

УДК 539.3

Н.О. ЯРЕЦЬКА, А.О. РАМСЬКИЙ
Хмельницький національний університет**ЗАСТОСУВАННЯ MAPLE ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ПРО
ТИСК ЖОРСТКОГО КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР З
ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

У рамках лінеаризованої теорії пружності представлено розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампна на півпростір з початковими напруженнями із застосуванням програми Maple. Розроблено алгоритм та комп'ютерну програму чисельного обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу. Числова реалізація методу дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик тіл, для потенціалів найпростішої структури.

Ключові слова: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, кільцевий штамп, півпростір, Maple.

Н.А. ЯРЕЦКАЯ, А.А. РАМСКИЙ
Хмельницький национальный университет**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ДАВЛЕНИИ
ЖЕСТКОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ПОЛУПРОСТРАНСТВО С НАЧАЛЬНЫМИ
НАПРЯЖЕНИЯМИ**

В рамках линеаризованной теории упругости представлено решение контактной задачи о давлении жесткого кольцевого штампа на полупространство с начальными напряжениями с использованием программы Maple. Разработан алгоритм и компьютерная программа численного решения компонентов напряженно-деформированного состояния контактирующих тел с начальными напряжениями с произвольной структурой упругого потенциала. Численная реализация метода дала возможность графически отобразить влияние начальных напряжений на закон распределения контактных характеристик тел для потенциалов наипростейшей структуры.

Ключевые слова: линеаризованная теория упругости, начальные (остаточные) напряжения, контактная задача, кольцевой штамп, полупространство, Maple.

N.A. IARETSKA, A.A. RAMSKY
Khmelnytsky National University**USE OF MAPLE FOR SOLVING THE CONTACT PROBLEM ABOUT PRESSURE OF STIFF
ANNULAR PUNCH ON THE SEMI-SPACE WITH INITIAL STRESSES**

During the solution of engineering problems, the study of contact interaction of solid deformed bodies takes up an important place. Therefore, the solution of the axisymmetric contact problem of a rigid annular stamp pressure on elastic half-space with initial (residual) stresses without consideration of frictional forces in the case of equal roots of the defining equation is presented in this work. In general, the research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure. Also the research is carried out within the coordinates of the initial deformed state, which are interrelated with the Lagrangian coordinates. Besides, it is also assumed that the influence of the half-space causes small disorders of the main elastic deformed state. An algorithm and a computer program in the Maple environment are developed for numerical calculation of the components of the stress-strain state of contacting bodies with initial stresses. The influence of initial (residual) stresses on the contact interaction of an elastic half-space and a rigid annular stamp is presented on the example of the harmonic potential and potential of Bartenev-Khazanovich. A developed algorithm for numerical computation of components of the stress-strain state of bodies allows it to be used in engineering calculations and facilitates the complexity of research. Therefore, the algorithm can be used directly for the study of various isotropic, transversally-isotropic or composite materials in the simulation of process equipment, machine parts, columns of buildings and other. Numerical realization of the method allowed to show graphically the influence of initial stresses on the law of distribution of contact characteristics of bodies, for the potentials of the simplest structure.

It was found that the influence of initial (residual) stresses is significant and should be taken into account when calculating the strength in structural details.

Key words: the linearized elasticity theory, initial (residual) stresses, contact problem, annular punch, half-space, Maple.

Постановка проблеми

Прикладні потреби природознавства, сучасної техніки і новітніх технологій, пов'язані із необхідністю прогнозування контактної поведінки різноманітних конструкцій, стимулювали в останні десятиліття розвиток різних математичних моделей і методів контактної механіки тіл з різними властивостями. А використання інформаційних технологій під час дослідження та розв'язання сучасних задач і проблем механіки та техніки, що постають перед науковцями, дозволяє значно полегшити цей процес.

Так, у механіці суцільних середовищ велика увага приділяється дослідженню контактної взаємодії твердих деформованих тіл, що пов'язано із проблемою визначення їх напружено-деформованих станів. Оскільки контактні задачі формують теоретичну основу для розрахунків на контактну міцність, жорсткість та зносостійкість рухомих і нерухомих з'єднань, а їх дослідження зводяться до одних із найважливіх рівнянь математичної фізики, то їх розв'язання пов'язане із великими математичними труднощами, що вимагає залучення комп'ютерних технологій. Одним з важливих факторів при контактній взаємодії є вплив початкових (залишкових) напружень, які практично завжди присутні в реальних конструкціях і деталях машин, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з врахуванням початкових деформацій є актуальною і важливою науково-технічною проблемою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На даний час з проблем, що мають відношення до контактних задач жорстких штампів, які взаємодіють із пружними тілами отримані результати з широкого кола питань. І вони достатньо відображені у численних публікаціях періодичних видань. Не дивлячись на суттєві досягнення, кількість досліджень з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями все ж таки відносно мала.

