\partial(A\cdot B)}{\partial S}\right)} \qquad (9)$$

Если корни $\vartheta_{01}, \vartheta_{02}, \vartheta_{1,2\,j}, \vartheta_{3,4\,j}$ системы уравнений (9) имеют отрицательную действительную часть, то параметры производственного процесса устойчивы. Система балансовых уравнений (5)–(6) имеет характеристическое уравнение с одним нулевым корнем $\vartheta_{0_1} \equiv 0$. Такие системы относятся к критическим случаям исследования устойчивости. Система уравнений (8) в критическом случае относительно малых возмущений $[y]_0$, $[y]_1$ имеет решение:

$$\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0} = const, \qquad \{y_1\}_0 = \exp\left(-\frac{\partial B}{\partial S}\cdot t\right) + \{\tilde{y}_1\}_0 .$$

Тривиальное решение $\{y_0\}_0 = 0$ соответствует нулевому значению постоянной $c_{\{y_0\}_0} = 0$. В особом случае одного нулевого корня исследуемое невозмущенное состояние параметров производственного процесса принадлежит к семейству установившихся состояний, которое определяется системой уравнений (9). В особом случае невозмущенное состояние устойчиво, но устойчивость при этом неасимптотическая. Возмущенное состояние, близкое к невозмущенному, при $t \to \infty$ стремится к одному из установившихся состояний. Для всякого решения уравнений возмущенного состояния, для которого начальные значения: $\{y_0\}_0\big|_{t=0} = c_{\{y_0\}_0}$, $\{y_1\}_0\big|_{t=0} = \{\tilde{y}_1\}_0$ достаточно малы, справедливо:

$$\lim_{t\to\infty}\{y_0\}_0 = c_{\{y_0\}_0}, \qquad \lim_{t\to\infty}\{y_1\}_0 = 0 .$$

Исследуем условия устойчивости параметров производственного процесса в режиме синхронизации производительности оборудования вдоль технологического маршрута. Данный случай широко распространен в практических и теоретических исследований [8, 9, 12]. Принимая во внимание условие синхронизации производительности технологического оборудования, запишем:

$$\frac{\partial B}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\bigg|_0 \cong -\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0^2}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\bigg|_0 \cong -\left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0 \qquad \frac{\partial[\chi]_{1\psi}}{\partial S}\bigg|_0 = 0 .$$

Если отклонения $[\chi]_1$ относительно $[\chi]_{1\psi}$ является небольшим, $\left([\chi]_{1\psi} - [\chi]_1\right) \to 0$, то

$$A\cdot B = \frac{[\chi]_{1\psi} - [\chi]_1}{[\chi]_0}\bigg|_0 \cdot \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\bigg|_0 \approx 0, \qquad \frac{\partial(AB)}{\partial S} = B\frac{\partial A}{\partial S} \approx B\cdot\frac{1}{[\chi]_0}\frac{\partial(-[\chi]_1)}{\partial S}\bigg|_0 \approx 0$$

и, соответственно, характеристические уравнения принимают вид:

$$\begin{vmatrix} (\vartheta_0) & 0 \\ 0 & \left(-\left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0 + \vartheta_0\right) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} (\vartheta_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (\vartheta_j) & (k_j) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\vartheta_j - \left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0\right) & (-k_j\cdot B) \\ 0 & 0 & (k_j\cdot B) & \left(\vartheta_j - \left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0\right) \end{vmatrix} = 0,$$

определяющие связь между собственным числом ϑ_j и волновым числом k_j:

$$\vartheta_0\cdot\left(-\left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0 + \vartheta_0\right) = 0 \qquad \vartheta_j\cdot\left(\vartheta_j - \left(\frac{B}{[\chi]_0}\cdot\frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right)\bigg|_0 \pm i\cdot B\cdot k_j\right) = 0.$$

и позволяющие получить условие устойчивости параметров поточной линии [25, 26] для неустановившегося переходного режима

$$\frac{\partial B}{\partial S}\bigg|_0 > 0, \qquad \frac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\bigg|_0 < 0 .$$

Условие устойчивости в виде неравенства $\left.\dfrac{\partial[\chi]_0}{\partial S}\right|_0 < 0$ для установившегося квазистатического установившегося режима получено в [11] и проверено экспериментально при исследовании поточных линий по производству полупроводниковой продукции.

