УДК 511

Е.В. СТЕГАНЦЕВ, Н.И. ДАНИЛЬЧЕНКО
Запорожский национальный университет

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УЗЛОВ ДЕРЕВА ШТЕРНА-БРОКО В ТЕРМИНАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

Статья посвящена таким двум важным понятиям алгебры и теории чисел как непрерывные дроби и дерево Штерна-Броко. Такая сумма называется высотой рационального числа. Доказана соответствующая теорема, утверждающая, что множества рациональных чисел высотой n и чисел, лежащих в n-м слое дерева Штерна-Броко, равны.

Подробно изложен алгоритм представления узла дерева Штерна-Броко символами L и R, который является основой построения системы счисления, являющейся аналогом общеизвестной двоичной системы счисления. Также описан способ преобразования числа, заданного при помощи символов L и R в обыкновенную, либо же непрерывную дробь. Для понимания техники перехода от символьной записи рационального числа к самому числу и наоборот приведены примеры с подробными пояснениями. Результаты работы могут быть применены к решению задач алгебры и теории чисел, в частности, к решению некоторых видов диофантовых уравнений, таких как, например, уравнение Пелля.

Ключевые слова: непрерывная дробь, последовательность Фарея, дерево Штерна-Броко, n-й слой дерева Штерна-Броко, узел дерева Штерна-Броко, коэффициент непрерывной дроби, высота рационального числа, алгоритм Евклида, L, R-представление рационального числа, предок рационального числа, медианта дробей.

Є.В. СТЄГАНЦЕВ, Н.І. ДАНИЛЬЧЕНКО
Запорізький національний університет

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ВУЗЛІВ ДЕРЕВА ШТЕРНА-БРОКО В ТЕРМІНАХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ

Стаття присвячена таким двом важливим поняттями алгебри і теорії чисел як неперервні дроби і дерево Штерна-Броко. Описано поняття шару дерева Штерна-Броко. У роботі розглядається зв'язок між вузлами n-го шару дерева Штерна-Броко, які зображують раціональні числа, і сумами коефіцієнтів ланцюгових дробів, відповідних цим раціональним числам. Така сума називається висотою раціонального числа. Доведена відповідна теорема, яка стверджує, що множини раціональних чисел висотою n і чисел, що лежать в n-му шарі дерева Штерна-Броко, рівні.

При доведенні теореми використовуються властивості неперервних дробів і дерева Штерна-Броко, деякі з яких наведено у роботі. Докладно викладено алгоритм представлення вузла дерева Штерна-Броко символами L і R, який є основою побудови системи числення, що є аналогом загальновідомої двійкової системи числення. При такому розкладі важливим моментом є використання понять лівого і правого піддерева дерева Штерна-Броко, в яких розташовуються всі правильні та неправильні дроби відповідно. Також описано спосіб перетворення числа, заданого за допомогою символів L і R в звичайний, або ж неперервний дріб. Для розуміння техніки переходу від символьного запису раціонального числа до самого числа і навпаки наведені приклади з детальними поясненнями. Результати роботи можуть бути застосовані до розв'язання задач алгебри і теорії чисел, зокрема до розв'язання деяких видів діофантових рівнянь, таких як, наприклад, рівняння Пелля.

Ключові слова: неперервний дріб, послідовність Фарея, дерево Штерна-Броко, n-й шар дерева Штерна-Броко, вузол дерева Штерна-Броко, коефіцієнт неперервного дробу, висота раціонального числа, алгоритм Евкліда, L, R - подання раціонального числа, предок раціонального числа, медіанта дробів.

E.V. STEGANTSEV, N.I. DANYLCHENKO
Zaporozhye national university

ON ONE PROPERTY OF THE NODES OF THE STERN-BROCOT TREE IN TERMS OF THE CONTINUED FRACTIONS

The article deals with two important concepts of algebra and number theory: the continued fractions and the Stern-Brocot tree. The concept of a layer of the Stern-Brocot tree has been described. The paper deals with the correspondence between the nodes of the n -th layer of the Stern-Brocot tree, which represent the rational numbers, and the sums of the coefficients of the continued fractions corresponding to these rational numbers. Such a *sum is called the height of the rational number. A corresponding theorem has been proved. It states that the sets of the rational numbers with the height n and numbers lying in the n -th layer of the Stern-Brockot tree are equal.*