Детальний огляд задач контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями представлений у роботах [1–3]. Причому у перших роботах з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями розглядаються або пружні потенціали конкретної структури, або задача ставиться в загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл з потенціалом довільної структури на основі лінеаризованої теорії пружності [3]. Роботи з контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями присвячені взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими та пружними штампами без початкових напружень [4]. Розв'язок контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа складної конфігурації на пружний півпростір, у якому є залишкові деформації, зумовлені наявністю потенціалу лише гармонічного типу розглянуто у [5]. Існує також ряд інших публікацій, що повністю або частково пов'язані із тематикою даної статті [6–9].

Мета дослідження

Метою роботи є: 1) Розв'язання осесиметричної статичної задачі про тиск жорсткого циліндричного кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями без врахування сил тертя в межах лінеаризованої теорії пружності у випадку рівних коренів визначального рівняння [6] ($n_1=n_2$) в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу;

2) Врахування залишкових напружень під час контактної взаємодії жорсткого кільцевого штампа та пружного півпростору на закон розподілу тиску в місцях їх дотику за допомогою інформаційних технологій, що дозволить більш ефективно враховувати зносостійкість матеріалів шляхом правильної оцінки запасів міцності та знижувати їх матеріалоемність, зберігаючи в цілому потрібні функціональні характеристики;

3) Розробка алгоритму та комп'ютерної програми, що принципово спрощуватиме процес отримання числових і графічних результатів досліджень.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай скінченний жорсткий кільцевий штамп з плоскою основою, геометрична вісь симетрії якого співпадає з віссю u_3 циліндричної системи координат, що напрямлена в середину півпростору (рис.1), втискається у півпростір з силою P , після виникнення там початкового деформованого стану. R_1, R_2 – відповідно внутрішній та зовнішній радіуси штампа. Будемо вважати, що зовнішнє навантаження прикладене тільки до вільного торця пружного штампа, під дією якого всі точки торця штампа переміщуються у напрямку осі симетрії u_3 на одну і ту ж саму величину ε . Вважатимемо, що поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішніх сил, а в зоні контакту переміщення та напруження – неперервні. Розрізнятимемо три стани півпростору з початковими напруженнями: природний, коли у ньому відсутні напруження; початковий стан, та збурений стан, всі величини якого складаються з суми відповідних величин початкового стану та збурень. Вважаючи збурення набагато меншими відповідних величин початкового стану, дослідження проводимо в рамках лінеаризованої теорії пружності [1–4, 6–8]. Для дослідження введемо лагранжеві координати (x_1, x_2, x_3) , які в початковому стані співпадають з декартовими координатами (y_1, y_2, y_3) . Вважаємо, що початковий напружено-деформований стан у півпросторі є однорідним, а пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [2]. Матеріали тіл, що контактують будемо вважати ізотропними стисливими або нестисливими з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку ортотропних матеріалів приймається, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей координат.

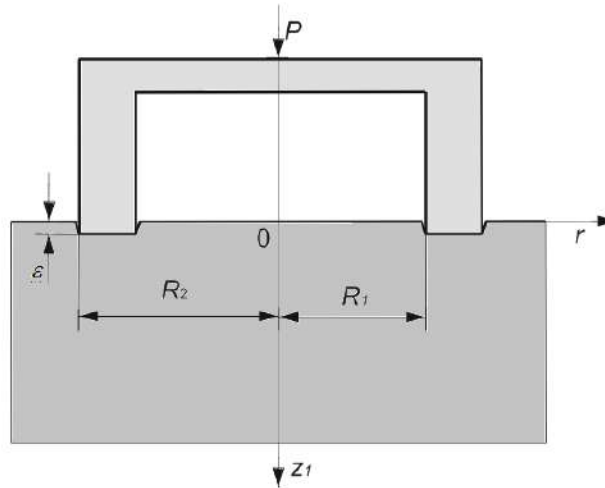


Рис. 1. Тиск жорсткого кільцевого штампа на пружний півпростір з початковими (залишковими) напруженнями

