ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 514.18

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.О. ТУЛУПОВА
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
І.В. ВОРОНЦОВА
Полтавський коледж нафти і газу Полтавського національного технічного університету імені Юрія Кондратюка

ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ВНУТРІШНІХ ВУЗЛІВ, ЯК СУПЕРПОЗИЦІЙ ЗАДАНИХ КООРДИНАТ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТА ДВОХ КОНТУРНИХ ВУЗЛІВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ

В роботі проведено дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій трійок суміжних точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів із врахуванням величини рекурентної залежності, що є прообразом зовнішнього формоутворюючого навантаження у статико-геометричному методі дискретного геометричного моделювання.

Результати проведених досліджень дозволяють моделювати врівноважені дискретно визначені одновимірні геометричні образи без складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання.

Ключові слова: статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина рекурентної залежності, коефіцієнти суперпозиції.

О.В. ВОРОНЦОВ, Л.А. ТУЛУПОВА
Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка
И.В. ВОРОНЦОВА
Полтавский колледж нефти и газа Полтавского национального технического университета имени Юрия Кондратюка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ВНУТРЕННИХ УЗЛОВ, КАК СУПЕРПОЗИЦИЙ ЗАДАННЫХ КООРДИНАТ ЦЕНТРАЛЬНОГО И ДВУХ КОНТУРНЫХ УЗЛОВ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КРИВОЙ

В работе проведено исследование организации цепи последовательных суперпозиций троек смежных точек для дискретного моделирования одномерных геометрических образов с учетом величины рекуррентной зависимости, являющейся прообразом внешней формообразующей нагрузки в статико-геометрическом методе дискретного геометрического моделирования.

Результаты проведенных исследований позволяют моделировать уравновешенные дискретно определенные одномерные геометрические образы без составления и решения больших систем линейных уравнений, что способствует повышению эффективности алгоритмов дискретного геометрического моделирования.

Ключевые слова: статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, величина рекуррентной зависимости, коэффициенты суперпозиции.

O.V. VORONTSOV, L.A. TULUPOVA
Poltava National Technical Yuri Kondratyuk University
I.V. VORONTSOVA
Poltava Petroleum Geological College of PoltavaNational Technical Yuri Kondratyuk University

DETERMINATION OF THE COORDINATES OF INTERNAL NODES, AS SUPERPOSITIONS OF GIVEN COORDINATES OF THE CENTRAL AND TWO CONTOUR NODES DISCRETELY PRESENTED BY THE CURVE

The purpose of this article is studying an organization of a chain of successive superpositions of adjacent point triples for discrete simulation of one-dimensional geometric images. Properties of a one-dimensional point set can be generalized to a two-dimensional set. This set is formed according to the same laws if a one-dimensional set is regarded as a component of the framework of the two-dimensional set. Properties of the discrete model of a two-dimensional geometric image can also be obtained by generalizing the corresponding properties of a one-dimensional set.

Formation of discrete models of geometric images by static-geometric method, in particular, spatial coating models at a sketch design stage, control of modeled surface shapes, changing their parameters requires a repeating operation of compiling and solving cumbersome systems of linear equations. Thus, it is necessary to carry *out new researches of methods and algorithms that allowing simulation of balanced, discrete geometric images without compiling and solving systems of equations. Involving a geometric apparatus of superpositions for formation of geometric images expands capacities of the static-geometric discrete modeling method due to a considerable saving of computational resources.*

Our studies show that a superposition of n points can be replaced by a successive superpositions chain.

We have got a general formula for determining discrete values of the ordinates of nodal points of a balanced curve according to the adjusted ordinates of two contour nodes and a central node. Also the formula can be obtained using the adjusted ordinates of two contour nodes and a recurrence dependence value. This value is identical to an external shaping load value of the static-geometric method of modeling geometric images.

Thus, the results of the studies allow modeling balanced discrete one-dimensional geometric images without compiling and solving cumbersome systems of linear equations. It improves efficiency of discrete geometric modeling algorithms due to significant savings of computing resources.

Keywords: static-geometric method, geometrical apparatus of superpositions, value of recurrent dependence, superposition coefficients.

Постановка проблеми

Дискретне представлення будь-якого геометричного об'єкту у багатьох випадках має суттєві переваги перед представленням неперервним, хоча більшість створених методик моделювання отримані для неперервних форм вхідних даних.

