УДК 517.9

О.М. ЛЕНЮК, А.І. КІРІЯК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕОДНОРІДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ З НАВАНТАЖЕНИМИ КІНЦЯМИ

Задача про малі поперечні коливання однорідної струни (або однорідного ненапруженого стержня), кінці якої (якого) навантажені (до кожного з них прикріплена пружина жорсткості k, до пружини прикріплено вантаж масою m, на який діє сила тертя, пропорційна швидкості), математично приводить до побудови обмеженого розв'язку рівняння коливання за певними початковими умовами та включенням вантажів на кінцях. При цьому в крайові умови входять друга та перша похідні по часовій змінній, а також перша похідна по просторовій змінній.

За допомогою інтегрального перетворення Лапласа одержано інтегральне зображення розв'язку даної крайової задачі для неоднорідного рівняння з неоднорідними початковими умовами та неоднорідними крайовими умовами.

Досліджено спектр задачі, виписано головні розв'язки задачі.

Ключові слова: інтегральне перетворення Лапласа, рівняння коливання, крайова задача.

О.М. ЛЕНЮК, А.И. КИРИЯК
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

НЕОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ С НАГРУЖЕННЫМИ КОНЦАМИ

Задача о малых поперечных колебаниях однородной струны (или однородного ненапряженного стержня), концы которой (которого) нагружены (к каждому из них прикреплена пружина жесткости k, к пружине прикреплен груз массой m, на который действует сила трения, пропорциональная скорости), математически приводит к построению ограниченного решения уравнения колебания с определенными начальными условиями и включением грузов на концах. При этом в краевые условия входят вторая и первая производные по временной переменной, а также первая производная по пространственной переменной.

С помощью интегрального преобразования Лапласа получено интегральное изображение решения данной краевой задачи для неоднородного уравнения с неоднородными начальными условиями и неоднородными краевыми условиями.

Исследован спектр задачи, выписаны главные решения задачи.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, уравнение колебания, краевая задача.

O.M. LENYUK, A.I. KIRIYAK
Chernivtsi National University by Yuriy Fed'kovych

NONHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR OSCILLATION EQUATION WITH LOADS ON THE ENDS

One of the effective methods for constructing of exact analytical solutions of the equations of mathematical physics is the method of integral transforms. This method allows us to find an analytical form of solutions for many problems of mathematical physics, which is very convenient for studying the properties of solutions.

In this paper by integral Laplace transform the solution of the boundary value problem for the nonhomogeneous equation of oscillations with nonhomogeneous initial conditions and the loads on the ends is obtained. This means that the boundary conditions contain the second and the first derivatives with respect to time variable and the first derivative with respect to spatial variable. We consider a homogeneous string (or homogeneous rod), the ends of which are loaded: to each of them a spring of rigidity k is fastened, a load of mass m attached to the spring, on which the force of friction, is proportional to the velocity. The problem of small transverse oscillations of such a string (or longitudinal oscillations of a rod) mathematically leads to the construction of a bounded solution of nonhomogeneous oscillation equation with nonhomogeneous initial conditions and nonhomogeneous boundary conditions.Applying the direct integral Laplace transform to the equation and boundary conditions, we obtain the nonhomogeneous boundary value problem for the ordinary differential equation. We find the unique solution of this problem by the method of Cauchy function. Applying the inverse integral Laplace transform to the solution of this boundary value problem, we obtain an integral representation of the unique solution of a hyperbolic boundary value problem in the case of nonhomogeneous equation with nonhomogeneous initial conditions and the presence of the first and second derivatives with respect to the time variable and the first derivative with respect to the spatial variable in the boundary conditions.

The spectrum of the problem is studied, the main solutions (Green's functions generated by the nonhomogeneity of the equation and the initial and the boundary conditions) of the problem are written out.
Keywords: integral Laplace transform, equation of oscillations, boundary value problem.

Постановка проблеми

Одним із ефективних методів побудови точних аналітичних розв'язків рівнянь математичної фізики є метод інтегральних перетворень. Цей метод дає змогу знаходити аналітичний вигляд розв’язків багатьох задач математичної фізики, що дуже зручно для дослідження властивостей розв’язків. У підручниках та посібниках з математичної фізики наведені постановки різноманітних крайових задач (наприклад, див. [1]), але для багатьох з них не знайдені аналітичні вигляди розв’язків.