У системі кругових циліндричних координат (r, θ, z_1) , де $z_1 = v_1^{-1} y_3$, $v_1 = n_1^{0.5}$, $n_1 = n_2$ (корені визначального рівняння [6]) такій постановці відповідають граничні умови:

$$U_z = \varepsilon, \quad R_1 < r < R_2 \tag{1}$$

$$Q_{zz} = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \tag{2}$$

$$Q_{rz} = 0, \quad 0 < r < \infty \tag{3}$$

$$U_z = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty \tag{4}$$

$$Q_{zz} = -\sigma_z^0, \quad R_1 < r < R_2 \tag{5}$$

де $\sigma_z^0 = 8\varepsilon\omega_3(\pi\sqrt{1-r^2})^{-1}$, при $R_1 < r < R_2$ та $\sigma_z^0 = 0$, при $0 < r < R_1$, $R_2 < r < \infty$; $\omega_3 = C_{44}(1+m_1)l_1(s-s_0)$, $s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$, $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$. Значення коефіцієнтів $m_k, c_{44}, l_k, (k=1, 2)$ залежать від характеру пружного потенціалу і подані в [2].

Умова рівноваги, що встановлює зв'язок між осіданням торця і рівнодійною навантаження P має вигляд:

$$P = -2\pi \int_{R_1}^{R_2} r Q_{zz}(0, r) dr \tag{6}$$

Методика розв'язання поставленої задачі поділяється на два етапи: аналітичний, який у повній мірі висвітлений у працях [6, 8], та чисельний. Алгоритм чисельного розв'язання реалізований у вигляді програми [9] в пакеті Maple 15 і базується на наступних кроках:

1. Вводимо усі необхідні параметри, що стосуються характеристик конкретного пружного потенціалу та даних задачі:

```
>restart;
>with(DEtools):
>R2:=2:R1:=1: e:=0.00001: lambda:=[0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3]:
>pi:=Pi: sigma:=0.47: E:=3.92: mu0:=E/3: C[10]:=mu0/2:
>series(BesselJ(0,R2*x/R1)*Bessely(0,x)-BesselJ(0,x)*Bessely(0,R2*x/R1),
x,7): T[2]:=convert(%,polynom): gn:=[fsolve(T2,x,complex)]: g1:=gn[1]:
```

2. Визначаємо невідомі коефіцієнти:

```
>Ln:=BesselJ(0,g1*r/R1)* Bessely(0,g1)-BesselJ(0,r)* Bessely(0,g1*r/R1):
>Fn:=int(r*Ln*BesselJ(0,h*r),h=R1..R2):
>Gn:=g1*h^2/(g1^2-(h*R1)^2)*(R2/R1*(BesselJ(1,g1*R2/R1)*Bessely(0,g1)-
BesselJ(0,g1)*Bessely(1,g1*R2/R1))*BesselJ(0,h*R2)-
(BesselJ(1,g1)*Bessely(0,g1)-BesselJ(0,g1)*Bessely(1,g1))* BesselJ(0,h*R1):
>I1:=int(Gn*BesselJ(0,h*r),h=0..infinity):
>N1:=- (3.062510700*h^2*((0.2936256080+2.*10^(-
10)*I)*convert(series(BesselJ(0,2*h),h,2),polynom)+0.2078751178*convert(serie
s(BesselJ(0,h),h,2),polynom)))/(9.378971788-h^2):
```

>I2:=int(N1*convert(series(BesselJ(0,h*r),h,7),polynom),h=0..3):

3. Напружено-деформований стан у півпросторі з початковими (залишковими) напруженнями визначимо для рівних коренів, врахувавши (1)–(5) та $z_1 = 0$. Представимо його компоненти у вигляді [2, 6]:

$$Q_z = \omega_3 R_0^{-1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta, \quad U_z = -\omega_2^{-1} \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_0(\eta r) d\eta, \quad U_r = \omega_1 \int_0^\infty \frac{F(\eta)}{\eta} J_1(\eta r) d\eta, \quad (7)$$

де $R_0 = R_1/R_2$, $\omega_2 = \nu_1 m_1^{-1} (s_0 - s_1)^{-1}$, $s_1 = (m_1 - 1) m_1^{-1}$, $\omega_1 = s_0 - 1$, $J_\nu(x)$ – функція Бесселя дійсного аргументу, $F(\eta)$ – шукана функція.