In the proof of the theorem, the properties of continued fractions and the Stern-Brocot tree have been used, some of which are given in the paper. The algorithm for representing a node of the Stern-Brocot tree with the help of the symbols L and R has been described in details. This algorithm is the basis for the constructing a number system, which is an analog of the well-known binary number system. In this representation, the important point is to use the concepts of the left and the right subtrees of the Stern-Brocot tree, in which all the regular and irregular fractions are located, respectively. The method of converting a number, given by symbols L and R, into an ordinary or continued fraction has been described. One uses the matrix representation of the rational number, which is not frequently encountered. The representation of the rational number in such form gives us some advantages. For example, one can reduce the process of the transformation of the node of the Stern-Brocot tree, which is given with the help of L and R symbols, to the multiplication of the square matrices. At the same time, one can find the ancestors of the considered fraction. The examples have been given with the detailed explanations for understanding the technique of transition from the symbolic form of the rational number to the number itself and vice versa. The results of the work can be applied to solving problems of algebra and number theory, in particular, to solving certain types of Diophantine equations such as, for example, the Pell equation.

Keywords: continuous fraction, Farey sequence, Stern-Brocot tree, n -th layer of the Stern-Brocot tree, the node of the Stern-Brocot tree, the coefficient of continued fraction, the height of the rational number, Euclid's algorithm, L, R-representation of the rational number, the ancestor of the rational number, the median of fraction.

Постановка проблемы

В теории чисел понятие непрерывной дроби находит достаточно широкое применение. В частности, непрерывные дроби можно успешно использовать при описании алгебраической структуры модуля, при решении сравнений первой степени, при решении уравнений в целых числах. Чаще всего это понятие используется при решении уравнения Пелля [1]. Вопрос о связи непрерывных дробей с узлами дерева Штерна-Броко является не менее интересным.

В статье доказана теорема, позволяющая идентифицировать номер слоя дерева Штерна–Броко, которому принадлежит рациональное число, по его разложению в непрерывную дробь. Оказывается, сумма коэффициентов непрерывной дроби для рационального числа (высота рационального числа) определяет номер слоя, которому принадлежит это число. При этом существенно используется представление чисел дерева Штерна-Броко в виде строки, состоящей из букв L и R.

Анализ последних исследований и публикаций

Понятие непрерывной дроби рассматривается, например, в [1]. Дерево Штерна–Броко и последовательности Фарея описаны в [3]. В книге [3] предложено представление чисел дерева Штерна–Броко двоичным кодом. Понятие о высоте рационального числа и формулировка теорема о связи чисел n- го слоя дерева Штерна–Броко с высотой рационального числа взяты из [5].

Формулирование цели исследования

Обосновать связь между узлами n-го слоя дерева Штерна–Броко и рациональными числами высоты n. Указать возможные применения этого соотношения к решению задач алгебры и теории чисел.

Изложение основного материала исследования

Определение.

Цепной (непрерывной) дробью называется выражение вида

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\ldots}}},$$

где q_0 - целое число, $q_1, q_2, q_3, \ldots$ - натуральные числа, называемые коэффициентами цепной дроби.

Замечание.

Непрерывная дробь рационального числа всегда конечна. Для ее обозначения используют символ

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{q_k}}}=<q_0, q_1, \ldots, q_k>.$$

Определение.

Дерево Штерна-Броко (или дерево Фарея) – это способ расположения всех неотрицательных несократимых обыкновенных дробей в вершинах упорядоченного бесконечного двоичного дерева (рис. 1).

Слоем в дереве Штерна-Броко называется множество дробей этого дерева, находящихся на одинаковом расстоянии от его корня (дроби $\frac{1}{1}$). При этом корень считаем принадлежащим слою с номером 1.

Дерево Штерна-Броко обладает набором интересных свойств. Напомним те из них, которые понадобятся для дальнейшего изложения:

1) Каждая дробь в этом дереве является медиантой [3] своего ближайшего левого и ближайшего правого предков.
2) Дерево содержит все рациональные числа, причем ни одно из них не встречается более одного раза.

Определение.

Высотой положительного рационального числа n называется сумма коэффициентов цепной дроби, соответствующей этому числу, то есть для

$$n = < q_0, q_1, ..., q_k >$$

высотой будет число

$$h(n) = q_0 + q_1 + ... + q_k .$$

Например, рассмотрим первые четыре числа четвертого слоя дерева Штерна-Броко (рис.1) и представим каждое из них в виде цепной дроби, используя алгоритм Евклида. Имеем

$$\frac{1}{4} = < 0, 4 >, \quad \frac{2}{5} = < 0, 2, 2 >, \quad \frac{3}{5} = < 0, 1, 1, 2 >, \quad \frac{3}{4} = < 0, 1, 3 >.$$

Замечание.