Аналіз основних досліджень і публікацій

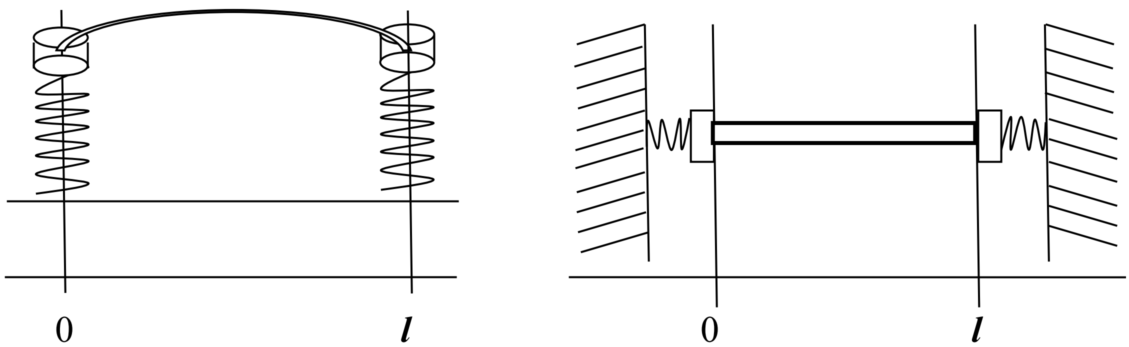
У працях [2, 3] розв’язана крайова задача для рівняння коливання у випадку включення вантажу на лівому кінці та крайової умови першого роду на правому кінці. У праці [4] знайдено аналітичний вигляд розв'язку крайової задачі для рівняння коливання з включенням вантажів на обох кінцях у випадку однорідного рівняння, однорідних початкових умов та неоднорідних крайових умов.

Мета дослідження

Дана стаття присвячена побудові методом інтегрального перетворення Лапласа розв'язку крайової задачі для неоднорідного рівняння коливання з включенням вантажів на обох кінцях у випадку неоднорідних початкових умов та неоднорідних крайових умов.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо однорідну струну (або однорідний ненапружений стержень) довжини l, кінці якої (якого) навантажені: до кожного з них прикріплена пружина жорсткості *k*, до пружини прикріплено вантаж масою m, на який діє сила тертя, пропорційна швидкості.



Задача про малі поперечні коливання такої струни (або повздовжні коливання жорсткого стержня) математично приводить до побудови обмеженого в області $D=\{(t,x): t>0, x\in(0,l)\}$ розв'язку рівняння коливання:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(t,x) \tag{1}$$

за початковими умовами:

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) \tag{2}$$

і крайовими умовами [1, 4]:

$$\left.\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial u}{\partial t}+ku-T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=0}=g_1(t),\left.\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial u}{\partial t}+ku+T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x=l}=g_2(t). \tag{3}$$

Тут m – маса прикріпленого вантажу, $T=const$ – стала натягу струни (модуль Юнга матеріалу стержня, помножений на площу поперечного перерізу) в точках $x=0$ та $x=l$, k – жорсткість пружини, η – коефіцієнт тертя. При цьому повинні бути виконані умови узгодження:

$$\left.\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial u}{\partial t}+ku-T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{\substack{x=0\\t=0}}\equiv ma^2(\varphi''(0)+f(0,0))+\eta\psi(0)+k\varphi(0)-T\varphi'(0)=g_1(0),$$

$$\left(m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\eta\frac{\partial u}{\partial t}+ku+T\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{\substack{x=l\\t=0}}\equiv ma^2(\varphi''(l)+f(0,l))+\eta\psi(l)+k\varphi(l)+T\varphi'(l)=g_2(0).$$

Припустимо, що задані й шукана функції є оригіналами Лапласа стосовно t [5]. У зображенні за Лапласом задачі (1)–(3) відповідає крайова задача: побудувати на $(0,l)$ розв'язок рівняння:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-q^2\right)u^*(p,x)=-\bar{f}^*(p,x), \tag{4}$$

за крайовими умовами:

$$\left(T\frac{d}{dx}-q_1\right)u^*(p,x)\Bigg|_{x=0}=-\bar{g}_1^*(p),\left(T\frac{d}{dx}+q_1\right)u^*(p,x)\Bigg|_{x=l}=\bar{g}_2^*(p). \tag{5}$$