Задовольнивши умову (2) отримаємо:

$$\omega_3 R_0^{-1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = 0, \quad 0 < r < R_1, \quad R_2 < r < \infty. \quad (8)$$

Введемо неперервну невідому функцію $f(r)$, $R_1 < r < R_2$, що визначатиме розподіл контактних напружень під жорстким штампом. Та продовжимо (8) на проміжок $0 < r < \infty$ [5, 6]:

$$\omega_3 R_0^{-1} \int_0^\infty F(\eta) J_0(\eta r) d\eta = f(r) (\delta(r - R_1) - \delta(r - R_2)), \quad 0 < r < \infty, \quad (9)$$

де $\delta(r)$ – функція Хевісайда.

Враховуючи неперервність функції $f(r)$, а також $f(r) = 0$ при $r = R_1$ та $r = R_2$, представимо її у вигляді:

$$f(r) = \sum_{m=1}^\infty f_m J_0(\mu_m R_0^{-1} r) \quad (10)$$

де f_m – невідомі коефіцієнти, μ_m – розв’язки рівняння $J_1(\mu_k) = 0$.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля до (10), одержимо

$$F(\eta) = R_0 \omega_3^{-1} \sum_{m=1}^\infty f_m \int_{R_1}^{R_2} r J_0(\mu_m R_0^{-1} r) J_0(\eta r) dr, \quad 0 < r < \infty. \quad (11)$$

З другої формули (7), (11) та (1) отримаємо

$$\sum_{m=1}^\infty f_m \int_0^\infty T_m(\eta) \eta^{-1} J_0(\eta r) d\eta = -\varepsilon \omega_3 \omega_2 R_0^{-1}, \quad (12)$$

де $T_m(\eta) = R_1^{-1} (a_m^1 J_0(R_1 \eta) - a_m^2 J_1(R_1 \eta) \eta - a_m^3 J_0(R_2 \eta) + a_m^4 J_1(R_2 \eta) \eta) (\eta^2 - \mu_m^2 R_0^{-2})^{-1}$,

$a_m^1 = R_1 R_2 \mu_m J_1(R_2 \mu_m)$, $a_m^2 = R_1^2 J_0(R_2 \mu_m)$, $a_m^3 = R_2^2 \mu_m J_1(R_2 R_1^{-1} \mu_m)$, $a_m^4 = R_1 R_2 \mu_m J_0(R_2 R_1^{-1} \mu_m)$.

Проінтегруємо (12) по $r J_0(\mu_m R_0^{-1} r)$ від R_1 до R_2 :

$$\sum_{m=1}^\infty f_m \int_0^\infty T_m(\eta) \eta^{-1} T_k(\eta) d\eta = -\varepsilon \omega_3 \omega_2 R_0^{-1} S_k, \quad (k = \overline{1, m}), \quad (13)$$

де $S_k = -\mu_k^{-1} R_0 (R_1 J_1(\mu_k R_2) - R_2 J_1(\mu_k R_2 R_1^{-1}))$.

Після визначення f_m із системи (13), можна обчислити напружено-деформований стан у пружному півпросторі за формулами (7), (9) – (11). А зв’язок (6) між осіданням торця та рівнодіючою навантаження P , матиме вигляд $P = -4\omega_3 \omega_2 \varepsilon R_0$.