Застосування при дискретному геометричному моделюванні геометричного апарату суперпозицій відкриває можливості простого переходу від неперервної форми представлення геометричного образу до його дискретного аналогу і навпаки. Формування дискретних моделей геометричних образів статико-геометричним методом, зокрема моделей просторових покриттів. на стадії ескізного проектування, керування формою модельованих поверхонь, зміна окремих параметрів вимагає повторної операції складання і розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Залучення геометричного апарату суперпозицій для формування геометричних образів дозволяє уникнути процедури складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь і, тим самим розширює можливості статико-геометричного методу дискретного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботі [1] визначено поняття апарату суперпозицій множин у прикладній геометрії. Доведено ряд властивостей, що дозволили зробити висновки про перспективність глибокого всебічного дослідження апарату суперпозицій. У статті [2] показано, що суперпозиція *n* точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

У роботах [3, 4] авторів даної статті досліджено окремі варіанти ланцюгів суперпозицій і виведені формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозицій, які дозволяють визначати координати довільного вузла геометричного образу, як суперпозиції координат заданих контурних вузлів. Можливі інші варіанти й інші підходи до організації ланцюгів суперпозиції, що дозволять підвищити ефективність алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок економії обчислювальних ресурсів.

Мета дослідження

Метою даної роботи є дослідження організації ланцюга послідовних суперпозицій трійок суміжних точок для дискретного моделювання одновимірних геометричних образів. Властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної, властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

Викладення основного матеріалу дослідження.

Дискретно представлену на рис. 1 криву можна розглядати як модель нерозтяжної натягнутої нитки, на яку з рівномірним кроком $h = 1$ діють зосереджені зусилля P_i . Система рівнянь (1) рівноваги вузлів із заданими крайовими умовами (координатами вузлів A_{i-3} і A_{i+3}) визначає форму ламаної, яка є дискретною моделлю кривої при заданому зовнішньому навантаженні:

$$\begin{aligned} x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + KP_{i,x} &= 0 \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} &= 0 \end{aligned} , \qquad (1)$$

i – номер вузла; x_i , y_i – координати i-го вузла; $P_{i,x}$, $P_{i,y}$ – координатні складові зовнішнього зусилля; K – коефіцієнт пропорційності [5].

Варіювання функції $P_i = f(i)$ розподілу зовнішнього навантаження між вузлами дозволяє дискретно моделювати криві різної форми і вирішувати завдання дискретної інтерполяції на площині.

При рівномірному кроці вузлів уздовж осі *Ox* досить скласти для кожного невідомого вузла тільки друге рівняння системи (1):

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_{i,y} = 0 . \qquad (2)$$

Якщо необхідно, наприклад, побудувати дискретну модель натягнутої нитки під заданим навантаженням KP_i, яка закріплена у вузлах A_{i-3} і A_{i+3} з рівномірним кроком h=1 уздовж осі Ox необхідно скласти і розв'язати систему рівнянь (2) для усіх невідомих вузлів моделі (рис. 1):

$$\begin{aligned} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + KP_i &= 0 \\ y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2} + KP_{i+1} &= 0 \\ y_{i+1} - 2y_{i+2} + y_{i+3} + KP_{i+2} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Тобто необхідно скласти і розв'язати систему із трьох лінійних рівнянь.

Відповідно для k невідомих вузлів, необхідно скласти і розв'язати систему із (k+1) лінійних рівнянь.

Застосування для дискретного геометричного моделювання методу суперпозицій дозволяє уникнути процесу складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь.

Одним із підходів до визначення координат довільного вузла врівноваженої дискретно представленої кривої, можуть бути дослідження можливих варіантів послідовних суперпозицій трійок суміжних точок.

