УДК 519.6

Ю.І. ПЕРШИНА
Українська інженерно-педагогічна академія
В.О. ПАСІЧНИК
Харківська державна академія дизайну і мистецтв

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙНАМИ МЕТОДОМ МІНІМАКСА

Розроблено метод наближення функцій однієї змінної, що мають розриви першого роду, за допомогою розривних лінійних апроксимаційних сплайнів. В якості експериментальних даних виступають односторонні границі заданих вузлів. Пропонується шукати такі параметри розривного сплайна, щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі в даній роботі використовується методом мінімакса. Детально описані чисельні експерименти, які підтверджують ефективність запропонованого методу.

Ключові слова: розривний сплайн, метод мінімакса, розрив першого роду.

Ю.И. ПЕРШИНА
Украинская инженерно-педагогическая академия
В.А. ПАСЕЧНИК
Харьковская государственная академия дизайна и искусств

ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗРЫВНЫМИ СПЛАЙНАМИ МЕТОДОМ МИНИМАКСА

Разработан метод приближения функций одной переменной, имеющей разрывы первого рода, с помощью разрывных линейных аппроксимационных сплайнов. В качестве экспериментальных данных выступают односторонние границы заданных узлов. Предлагается искать такие параметры разрывного спайна, чтобы приближение было лучшим в том или ином смысле. Для решения этой задачи в данной работе используется методом минимакса. Подробно описаны численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: разрывный сплайн, метод минимакса, разрыв первого рода.

I.I. PERSHYNA
Ukrainian Engineering and Pedagogical Academy
V.A. Pasichnik
Kharkiv State Academy of Design and Arts

APPROXIMATION OF DISCONTINUOUS FUNCTIONS BY DISCONTINUOUS SPLINES BY MINIMAX METHOD

The problem of one variable function approximation having discontinuities of the first kind is solved in the article. The experimental data are the unilateral boundaries of the given nodes. The idea is that the functions of certain classes are better approximated by functions belonging to these classes too. Those discontinuous functions with discontinuities of the first kind are naturally approximated by discontinuous splines, and not by sums of infinitely differentiable functions, as is done in the method of approximation by Fourier sums. This allows you to get rid of the phenomenon of Gibbs. Therefore, the method proposed in the paper makes essential use of discontinuous linear approximation splines. The discontinuous constructions proposed in this paper for approximation of discontinuous functions have the same order of smoothness as the object under study. It is proposed to search for such parameters of a discontinuous spline, so that approximation is best in one or another sense. To solve this problem, we use the minimax method in this paper. Numerical experiments that confirm the effectiveness of the proposed method are described in detail.

In further studies, it is planned to develop methods for identifying break points using the minimax method and to develop a theory of approximation of discontinuous functions of two variables and algorithms for identifying lines of discontinuity .

The developed methods can be used to solve problems using remote methods. For example, in flaw detection in the detection of cracks in industrial products using nondestructive counter, in many problems of geophysics in establishing the location of boundaries that separate blocks with different physical properties that characterize the internal structure of the Earth. In medical computed tomography, when studying the internal structure of the body, it is useful to use its heterogeneity, i.e. different density in different parts of the body.

Keywords: discontinuous spline, method of minimax, discontinuity of the first kind.

Постановка проблеми

Існує багато практично важливих наукових та технічних галузей, в яких об'єкти дослідження математично описуються величинами, що зазнають розрив. Такі об'єкти часто виникають в задачах, які використовують дистанційні методи і, зокрема, в задачах томографії. В багатьох задачах геофізики встановлення місця розташування границь, що розділяють блоки з різними фізичними властивостями, є першим етапом в подальших дослідженнях, направлених на визначення фізичних величин, що характеризують внутрішню будову Землі. В комп'ютерній томографії при дослідженні внутрішньої структури тіла корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність в різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок тощо мають різну щільність, тобто щільність всього тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній чи поверхонь).