Частина програми, що відображає даний крок, представлена нижче.

```
>Q33:=array(1..6):Ur:=array(1..6):
>for I to 6 do L:=lambda[i]; e:=0.00001: n2:=n1: v1:=sqrt(n1):
v2:=sqrt(n2): s0:=(1+m2)/(1+m1): s1:=(m1-1)/m1: s2:=m2/m1*v1/v2:
s3:=s0*v1/v2: s:=s0*l2/l1: k1:=-R1/R2*m1*(s2-s3)/(c44*(1+m1)*l1*(s-s3)*v1):
a1:=e/(k1*l2): fr:=a1*Ln: Fr:=convert(series(fr,r,5),polynom):
Fr0p1:=coeff(Fr,ln(r),0): Fr0p2:=coeff(Fr0p1,csgn(1.5312553501r),0):
Fr0p:=coeff(Fr0p2,I,0): r0:=evalf(R1/(2*R2)): Fr01:=evalf(subs(r=r0,Fr0p)):
Fr1:=subs(r=r-r0,-abs(Fr0p)): Fr2:=|Fr01|+Fr1:
```

```

Q33[i]:=Fr2: plot(Fr2,r=0..0.5,color=black,thickness=1);
series(BesselJ(0,R2*x/R1)*Bessely(0,x)-BesselJ(0,x)*Bessely(0,R2*x/R1),x,7):
T2:=convert(% ,polynom): gn:=[fsolve(T2,x,complex)]: g1:=gn[1]:
Gn:=g1*h^2/(g1^2-(h*R1)^2)*(R2/R1*(BesselJ(1,R2*g1/R1)*Bessely(0,g1)-
BesselJ(0,g1)*Bessely(1,R2*g1/R1))*BesselJ(0,h*R2)-
(BesselJ(1,g1)*Bessely(0,g1)-BesselJ(0,g1)*Bessely(1,g1))*BesselJ(0,h*R1)):
Fh:=R1/(R2*c44*11*(1+m1)*(s-s3))*a1*Gn*h:
Ur[t]:=(s3-1)*int(Fh/h*BesselJ(1,h*r),h=0..1):
plot(Ur[i], r=0..0.5, color=black,thickness=1):
U3:=(s3-s2)*m1/v1*int(Fh/h*BesselJ(0,h*r),h=0..infinity); od;
    
```

4. Будемо графіки в безрозмірних координатах для потенціалів конкретної структури, таких як: гармонічний потенціал (рис. 2) та потенціал Бартенєва-Хазановича (рис. 3, 4).

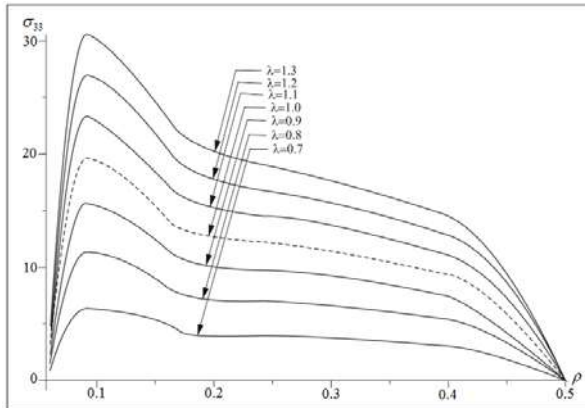


Рис.2. Контактні напруження. Гармонічний потенціал.

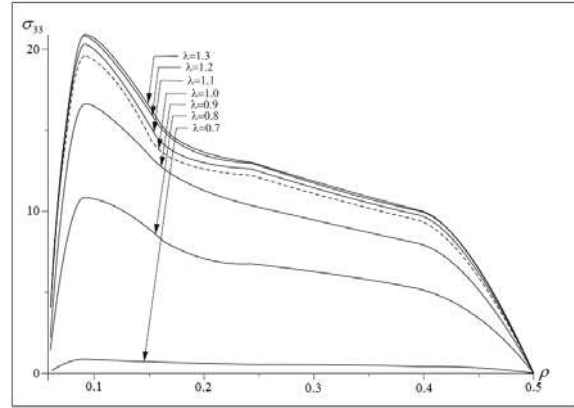


Рис.3. Контактні напруження. Потенціал Бартенєва-Хазановича

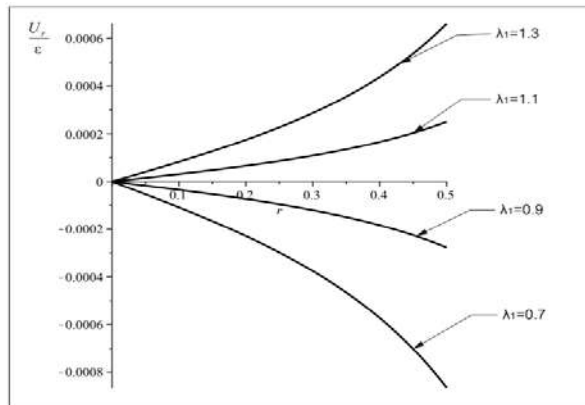


Рис.4. Контактні переміщення.

На рис. 2-4 пунктирні лінії описують випадок без початкових напружень ($\lambda_1=1$), суцільні – з початковими (залишковими) напруженнями. Початок координат на рис. 2-4 відповідає точці з координатами $(R_1;0;\epsilon)$ (рис.1).