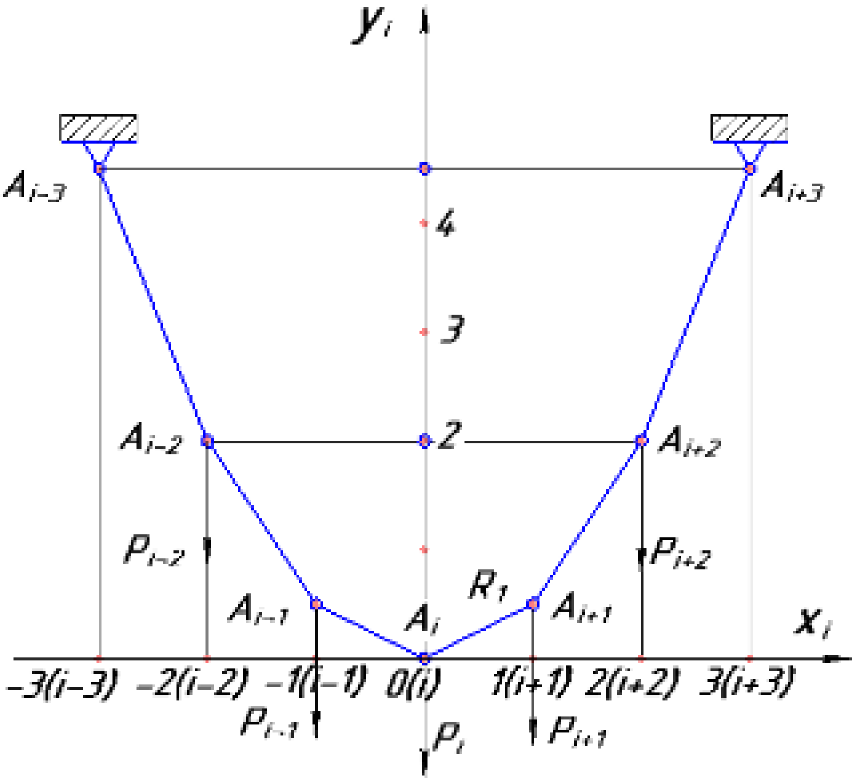

Рис. 1. Дискретно представлена крива.

Розглянемо можливість організації ланцюга суперпозицій для визначення координат внутрішніх вузлів, як суперпозицій заданих ординат центрального та двох контурних вузлів дискретно представленої кривої (рис. 1).

Ординати шуканих вузлів, як суперпозиції ординат суміжних вузлів (рис. 1) визначаються за формулами:

$$\begin{cases} y_i = k_1 y_{i-1} + k_2 y_{i+1} - P \\ y_{i+1} = k_1 y_i + k_2 y_{i+2} - P \\ y_{i+2} = k_1 y_{i+1} + k_2 y_{i+3} - P \end{cases} \tag{4}$$

де:

1) k_1, k_2 – коефіцієнти суперпозиції ординат суміжних вузлових точок;
2) $k_1 + k_2 = 1$;
3) $k_1 = k_2 = 0{,}5$;
4) $y_{i+1} = y_{i-1}$, $y_{i+2} = y_{i-2}$, $y_{i+3} = y_{i-3}$;
5) P – величина рекурентної залежності, що дорівнює 0,5 величини зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу: $P = 0{,}5 \cdot KP$.

Враховуючи вищенаведене, формули (4) матимуть вигляд:

$$\begin{cases} y_i = y_{i+1} - P \\ y_{i+1} = 0{,}5y_i + 0{,}5y_{i+2} - P \\ y_{i+2} = 0{,}5y_{i+1} + 0{,}5y_{i+3} - P \end{cases} . \quad (5)$$

Із (5) зможемо одержати:

$$y_i = y_{i+1} - P\,;\ y_{i+1} = y_i + P\,;$$
$$y_{i+1} = 0{,}5y_i + 0{,}5y_{i+2} - P \Longrightarrow;$$
$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + 2P;\quad y_{i+2} = 2y_i + 2P - y_i + 2P;$$
$$y_{i+2} = y_i + 4P;\ P = \frac{y_{i+2}-y_i}{4};$$
$$y_i = y_{i+2} - 4P;\ y_{i+1} = y_{i+2} - 3P\,, \quad (6)$$

де: i – номер центрального вузла; $i+2$ – номер заданого контурного вузла;
y_i – задана ордината центрального вузла; y_{i+2} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1} – ордината шуканого вузла;

$$y_{i+2} = 0{,}5y_{i+1} + 0{,}5y_{i+3} - P \Longrightarrow;$$
$$y_{i+3} = 2y_{i+2} - y_{i+1} + 2P;\quad y_{i+3} = 2y_i + 8P - y_i - P + 2P;$$
$$y_{i+3} = y_i + 9P;\ P = \frac{y_{i+3}-y_i}{9};$$
$$y_i = y_{i+3} - 9P;\ y_{i+1} = y_{i+3} - 8P;\ y_{i+2} = y_{i+3} - 5P\,, \quad (7)$$

де: y_{i+3} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1}, y_{i+2} – ординати шуканих вузлів;

$$y_{i+3} = 0{,}5y_{i+2} + 0{,}5y_{i+4} - P \Longrightarrow;$$
$$y_{i+4} = 2y_{i+3} - y_{i+2} + 2P;\quad y_{i+4} = 2y_i + 18P - y_i - 4P + 2P;$$
$$y_{i+4} = y_i + 16P;\,;\ P = \frac{y_{i+4}-y_i}{16};$$
$$y_i = y_{i+4} - 16P;\ y_{i+1} = y_{i+4} - 15P;\ y_{i+2} = y_{i+4} - 12P;$$
$$y_{i+3} = y_{i+4} - 7P\,; \quad (8)$$