Для записи конечной цепной дроби приняты две формы: $n = < q_0, q_1, ..., q_k > = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{q_k}}}$ и

$$n = < q_0, q_1, ...q_k - 1, 1 > = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{... + \cfrac{1}{q_k - 1 + \frac{1}{1}}}} \quad \alpha = < q_0, q_1, ...q_k - 1, 1 > .$$

Например, имеем $\frac{1}{4} = < 0, 4 > = < 0, 3, 1 > = 0 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{1}}$, $\frac{2}{5} = < 0, 2, 2 > = < 0, 2, 1, 1 > 0 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}$.

Для нахождения высоты этих чисел согласно определению достаточно просуммировать коэффициенты цепных дробей, соответствующих рассматриваемым числам, причем эта сумма не зависит от формы записи цепной дроби. Для каждого из указанных чисел высота равна четырем, что соответствует номеру слоя дерева Штерна-Броко. Оказывается, этот факт имеет место для произвольного слоя. В работе [5] сформулирована соответствующая теорема и читателю предлагают ее доказать. Здесь мы приводим формулировку этой теоремы в несколько иной форме и ее доказательство.

Теорема.

Множества рациональных чисел высотой k и чисел, лежащих в k - м слое дерева Штерна–Броко, равны.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, опишем, как можно представить любой узел дерева Штерна-Броко. Будем использовать символ L, если от корня $\frac{1}{1}$ дерева к заданному узлу движемся вниз и влево, и символ R, если движемся вниз и вправо. Например, из рисунка 1 видно, что числу $\frac{3}{5}$ соответствует код LRL. Этот код можно еще называть двоичным кодом, если под символами L и R понимать 0 и 1 соответственно.

В [3] предложено с символами L и R ассоциировать матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно. Введение в рассмотрение указанных матриц позволяет процесс преобразования узла дерева Штерна – Броко, заданного двоичным кодом, в обыкновенную дробь свести к перемножению квадратных матриц второго порядка. Кроме того, можно определить предков этой дроби и сказать, в каком слое дерева Штерна-Броко лежит искомое число. Например, ответим на вопрос, какому числу соответствует символ L^2RL (эта запись эквивалентна записи $LLRL$). Поскольку для достижения искомого узла было предпринято четыре шага, делаем вывод о том, что число лежит в пятом слое дерева Штерна-Броко. Подставляя вместо L и R соответствующие им матрицы, вычислим произведение

$$L^2RL=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Предками искомого числа являются дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Пользуясь правилом построения дерева Штерна-Броко, получаем, что искомое число равно $\frac{3}{8}$.

Найдем разложение числа L^2RL в цепную дробь. В дереве Штерна–Броко есть два поддерева. При этом все дроби, располагающиеся в левом поддереве – правильные, а все дроби из правого поддерева – неправильные. Так как в двоичном представлении искомого числа первая буква L, то искомая дробь является правильной и первым коэффициентом соответствующей ей непрерывной дроби есть число 0. Остальными коэффициентами есть показатели степеней букв, входящих в двоичное представление числа. Таким образом, получаем

$$L^2RL=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}.$$

Лемма.

В $(k+1)$-ом слое дерева Штерна-Броко находится ровно 2^k узлов, последовательность двоичных кодов которых имеет вид L^k, $L^{k-1}R$,…, R^k.

Лемма следует из определения слоя и свойства 2 дерева Штерна-Броко. Действительно, любой узел в $(k+1)$-ом слое дерева Штерна-Броко имеет двоичный код длины k. Согласно договоренности, их число совпадает с числом двоичных чисел длины k, а указанная последовательность возрастает от двоичного числа $\underbrace{(0,...0)}_{k}$ до двоичного числа $\underbrace{(1,...1)}_{k}$.

Например, для $k=3$ имеем такую последовательность двоичных кодов: L^3, L^2R, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR.

Доказательство теоремы.

Согласно лемме в слое с номером ($k+1$) имеем 2^k узлов. Каждому из узлов ставится в соответствие одна из матриц вида L^k, $L^{k-1}R$,…, R^k. Как видно, сумма показателей степеней букв L и R в представлении числа $(k+1)$-ого слоя дерева постоянна и равна k. Запишем для каждого числа соответствующую ему непрерывную дробь, найдем сумму коэффициентов этих дробей, то есть высоту рационального числа, получим число $(k+1)$.

Таким образом, каждый узел $(k+1)$-го слоя дерева Штерна-Броко есть рациональное число высоты $(k+1)$. Осталось доказать, что каждому рациональному числу высоты $(k+1)$ соответствует некоторый узел в $(k+1)$-ом слое дерева Штерна-Броко.