Тут прийняті позначення:

$$q^2=a^{-2}p^2,\ \ p=\sigma+is,\ \ i^2=-1,\ \ q_1=mp^2+\eta p+k,$$

$$u^*(p,x)=L[u(t,x)],\ \ \bar{f}^*(p,x)=L[f(t,x)]+a^{-2}p\varphi(x)+a^{-2}\psi(x),$$

$$\bar{g}_1^*(p)=L[g_1(t)]+m(p\varphi(0)+\psi(0))+\eta\varphi(0),\ \ \bar{g}_2^*(p)=L[g_2(t)]+m(p\varphi(l)+\psi(l))+\eta\varphi(l).$$

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Фур'є:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-q^2\right)v=0$$

утворюють функції $chqx$ та $shqx$. Це дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (4), (5) методом функцій Коші:

$$u^*(p,x)=A_1chqx+A_2shqx+\int_0^l E^*(p,x,\xi)f^*(p,\xi)d\xi. \tag{6}$$

Функцію Коші $E^*(p,x,\xi)$ будемо шукати у вигляді:

$$E^*(p,x,\xi)=\begin{cases}E^{-*}(p,x,\xi)=B_1chqx+C_1shqx, 0<x<\xi<l,\\ E^{+*}(p,x,\xi)=B_2chqx+C_2shqx, 0<\xi<x<l.\end{cases} \tag{7}$$

Властивості функції Коші [3] для визначення невідомих B_i, C_i ($i=1,2$) дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases}(B_2-B_1)chq\xi+(C_2-C_1)shq\xi=0,\\ (B_2-B_1)shq\xi+(C_2-C_1)chq\xi=-\dfrac{1}{q},\\ TqC_1-q_1B_1=0,\\ (TqB_2+q_1C_2)shql+(TqC_2+q_1B_2)chql=0.\end{cases}$$

За формулами Крамера знаходимо:

$$B_1=\frac{TK_1(l-\xi)}{\Delta^*(p)};\ C_1=\frac{q_1K_1(l-\xi)}{q\Delta^*(p)};$$

$$B_2=\frac{K_1(l)K_1(\xi)}{q\Delta^*(p)};\ C_2=-\frac{K_2(l)K_1(\xi)}{q\Delta^*(p)}.$$

Тут прийняті позначення:

$$\Delta^*(p)=(2q_1Tqchql+(q_1^2+q^2T^2)shql);$$

$$K_1(x)=Tqchqx+q_1shqx;$$

$$K_2(x)=Tqshqx+q_1chqx.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (7), отримаємо функцію впливу $E^*(p,x,\xi)$, породжену неоднорідністю рівняння (4):

$$E^*(p,x,\xi)=\frac{1}{q\Delta^*(p)}\begin{cases}K_1(l-\xi)K_1(x), 0<x<\xi<l,\\ K_1(\xi)K_1(l-x), 0<\xi<x<l.\end{cases} \tag{8}$$

Знайдемо сталі A_1 та A_2, підставивши функцію $u^*(p,x)$, що зображається формулою (6), у крайові умови (5). Одержимо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$-q_1A_1 + qTA_2 = -\overline{g}_1^*(p),$$

$$(Tqshql + q_1chql)A_1 + (Tqchql + q_1shql)A_2 = \overline{g}_2^*(p).$$

Визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} -q_1 & qT \\ Tqshql + q_1chql & Tqchql + q_1shql \end{vmatrix} = -(2q_1Tqchql + (q_1^2 + q^2T^2)shql) \equiv -\Delta^*(p).$$

Припускаючи, що $\Delta^*(p) \neq 0$, обчислимо A_1, A_2 за формулами Крамера:

$$A_1 = \frac{\overline{g}_1^*(p)K_1(l) + \overline{g}_2^*(p)Tq}{\Delta^*(p)};$$

$$A_2 = \frac{\overline{g}_2^*(p)q_1 - \overline{g}_1^*(p)K_2(l)}{\Delta^*(p)}.$$

Тоді єдиний розв'язок крайової задачі (4)–(5) запишеться так:

$$u^*(p,x) = W_1^*(p,x)\overline{g}_1^*(p) + W_2^*(p,x)\overline{g}_2^*(p) + \int_0^l E^*(p,x,\xi)f^*(p,\xi)d\xi. \tag{9}$$