Той факт, що на сьогоднішній день не існує загальної теорії описів вказаних явищ та процесів, говорить про актуальність створення теорії наближення розривних функцій розривними конструкціями та розробки методів виявлення точок або ліній розриву функції.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах. Існують багато технічних задач, в яких наближуюча функція не обов'язково є гладкою, іноді допустима її розривність – лише б похибка наближення була достатньо мала. Наближення такого типу раніше детально не розглядалося, існують тільки підходи до розв'язання такого типу задач, які працюють для окремих випадків. В своїх роботах Петухов А.П. [1] досліджує наближення розривних функцій в метриці Хаусдорфа. Існують методи розв'язання крайових задач з розривними розв'язками, в розвиток яких внесли значний вклад такі вчені, як Сергієнко І.В., Дейнека В.С., Скопецький В.В., Литвин О.М. та інші [2]. В роботі А.Л. Агеева, Т.В. Антонової [3] запропонований метод визначення числа точок розриву та їх положення на основі використання явища Гіббса. Але для цього потрібна додаткова інформація: найменша та найбільша величини стрибків наближуючої функції. Крім того припускається, що інтервали, в яких знаходяться явища Гіббса, не перетинаються, тобто неможливо відділити точки розриву, що знаходяться близько один від одного. В роботі [4] розроблені методи відновлення ліній розриву за допомогою вейвлетів. Ці методи відновлення використовують полігармонічні вейвлети, які мають нескінченний носій. Такого типу конструкції, в загалі кажучи, можуть привести до згладжування сигналу, який досліджується, і вимагати додаткового аналізу отриманих результатів.

В роботі [5] авторами запропонований метод відновлення розривної лінійної функції однієї змінної та алгоритм виявлення точок ε-розриву. В даній статті представляється метод наближення розривної функції однієї змінними розривним сплайном, використовуючи метод мінімакса.

Мета дослідження

Постановка задачі. Нехай задано функцію однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ з можливими розривами першого роду в точках x_k, $k=\overline{1,n-1}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a,b]$ на $(n-1)$ частин.

Визначення 1. Розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k,x_{k+1}], k=\overline{1,n-1}$, назвемо наступну функцію:

$$S(x)=Sp_k(x,C)=C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1}\ , \tag{1}$$

де $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$ – параметри сплайна $S(x)$, що визначаються у вигляді односторонніх границь $C_k^+=\lim\limits_{x\to x_k+0} f(x),\ C_{k+1}^-=\lim\limits_{x\to x_{k+1}-0} f(x)$.

Треба знайти такі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$ у розривному інтерполяційному сплайні (1), щоб наближення було найкращим у тому чи іншому сенсі. Для розв'язування цієї задачі використовуємо методом мінімакса [32, 49–51] .

Викладення основного матеріалу дослідження

Наближення розривних функцій розривними апроксимаційними сплайнами методом мінімакса. Сплайном найкращого наближення будемо вважати сплайн, який на кожному з інтервалів $[x_k,x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ має найменше максимальне відхилення від наближуваної функції $f(x)$.

Теорема 1. Якщо на кожному з інтервалів $[x_k,x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ невідомі параметри $C_k^+, C_{k+1}^-,\ k=\overline{1,n-1}$ знаходити з умови

$$\max_{1\le k\le n-1}\left|f(x)-Sp_k(x)\right|\to\min_C , \tag{2}$$

то отримаємо розривний сплайн найкращого наближення.

Теорема 2. Якщо наближувана функція $f(x)$ є розривною кусково-лінійною функцією з точками розриву $x = x_k, k = \overline{1,n}$ і наближуємо її кусково-лінійним розривним сплайном $S(x)$, що визначається формулами (1), і невідомі параметри-елементи C_k^+, C_{k+1}^-, $k = \overline{1,n-1}$ знаходимо з умови (2), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x) = f(x)$.