б) Условия устойчивости потоковых параметров технологических процессов в нулевом приближении $(1/Pm) << 1$, $Kv \approx 1$. Замкнутая 2-х моментная система [25] в нулевом приближении по малому параметру $(1/Pm) << 1$, $Kv \approx 1$ принимает вид

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial[\chi]_1}{\partial t} - [\chi]_{1\psi}(S)\cdot\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{[\chi]_{1\psi}(S)}{[\chi]_0(S)}\right)=0.$$

Будем полагать, что данной системе соответствует невозмущенное решение $[\chi]_k{}^* = [\chi]_k{}^*(t,S)$. Пусть параметры $[\chi]_k$ поточной линии получат случайные малые возмущения (1). Линеаризуем систему в окрестности $[\chi]_k^*$:

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t}=0, \qquad \frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_0}{\partial S}\cdot B^2 + [y]_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \qquad B = \left.\frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}\right|_0 .$$

Будем предполагать, что для коэффициентов *B* на протяжении периода T_v существования возмущения справедливо неравенство (4) и коэффициенты при малых возмущениях $[y]_k$ зависят только от *S*. Разложим возмущения $[y]_k$ параметров $[\chi]_k$ в ряд Фурье, получим систему уравнений для коэффициентов разложения:

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + \{y_0\}_0\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0,$$

$$\frac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{d\{y_1\}_j}{dt} - [y_0]_j\cdot k_j\cdot B^2 + \{y_0\}_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0, \qquad \frac{d[y_1]_j}{dt} + \{y_0\}_j\cdot k_j\cdot B^2 + [y_0]_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}=0.$$

с характеристическими уравнениями

$$\begin{vmatrix} \vartheta_0 & 0 \\ \dfrac{\partial B^2}{\partial S} & \vartheta_0 \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} (\vartheta_j) & 0 & 0 & (-k_j) \\ 0 & (\vartheta_j) & (k_j) & 0 \\ \left(\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right) & (-k_j\cdot B^2) & (\vartheta_j) & 0 \\ (k_j\cdot B^2) & \left(\dfrac{\partial B^2}{\partial S}\right) & 0 & (\vartheta_j) \end{vmatrix}=0,$$

определяющими связь между собственным числом ϑ_j и волновым числом k_j:

$$\vartheta_0^2 = 0\,, \qquad \vartheta_j^2 + \left(k_j{}^2\cdot B^2 \mp i\cdot k_j\cdot\frac{\partial B^2}{\partial S}\right)=0, \qquad i=\sqrt{-1}\,.$$

Система уравнений содержит двойной нулевой корень $\vartheta_{0_1} \equiv 0$ и относится к критическим случаям исследования устойчивости [10, 13]. Если плотность предметов труда $[\chi]_0$ медленно меняется вдоль технологического маршрута $\left|\left.\dfrac{[\chi]_0(t,S)}{\Delta S}\right|_0\right| >> \left|\left.\dfrac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial S}\right|_0\right|$, тогда рассмотренная система уравнений принимает вид:

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j\cdot k_j=0, \qquad \frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j\cdot k_j=0,$$

$$\frac{d\{y_1\}_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\{y_1\}_j}{dt}-[y_0]_j\cdot k_j\cdot B^2=0, \qquad \frac{\partial [y_1]_j}{\partial t}+\{y_0\}_j\cdot k_j\cdot B^2=0.$$

Выводы

Рассмотрено влияние малых возмущающих факторов на состояние потоковых параметров производственных линий. Показано, что устойчивость потоковых параметров производственной линии является одним из главных требований для обеспечения нормативного режима ее функционирования. Записаны необходимые и достаточные условия устойчивости потоковых параметров производственных линий. Проведен анализ устойчивости потоковых параметров для распространенных режимов функционирования производственных линий и получены критерии устойчивости. Дальнейшие исследования устойчивости параметров производственного процесса необходимо проводить с учетом слагаемых более высокого порядка малости [10, 13].