де: y_{i+4} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3} – ординати шуканих вузлів;

$$y_{i+4} = 0{,}5y_{i+3} + 0{,}5y_{i+5} - P \Longrightarrow;$$
$$y_{i+5} = 2y_{i+4} - y_{i+3} + 2P;\quad y_{i+5} = 2y_i + 32P - y_i - 9P + 2P;$$
$$y_{i+5} = y_i + 25P;\ P = \frac{y_{i+5}-y_i}{25};$$
$$y_i = y_{i+5} - 25P;\ y_{i+1} = y_{i+5} - 24P;\ y_{i+2} = y_{i+5} - 21P;$$
$$y_{i+3} = y_{i+5} - 16P;\ y_{i+4} = y_{i+5} - 9P\,; \quad (9)$$

де: y_{i+5} – задана ордината контурного вузла; y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3}, y_{i+4} – ординати шуканих вузлів;

Із формул (6 – 9) можемо записати:

$$y_{i+n} = y_{i-n} = y_i + n^2P;\ P = \frac{y_{i+n}-y_i}{n^2}; \quad (10)$$
$$y_i = y_{i+n} - n^2P;\ y_{i+1} = y_{i+n} - (n^2 - 1^2)P;\ y_{i+2} = y_{i+n} - (n^2 - 2^2)P;$$
$$y_{i+3} = y_{i+n} - (n^2 - 3^2)P;\ \dots;\ y_{i+k} = y_{i+n} - (n^2 - k^2)P\,,$$

або:

$$y_{i+k} = y_{i+n} + (k^2 - n^2)P\,, \quad (11)$$

$$P = \frac{y_{i+k}-y_{i+n}}{(k^2-n^2)}\,, \quad (12)$$

де: $i+k$ – номер шуканого вузла; $(i+n)$ – номер заданого контурного вузла; y_{i+n} – задана ордината контурного вузла; y_{i+k} – ордината шуканого вузла.

Формули (10, 11, 12) дозволяють визначати ординати вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Висновки

Дослідження проведені у даній статті показують, що суперпозиція ***n*** точок може бути замінена ланцюгом послідовних суперпозицій.

Виведено у загальному вигляді формули визначення дискретних значень ординат вузлових точок врівноваженої кривої за даними ординатами двох контурних та центрального вузлів, або за даними ординатами двох контурних вузлів та величною рекурентної залежності, що тотожна величині зовнішнього формоутворюючого навантаження статико-геометричного методу моделювання геометричних образів.

Таким чином, результати досліджень проведених у даній статті, дозволяють моделювати врівноважені дискретно визначені одновимірні геометричні образи без складання і розв’язання великих систем лінійних рівнянь, що сприяє підвищенню ефективності алгоритмів дискретного геометричного моделювання за рахунок значної економії обчислювальних ресурсів.

Крім того, властивості, які має одновимірна множина точок, можуть бути узагальнені до двовимірної множини, що формується за тими ж законами, якщо одновимірну множину розглядати як складову каркаса двовимірної. Властивості дискретної моделі двовимірного геометричного образу також можуть бути одержані узагальненням відповідних властивостей одновимірного.

Список використаної літератури

1. Ковалев С.Н. О суперпозициях / С.Н. Ковалев // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 38-42.
2. Вязанкин В.А. Замена суперпозиции конечного числа точек цепью последовательных суперпозиций пар точек / В.А. Вязанкин, А.В. Мостовенко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 84. – С. 296-300.
3. Vorontsov, O.V. Discrete modeling of mesh frames of covering surfaces by chains of superpositions / O.V. Vorontsov, L.O. Tulupova, I.V. Vorontsova // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – Oxford: Oxford University Press, 2016. – Vol. 69 (2). – P. 651-656.
4. Воронцов О.В. Визначення одновимірних геометричних образів ланцюгом послідовних суперпозицій із врахуванням величини рекурентної залежності / О.В. Воронцов, Л.О. Тулупова, І.В. Воронцова // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2016. – Вип. 3(58). − С. 487-491.
5. Ковалев С.Н. Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций: дис. … доктора техн. наук: 05.01.01 / С.Н. Ковалев. − М.: МАИ, 1986. – 348 с.