Точки розриву функції збігаються з точками розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1,n-1}$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції, яке буде дорівнювати одному із значень:

$$J_{[x_k,x_{k+1}]}(C) = \max_{[x_k,x_{k+1}]} \{|f_k(x_k) - Sp_k(x_k,C)|, |f_k(x_{k+1}) - Sp_k(x_{k+1},C)|, \\ |f_k(a_2) - Sp_k(a_1,C)|, ..., |f_k(a_m) - Sp_k(a_m,C)|\} \quad (3)$$

де a_l, $l = \overline{1,m}$ – стаціонарні точки функції $J_k(x,C) = f_k(x) - Sp_k(x,C)$ на інтервалі $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1,n-1}$.

Потім знаходимо мінімум від отриманого максимуму по всіх інтервалах:

$$W = \min_{1\le k\le n-1}(J_{[x_k,x_{k+1}]}(C)) = \min_{1\le k\le n-1}(\max_{a\le x\le b}|f(x) - Sp_k(x,C)|).$$

Отримуємо матрицю W, яка і представляє собою шукану матрицю параметрів C_k^+, C_{k+1}^-, $k = \overline{1,n-1}$.

Приклад 1. Нехай задано функцію $f(x)$ на інтервалі $[-1;1]$ з однією точкою розриву $x = 0$ першого роду (рис. 1):

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0, \\ x-1, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Наближуємо функцію $f(x)$ сплайном вигляду

$$Sp(x) = \begin{cases} C_1^+ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} + C_2^- \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x_1 \le x < x_2, \\ C_2^+ \dfrac{x - x_3}{x_2 - x_3} + C_3^- \dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2}, & x_2 \le x < x_3. \end{cases}$$

У даному прикладі точка розриву $x = 0$ збігається з точкою розриву наближувального сплайна і найкраще наближення сплайна до функції виконуємо аналітично.

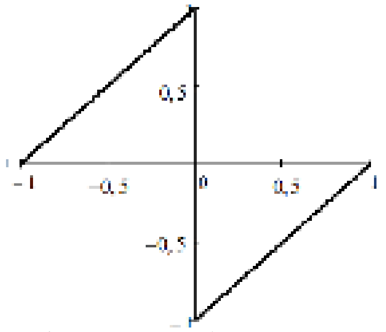

Рис. 1. Графічний вигляд наближуваної функції

На кожному з інтервалів $[-1;0]$ та $[0;1]$ знаходимо максимальне значення відхилення сплайна від функції $f(x)$ за наступним алгоритмом: оскільки і сплайн, і наближувальна функція на кожному інтервалі є прямими, то максимальне відхилення буде дорівнювати одному з двох значень:

$$f(0-0) - Sp(0-0) \text{ та } f(-1) - Sp(-1) \text{ на інтервалі } [-1;0],$$

$$f(0+0) - Sp(0+0) \text{ та } f(1) - Sp(1) \text{ на інтервалі } [0;1].$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження таких значень параметрів *C*, за яких будуть виконуватися умови:

$$\max_{[-1,0]}\{f(0-0) - Sp(0-0),\ f(-1) - Sp(-1)\} \to \min_C,$$

$$\max_{[0,1]}\{f(0+0) - Sp(0+0),\ f(1) - Sp(1)\} \to \min_C.$$

У цьому прикладі сплайн матиме вигляд:

$$Sp(x,C)=\begin{cases}-C_1^+x+C_2^-(1+x), & -1\le x<0,\\ -C_2^+(x-1)+C_3^-x, & 0\le x<1.\end{cases}$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,C)$ від функції $f(x)$ дорівнює:

$$J(x,C)=\left|f(x)-Sp(x,C)\right|=\begin{cases}\left|x+1-C_1^+x+C_2^+(1+x)\right|, & -1\le x<0,\\ \left|x-1+C_2^+(x-1)+C_3^-x\right|, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Згідно з формулою (3) від цієї функції знайдемо максимум по x:

$$JM(C)=\max_{x\in[-1;1]}(J(x,C))=\begin{cases}\max\{\left|-C_1^+\right|,\left|1-C_2^-\right|\},\\ \max\{\left|-1-C_2^+\right|,\left|-C_3^-\right|\}.\end{cases}$$