Рассмотрим рациональное число высоты $(k+1)$, или иначе, конечную непрерывную дробь $<q_0,q_1,...,q_n,1>$, для которой выполнено условие $q_0+q_1+...+q_n=k$. Перейдем к двоичному представлению этой дроби с использованием букв L и R. Возможны два варианта. Если $q_0=0$, то двоичное представление начинается с буквы L, в противном случае – с буквы R. Далее, чередуя буквы L и R, записываем полный код искомой непрерывной дроби. Например, непрерывной дроби $<0,1,2,1>$

соответствует двоичный код LR^2. В общем виде, непрерывной дроби $< q_0, q_1, ..., q_n, 1 >$, в первом случае, соответствует код $L^{q_1}...R^{q_n}$ или $L^{q_1}...L^{q_n}$. При этом, искомое рациональное число представляет собой правильную дробь и расположено в левом поддереве дерева Штерна-Броко. При $q_0 \neq 0$ для непрерывной дроби получим двоичный код в виде $R^{q_0}...R^{q_n}$ или $R^{q_0}...L^{q_n}$. Поскольку по условию $q_0 + q_1 + ... + q_n = k$, то согласно лемме, этот код изображает один из узлов в $(k+1)$-ом слое дерева Штерна-Броко.

Теорема доказана.

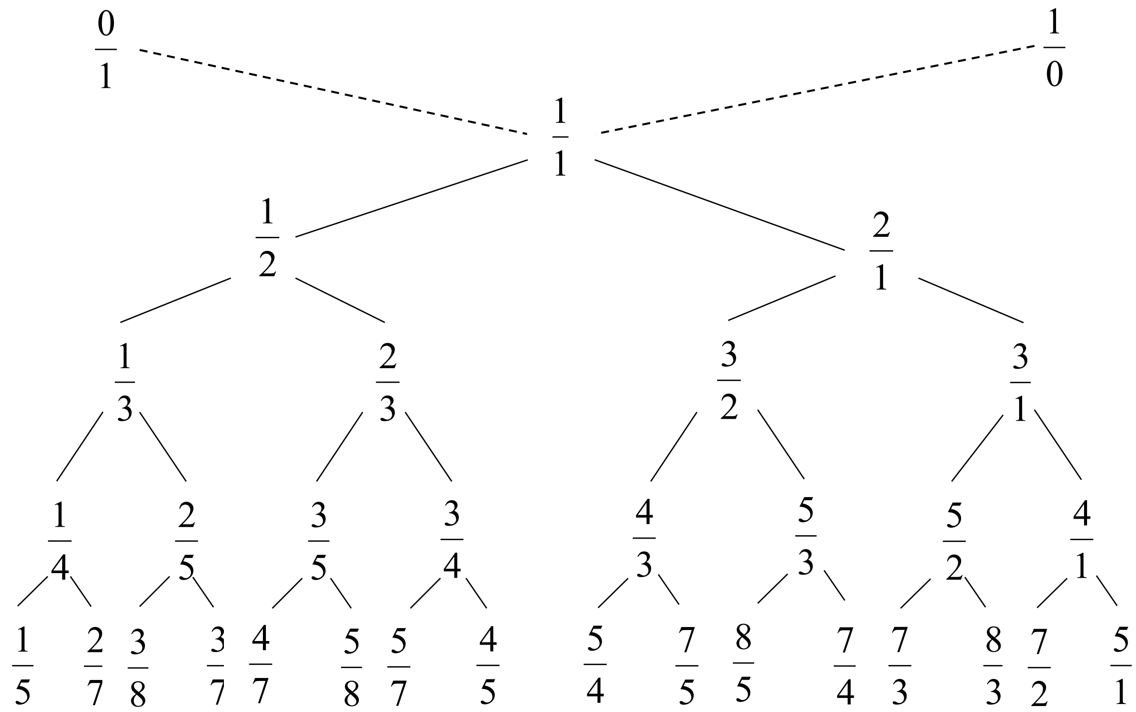

Рис. 1. Дерево Штерна-Броко

Выводы

В статье доказана теорема, дающая связь между рациональными числами высоты n и узлами n-го слоя дерева Штерна-Броко. Приведены примеры, поясняющие рассмотренные понятия и теоремы.

Список использованной литературы

1. Арнольд В.И. Цепные дроби / В.И. Арнольд. — М.: МЦНМО, 2000. — 40 с.
2. Брюно А.Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений / А.Д. Брюно // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — Вип. 1. — 20 с.
3. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
4. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / Г. Дэвенпорт. — М: Наука, 1965. —176 с.
5. Ряды Фарея и цепные дроби: Олимпиадная математика СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова – школа им. А.Н. Колмогорова, [Электронный ресурс]. — М., 2014. — Режим доступа: http://math.mosolymp.ru/upload/files/2014/AESC/rounding/2013-11-20-farey-sequence.pdf