У рівності (9) беруть участь породжені крайовими умовами (5) функції Гріна:

$$W_1^*(p,x) = \frac{K_1(l-x)}{\Delta^*(p)},\ \ W_2^*(p,x) = \frac{K_1(x)}{\Delta^*(p)}. \tag{10}$$

Повертаючись у рівності (9) до оригіналу, одержуємо інтегральне зображення розв'язку задачі (1)–(3):

$$u(t,x) = \int_0^t W_1(t-\tau,x)\overline{g}_1(\tau)d\tau + \int_0^t W_2(t-\tau,x)\overline{g}_2(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^l E(t-\tau,x,\xi)\bar{f}(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{11}$$

де $\overline{g}_1(\tau) = L^{-1}[\overline{g}_1^*(p)]$, $\overline{g}_2(\tau) = L^{-1}[\overline{g}_2^*(p)]$, $\bar{f}(\tau,\xi) = L^{-1}[\bar{f}^*(p,\xi)]$ – обернені перетворення Лапласа.

Розпишемо інтеграли, враховуючи вигляд функцій $\overline{g}_1^*(p)$, $\overline{g}_2^*(p)$, $\bar{f}^*(p,\xi)$, а також властивості перетворення Лапласа згортки функцій [5]:

$$\int_0^t W_j(t-\tau,x)\overline{g}_j(\tau)d\tau \equiv W_j(t,x) * \overline{g}_j(t) = W_j(t,x) * [g_j(t) + m\delta'(t)\varphi(0) + m\psi(0) + \eta\varphi(0)] =$$

$$= W_j(t,x) * g_j(t) + \frac{\partial W_j(t,x)}{\partial t}m\varphi(0) + W_j(t,x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)] =$$

$$= \int_0^t W_j(t-\tau,x)g_j(\tau)d\tau + \frac{\partial W_j(t,x)}{\partial t}m\varphi(0) + W_j(t,x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)],\quad j = 1,2,$$

$$\int_0^t E(t-\tau,x,\xi)\bar{f}(\tau,\xi)d\tau \equiv E(t,x,\xi) * \bar{f}(t,\xi) = E(t,x,\xi) * [f(t,\xi) + \frac{p}{a^2}\varphi(\xi) + \frac{1}{a^2}\psi(\xi)] =$$

$$= \int_0^t E(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\tau + \frac{1}{a^2}\frac{\partial E(t,x,\xi)}{\partial t}\varphi(\xi) + \frac{1}{a^2}E(t,x,\xi)\psi(\xi).$$

Підставивши одержані інтеграли у формулу (11), отримаємо остаточний вигляд розв'язку задачі (1)–(3):

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{2}\left(\int_0^t W_j(t-\tau,x)g_j(\tau)d\tau + m\frac{\partial W_j(t,x)}{\partial t}\varphi(0) + W_j(t,x)[m\psi(0) + \eta\varphi(0)]\right) +$$

$$+ \int_0^t\int_0^l E(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l E(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \frac{1}{a^2}\int_0^l E(t,x,\xi)\psi(\xi)d\xi. \tag{12}$$

У формулі (12) за означенням

$$W_j(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} W_j^*(p,x)e^{pt}dp,\ \ j = 1,2,\quad E(t,x,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} E^*(p,x,\xi)e^{pt}dp, \tag{13}$$

де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа.

Знайдемо коректний для інженерних розрахунків вигляд функцій $W_j(t,x)$, $j=1,2$, $E(t,x,\xi)$.

Особливості функцій $W_j^*(p,x)$ та $E^*(p,x,\xi)$ зосереджені в коренях рівняння

$$\Delta^*(p) \equiv 2q_1Tqchql + (q_1^2 + q^2T^2)shql = 0. \tag{14}$$

Зауважимо, що точка $p = 0$ є правильною (усувною) особливою точкою для функцій $W_j(t,x)$, $j=1,2$, $E(t,x,\xi)$.

Справедлива лема [4].

Лема. (про розподіл особливостей). *Рівняння (14) не має коренів у півплощині* $\operatorname{Re} p \geq 0$ *за винятком точки* $p=0$ (*простий нуль*).