Таким чином, задача звелась до знаходження параметрів сплайна – елементів матриці C, які забезпечують мінімум серед двох величин:

$$\min_C JM(C)=\min_C\{\max\{\left|-C_1^+\right|,\left|1-C_2^-\right|\},\max\{\left|-1-C_2^+\right|,\left|-C_3^-\right|\}\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю C:

$$C=\begin{pmatrix}C_1^+ & C_2^-\\ C_2^+ & C_3^-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, найкраще наближення заданої функції в прикладі 1 матиме вигляд:

$$Sp(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1<x<x_2,\\ \dfrac{-x+x_3}{x_2-x_3}, & x_2<x<x_3.\end{cases}$$

Ми отримали точний вираз функції $f(x)$, тобто $Sp(x)=f(x)$, що підтверджує викладену вище теорію.

Приклад 2. Нехай задано функцію $f(x)$ на інтервалі $[-\pi,\pi]$ з двома точками розриву першого роду, яка не є лінійною (рис. 2):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left(x+\pi\right), & -\pi\le x\le-\dfrac{\pi}{2},\\ \sin(x), & -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{2}{\pi}\left(x-\pi\right), & -\pi\le x\le-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

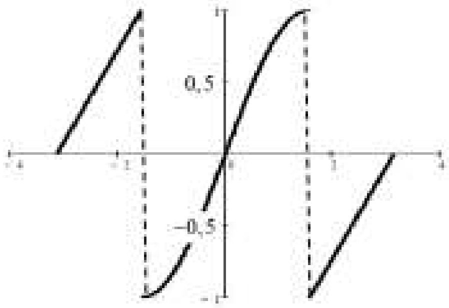

Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції.

Обираємо вузли: $x_1=-\pi,\ x_2=-\dfrac{\pi}{2}, x_3=\dfrac{\pi}{2}, x_4=\pi$. Наближуємо сплайном такого самого вигляду, як і в прикладі 2. Тобто наближувальний сплайн в цьому прикладі матиме вигляд:

$$Sp(x,C)=\begin{cases} -C_1^+\dfrac{2x+\pi}{\pi}+2C_2^-\dfrac{x+\pi}{\pi}, & -\pi\le x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ -C_2^+\dfrac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}+C_3^-\dfrac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{2}, \\ -2C_3^+\dfrac{x-\pi}{\pi}+C_4^-\dfrac{2x-\pi}{\pi}, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi. \end{cases}$$

Абсолютне відхилення сплайна $Sp(x,C)$ від функції $f(x)$ матиме вигляд:

$$J(x,C)=\left|f(x)-Sp(x,C)\right|=\begin{cases} \left|\dfrac{2}{\pi}(x+\pi)+C_1^+\dfrac{2x+\pi}{\pi}-2C_2^-\dfrac{x+\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \left|\sin(x)+C_2^+-C_3^-\dfrac{x+\pi/2}{\pi}\right|, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right), \\ \left|\dfrac{2}{\pi}(x-\pi)+2C_3^+\dfrac{x-\pi}{\pi}-C_4^-\dfrac{2x-\pi}{\pi}\right|, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]. \end{cases} \quad (4)$$

Знайдемо максимальне значення по x отриманої абсолютної різниці на кожному з інтервалів:

1. На інтервалі $\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$ будемо користуватися формулою (3), як і в попередніх прикладах:

$$JM1(A)=\max_{x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,C))=\max\left\{\left|-C_1^+\right|,\left|1-C_2^-\right|\right\}.$$

2. Розглянемо інтервал $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Нехай $g(x)=\sin(x)$ на цьому інтервалі наближується лінійною функцією $y=ax$ (рис. 3).