Список использованной литературы

1. Власов В.А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В.А. Власов, И.А. Тихомиров, И.И. Локтев. – Томск: Изд. ГТПУ, 2006. – 300 с.
2. Азаренков Н.А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии / Н.А. Азаренков, О.М. Пигнастый, В.Д. Ходусов // Доповіді Національної академії наук України. – 2014. – № 12. – С. 36-43. – doi.org/10.15407/dopovidi2014.12.036
3. Разумов И.М. Организация и планирование машиностроительного производства / И.М. Разумов, Л.Я. Шухгалтер. – М.: Машиностроение, 1974. – 592 с.
4. Пигнастый О.М. К вопросу обеспечения асимптотической устойчивости макропараметров технологического процесса / О.М. Пигнастый // Математическое моделирование. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2010. – №2 (23). – С. 25-31.
5. Тихонов А.Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
6. Управление гибкими производственными системами. Модели и алгоритмы / Е.Д. Воронина [и др.] ; общ. ред. С.В. Емельянов. – М.: Машиностроение, 1987. – 368 с.
7. Якимович С.Б. Постановка и решение задачи синтеза и оптимального управления технологическими процессами лесозаготовок / С.Б. Якимович. – М: МГУЛ, 2003. – №3. – С. 96-103.
8. Kempf K.G. Simulating Semiconductor Manufacturing Systems: Successes, Failures and Deep Questions / K.G. Kempf // In Proceedings of the 1996 Winter Simulation Conference (Institute of Electrical and Electronics Engineers). – Piscataway, New Jersey, 1996. – P. 3-11.
9. Armbruster D. Continuous models for production flows / D. Armbruster, C. Ringhofer, T- J. Jo // In Proceedings of the 2004 American Control Conference.– Boston, MA, USA, 2004. – P. 4589-4594.
10. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения / И.Г. Малкин. – М.: Наука, 1966. – 531 с.
11. Armbruster D. A Continuous Model for Supply Chains with finite Buffers / D. Armbruster, S. Goettlich, M. Herty – 2010. – P. 1-23.
12. Lefeber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems / E. Lefeber, R.A. Berg, J.E. Rooda // Proceeding of the 2004 American Control Conference. – Massachusetts, 2004. – P. 4583-4588.
13. Ляпунов А.М. Общая задача устойчивости движения / А.М. Ляпунов. – М.: Гостехиздат, 1950. – 395 с.
14. Armbruster D.A Scalar Conservation Law with Discontinuous Flux for Supply Chains with Finite Buffers / D. Armbruster, S. Goettlich, M. Herty // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 71. – I. 4. – P.1070-1087.
15. Демуцкий В.П. Вопросы устойчивости макроскопических параметров технологических процессов массового производства / В.П. Демуцкий, О.М. Пигнастый // Доп. Нац. академии наук Украины. – 2006. – № 3. – С. 63-67.
16. Демуцкий В.П. Об устойчивости функционирования процессов массового производства. Интегрированные компьютерные технологии в машиностроении. / В.П. Демуцкий, О.М. Пигнастый, С.Ю. Мелешенко, Е.Н. Пищик –2005. – С. 206 – 215.
17. Пигнастый О.М. Анализ устойчивости макропараметров технологического процесса производственно-технической системы / О.М. Пигнастый, В.Я. Заруба, С.Н. Новак // Сборник научных трудов УАБС НБУ: Институт экономики НАН Украины, Академия экономических наук Украины. – К.: УАБС НБУ, 2009. – № 27. – С. 199-206.
18. Berg R. Partial Differential Equations in Modelling and Control of Manufacturing Systems / R. Berg. – Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
19. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1969. – 640 с.
20. А.М.Будылин. Вариационное исчисление / А.М.Будылин. – СПб.: СПбГУ, 2001. – 197 с.
21. Bramson M. Stability of Queueing Networks / M. Bramson // Probability Surveys. – 2008. – Vol. 5. – P. 169-345.

22. Половин Р.В. Основы магнитной гидродинамики / Р.В. Половин, В.П. Демуцкий. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 208 с.
23. Красовский А.А. Статистическая теория переходных процессов / А.А. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 240 с.
24. Пигнастый О. М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции / О.М. Пигнастый // Доповіді Національної академії наук України. – Київ: Видавничий дім "Академперіодика", 2006. – №5 – С. 79-85. – https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29852.28802
25. Демуцкий В.П. Теория предприятия: Устойчивость функционирования массового производства и продвижения продукции на рынок / В.П. Демуцкий, В.С. Пигнастая, О.М. Пигнастый. – Х.: ХНУ, 2003. – 272 с.
26. Пигнастый О.М. Статистическая теория производственных систем / О.М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – 388 с.