Це дає нам можливість покласти в рівностях (13) $\sigma_0 = 0$. Тоді рівності (13) набувають вигляду:

$$W_j(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re[W_j^*(is,x)e^{ist}]ds, \quad j=1,2, \quad E(t,x,\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} Re[E^*(is,x,\xi)e^{ist}]ds.$$

Визначимо функції:

$$\Delta^*(is) = \omega_1(s,l) + i\omega_2(s,l),$$

$$\omega_1(s,l) = -\frac{2\eta s^2T}{a}\cos\frac{sl}{a} - 2\eta s(k-ms^2)\sin\frac{sl}{a} \equiv 2\eta s\omega_3(s,l),$$

$$\omega_2(s,l) = \frac{2Ts}{a}(k-ms^2)\cos\frac{sl}{a} + \left((k-ms^2)^2 - \eta^2s^2 - \frac{s^2T^2}{a^2}\right)\sin\frac{sl}{a},$$

$$v_1(s,t) = \cos st\omega_1(s,l) + \sin st\omega_2(s,l),$$

$$v_2(s,t) = \sin st\omega_1(s,l) - \cos st\omega_2(s,l),$$

$$G_1(s,\xi,x) = \eta s\sin\frac{s\xi}{a}\omega_3(s,x) + \eta s\sin\frac{sx}{a}\omega_3(s,\xi),$$

$$G_2(s,\xi,x) = \eta^2s^2\sin\frac{s\xi}{a}\sin\frac{sx}{a} - \omega_3(s,x)\omega_3(s,\xi).$$

У результаті виконання зазначених операцій одержимо коректні для інженерних розрахунків вирази головних розв'язків задачі:

$$W_1(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega_3(s,l-x)v_2(s,t) - \eta s\sin\frac{s(l-x)}{a}v_1(s,t)}{[\omega_1(s,l)]^2 + [\omega_2(s,l)]^2}ds,$$

$$W_2(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\omega_3(s,x)v_2(s,t) - \eta s\sin\frac{sx}{a}v_1(s,t)}{[\omega_1(s,l)]^2 + [\omega_2(s,l)]^2}ds, \tag{15}$$

$$E(t,x,\xi) = \frac{a}{\pi s}\begin{cases} \int_0^{+\infty}(v_1(s,t)G_1(s,l-\xi,x) + v_2(s,t)G_2(s,l-\xi,x))ds, 0<x<\xi<l, \\ \int_0^{+\infty}(v_1(s,t)G_1(s,\xi,l-x) + v_2(s,t)G_2(s,\xi,l-x))ds, 0<\xi<x<l. \end{cases}$$

Підсумком викладеного вище є твердження.

Теорема. *Якщо функції* $g_1, g_2 \in C^{(2)}([0,\infty))$, *функція* $f \in C^{(2,2)}(D)$, *функції* $\varphi \in C^{(3)}([0,l])$, $\psi \in C^{(2)}([0,l])$, *виконуються умови узгодження, то функція* $u(t,x)$, *визначена формулою* (*12*), *є класичним розв'язком гіперболічної задачі* (1)–(3). *При цьому головні розв'язки* $W_j(t,x)$ ($j=1,2$) *та* $E(t,x,\xi)$ *визначаються формулами* (15).

Висновки

Одержано інтегральне зображення розв’язку гіперболічної крайової задачі у випадку неоднорідного рівняння з неоднорідними початковими умовами та наявності у крайових умовах першої та другої похідних по часовій змінній і першої похідної по просторовій змінній. Досліджено спектр задачі, виписано головні розв’язки (функції Гріна, породжені неоднорідністю рівняння та початкових і крайових умов) задачі.

Список використаної літератури

1. Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики / А.И. Комеч. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 160 с.
2. Ленюк О.М. Моделювання коливних процесів в елементах конструкцій з включенням вантажу на кінці / О.М. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці: Прут, 2006. – Вип. 14. – С. 102-108.
3. Ленюк О.М. Неоднорідна крайова задача для рівняння коливання з вантажем на лівому кінці / О.М. Ленюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013. – Вып.2 (47). – С. 197-201.
4. Ленюк О.М. Моделювання коливних процесів з включенням вантажів на кінцях / О.М. Ленюк // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2014. – Вып.3 (50). – С. 341-346.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Г. Деч. – М.: Наука, 1965. – 288 с.