Розглянемо різницю функції та наближувального сплайна: $h(x)=\sin x-ax$. Максимум від цієї функції може досягатися на кінцях інтервалу та в точці екстремуму. Знайдемо цю точку:

$$h'(x)=0\Rightarrow\cos x-ax=0\Rightarrow x=\pm\arccos(a).$$

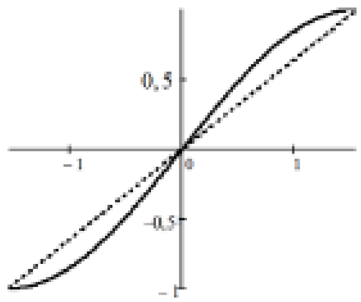

Рис. 3. Наближення функції $f(x)$ функцією $y=ax$

Розглянемо максимум різниці $h(x)$:

$$\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(|h(x)|)=\max\left\{\left|\sin(\arccos a)-a\arccos a\right|,\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\right\}=$$

$$=\max\left\{\left|\sqrt{1-a^2}-a\arccos a\right|,\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|\right\}=\left|a\frac{\pi}{2}-1\right|.$$

Отже, на інтервалі $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ максимальне значення по $\boldsymbol{x}$ абсолютної різниці наближуваної функції $f(x)$ і сплайна $Sp(x,C)$ (3) матиме вигляд:

$$JM2(C)=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}(J(x,C))=$$

$$=\max_{x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\left|\sin(x)+C_2^{+}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\pi}-C_3^{-}\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right|=\max\{\left|-1-C_2^{+}\right|,\left|1-C_3^{-}\right|\}.$$

3. На інтервалі $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ максимальне значення відхилення (3) матиме вигляд:

$$JM3(C)=\max_{x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}(J(x,C))=\max\{\left|-1-C_3^{+}\right|,\left|-C_4^{-}\right|\}.$$

Тепер знаходимо мінімум від отриманих максимумів:

$$\min_C JM(C)=\min\{JM1(C),JM2(C),JM3(C)=\min_C\{\max\{\left|-C_1^{+}\right|,\left|1-C_2^{-}\right|\},$$

$$\max\{\left|-1-C_2^{+}\right|,\left|1-C_3^{-}\right|\},\max\{\left|-1-C_3^{+}\right|,\left|-C_4^{-}\right|\}\}.$$

У результаті отримаємо таку матрицю *C*:

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, найкраще наближення заданої функції в прикладі 2 матиме вигляд:

$$Sp(x,C)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}(x+\pi), & -\pi\le x<-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2x}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}(x-\pi), & \frac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$$

Висновки

Таким чином, в роботі запропонований метод, за допомогою якого можна наблизити функцію однієї змінної з розривами першого роду розривним лінійним сплайном. В подальшому планується узагальнити цей метод на випадок, коли вузли сплайна не співпадають з точками розриву функції $f(x)$.

Як вже зазначалося, цей метод можна буде використати для відновлення внутрішньої структури об’єктів, що мають різну щільність, в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Список використаної літератури

1. Петухов А.П. О приближении разрывных функций в метрике Хаусдорфа / А.П. Петухов // Математические заметки. – 1985. – Т. 32, № 1. – С.25 -40.
2. Дейнека В.С. Анализ многокомпонентных распределенных систем и оптимальное управление / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 2007. – 703 с.
3. Агеев А.Л. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных / А.Л. Агеев, Т.В. Антонова // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т.15, № 1(49). – С. 3-13.
4. Rossini M. Detecting discontinuities in two-dimensional signals sampled on a grid / M. Rossini // Journal of Numerical Analysis, Industrial and Apply Mathematics. – 2007. – Vol. 1, № 1. – P. 1-13.
5. Першина Ю.І. Чисельна реалізація методу виявлення точок розриву першого роду функції однієї змінної / Ю.І. Першина, В.О. Пасічник // Вісник ХНТУ. – Херсон, 2017. – №3(62), Т.1. – С. 80-84.