5. Аналізуємо отримані результати. На основі чисельного аналізу можна побачити, що максимальні за модулем значення контактних напружень досягаються у точках дещо ближчих до внутрішньої межі контакту. А вплив початкових напружень полягає у тому, що стисливі початкові напруження ($\lambda_1 < 1$) в півпросторі призводять до зменшення напружень, а розтягуючі ($\lambda_1 > 1$) – до їх збільшення.

Кількісні характеристики впливу початкових напружень (у відсотках) по відношенню до півпростору без початкових напружень представлені у табл. 1.

Таблиця 1

Вплив початкових напружень на контактну взаємодію пружного півпростору та жорсткого кільцевого штампа

σ_{33} / σ_0	Зменшення, %				Збільшення, %		
λ_1	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
Гармонічний потенціал	67.57	42.18	20.09	0	18.95	37.42	55.91
Потенціал Бартенєва-Хазановича	75.59	44.61	15.24	0	3.48	6.12	6.51

Отже, виявлений вплив початкових напружень є суттєвим і повинен враховуватися при розрахунках на міцність у деталях конструкцій.

Висновки

Отже, з отриманих результатів можна зробити наступні висновки:

1. У статті представлені результати дослідження впливу початкових напружень на контактну взаємодію жорсткого циліндричного кільцевого штампа та попередньо напруженого півпростору. За допомогою пакету прикладних програм (Maple 15) чисельний аналіз подано для потенціалу Бартенева-Хазановича та гармонічного потенціалу.

2. Розроблено алгоритм числового обчислення компонентів напружено-деформованого стану контактуючих тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу. Це дозволяє використовувати його при інженерних розрахунках та полегшує складність проведених досліджень. Запропонований алгоритм може безпосередньо використовуватись для дослідження різноманітних ізотропних, трансверсально-ізотропних або композитних матеріалів при проектуванні технологічного обладнання, деталей машин, колон будівель та іншого.

3. Розроблена комп'ютерна програма "Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану для контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями" ("JKS_PZPN_RK"), що спрощує процес отримання числових і графічних результатів досліджень [9].

4. Числова реалізація дала змогу графічно відобразити вплив початкових напружень на закон розподілу контактних характеристик попередньо напружених тіл для потенціалів найпростішої структури.

Виявлено, що початкові напруження при стиску призводять до зменшення сили напружень у півпросторі, а при розтягненні – до їх збільшення. А для переміщень все відбувається навпаки, а саме: при стиску початкові напруження у півпросторі призводять до збільшення переміщень по абсолютній величині, а у випадку розтягу – до їх зменшення. Більш суттєво, у кількісному плані, початкові напруження діють у високо еластичних матеріалах у порівнянні із більш жорсткими, але якісно їхній вплив зберігається.

Список використаної літератури

1. Гузь А.Н. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов. – Германия: Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
2. Гузь А.Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, В.Б. Рудницкий. – Хмельницький: вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
3. Гузь А.Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // Развитие идей Л.А. Галина в механике. – М.–Ижевск. Институт компьютерных исследований, 2013. – 480 с.
4. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / S.Yu. Babich, A.N. Guz, V.B. Rudnitsky // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, №7. – P. 744-765.
5. Шелестовський Б. Контактна взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим півпростором / Б. Шелестовський, І. Габрусєва // Вісник ТДТУ. – 2009. – Т. 14. – № 3. – С. 48-53.
6. Ярецька Н.О. Тиск жорсткого циліндричного кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями / Н.О. Ярецька // Вісник Запорізького національного університету за фахом "Фізико-математичні науки". – 2017. – №1. – С. 374-380.
7. Діхтярук М.М. Контактна взаємодія нескінченного стрингера з однією та двома попередньо напруженими смугами / М.М. Діхтярук, Н.О. Ярецька // Актуальные научные исследования в современном мире: сб. научных трудов. – Переяслав-Хмельницький, 2018. – Вып. 2(34), Ч. 1. – С. 75-83.
8. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses / N.A. Yaretskaya // International Applied Mechanics. – 2014. – 50, №4. – P. 378-388.
9. А. с. JKS_PZPN_RK. Комп'ютерна програма "Розрахунок компонентів напружено-деформованого стану для контактної задачі про тиск жорсткого кільцевого штампа на півпростір з початковими (залишковими) напруженнями" / Н. О. Ярецька. – № 74505 ; заявл. 03.11.2017 ; опубл. 26.01.2018, Бюл. №47, 2018 р.