

УДК 514.18

Г.В. КОВАЛЬОВА

Одеська державна академія будівництва та архітектури

О.А. НІКІТЕНКО, І.С. КЕРНИЦЬКИЙ

Варшавський університет сільського господарства

**ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ
НА ЦИКЛІЧНІЙ ГВИНТОВІЙ ПОВЕРХНІ**

На даний час геодезичним лініям присвячено багато наукових праць як вітчизняних, так і зарубіжних науковців. Властивості геодезичних ліній використовуються для визначення найкоротших відстаней або визначення способів армування оболонок тощо. При спряженні двох поверхонь лінія їх контакту теж є геодезичною. Цією властивістю можна скористатися для проектування спряжених циклічних гвинтових поверхонь, які мають місце в зачепленнях Новікова. В даній праці отримано рівняння геодезичної лінії для такої поверхні шляхом мінімізації довжини кривої. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, початок яких є в точці $P(2,0,0)$.

Ключові слова: геодезичні лінії, циклічна гвинтова поверхня, мінімізація функціонала.

Г.В. КОВАЛЕВА

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

О.А. НИКИТЕНКО, И.С. КЕРНИЦКИЙ

Варшавский университет сельского хозяйства

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ
НА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ВИНТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

В настоящее время геодезическим линиям посвящено много научных работ как отечественных, так и зарубежных ученых. Свойства геодезических линий используются для определения кратчайших расстояний или определения способов армирования оболочек и т.д. При сопряжении двух поверхностей линия их контакта тоже есть геодезической. Этим свойством можно воспользоваться для проектирования сопряженных циклических винтовых поверхностей, которые имеют место в зацеплениях Новикова. В данной работе получено уравнение геодезической линии для такой поверхности путем минимизации длины кривой. Для подтверждения полученных результатов в графическом редакторе AutoCAD было построено несколько геодезических линий, начало которых в точке $P(2,0,0)$.

Ключевые слова: геодезические линии, циклическая винтовая поверхность, минимизация функционала.

G. KOVALOVA

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

O. NIKITENKO, I. KERNYTSKYI

Warsaw University of Life Sciences – SGGW

**GEOMETRICAL MODELING OF GEODESIC LINES
ON THE CYCLIC HELICOID**

In 1954 M. Novikov proposed a new tooth gearings with profile was shaped like a circle arc, so a class of cyclic screw surfaces appeared in the technique. V. Lyukshin in his work thoroughly presented an analytical description of such surfaces and considered the theory of their internal geometry. At the conjugation of two surfaces normals to the surfaces coincide with the normal to the contact line. Such a property has a geodesic line, in which the normal coincides with the normal of the surface. Proceeding from them we can assume that geodesic lines can be used to design conjugate cyclic screw surfaces with line contact that takes place in Novikov's gear train. Geodesic lines of the surface can be searched on it provided that they turn into straight lines when the surface is developed. The search of geodesic lines on undeveloped surfaces is rather complicated and can be carried out by various methods. In the analytical this problem is reduced to the compilation and solution of differential equations, which can be found to be explicitly solved only in a few cases. The construction of a geodesic line in some works is also considered as a variational task for finding the shortest distance between two points, for example, to determine the path of mobile robot moving. The equation of the geodesic lines of a cyclic screw surface is found in the form of an integral by minimizing the distance between two points. Since all the formulas are rather cumbersome for calcula-

tions, we used Simpson's formulas to calculate certain integrals. Several geodesic lines have been constructed which come out from one point $P(2, 0, 0)$ in the graphic editor AutoCAD to confirm the obtained results. Their coordinates were determined by substituting φ and determined ψ in the equation of the surface.

Keywords: geodesic lines, cyclic screw surface, minimization of the functional.

Постановка проблеми

У 1954 р. М.Л. Новіков запропонував зубчасті передачі з точковим зачепленням. Новий профіль зуба мав форму дуги кола, і з того часу велика кількість праць була присвячена новому зачепленню. Вагомий внесок у цьому напрямку був зроблений В.С. Люкшиним в праці [1, С. 126]. Він ґрунтовно подав аналітичний опис циклічних гвинтових поверхонь та розглянув теорію їх внутрішньої геометрії. Так оскільки при спряженні двох поверхонь в точках контакту нормалі до поверхонь співпадають з нормаллю до лінії контакту, то можемо стверджувати, що лінія контакту двох поверхонь є геодезичною лінією, в якій нормаль в кожній її точці збігається з нормаллю до поверхні. Теоретично маємо припущення, що можливо запроектувати зачеплення Новікова з лінійним контактом, але першим кроком в цьому напрямку є відшукання геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Геодезична лінія на поверхні з давніх часів привертала увагу дослідників своїми властивостями, зокрема тим, що найкоротший шлях між двома точками поверхні є геодезичною. На розгортній поверхні можна шукати геодезичні лінії з умови, що вони перетворюються на прямі при розгортанні поверхні. Пошук геодезичних ліній на нерозгортних поверхнях є досить складним і може проводитись з різних міркувань. Наприклад, стрічка, якій властива певна пружність, змушена рухатися по геодезичній лінії незалежно від її швидкості. Ця властивість може бути використана для практичного знаходження геодезичної лінії на поверхні в заданому напрямі [2, С. 24]. В аналітичному плані ця задача зводиться до складання і розв'язування диференціальних рівнянь, знайти явний розв'язок яких вдається лише в окремих випадках [3, С. 25]. Побудова геодезичної лінії в деяких працях розглядається також як варіаційна задача на знаходження найкоротшої відстані між двома точками, наприклад, для визначення шляху переміщення мобільного робота [4, С. 217].

Мета дослідження

Метою дослідження є аналітичний опис та конструювання в графічному редакторі AutoCAD геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні.

Викладення основного матеріалу дослідження

Нехай меридіан гвинтової циклічної поверхні лежить в площині XOZ і має рівняння:

$$\begin{cases} x = \cos \varphi + 1; \\ z = \sin \varphi; \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

При гвинтовому русі меридіана з параметром $P = 1$ отримуємо циклічну гвинтову поверхню, рівняння якої набуває вигляду:

$$\begin{cases} X = (\cos \varphi + 1) \cos \psi; \\ Y = (\cos \varphi + 1) \sin \psi; \\ Z = \sin \varphi + \psi. \end{cases} \quad (2)$$

Як відомо, диференціал довжини дуги кривої на поверхні обчислюється за допомогою першої квадратичної форми поверхні [4, С.15]:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

де u, v – внутрішні координати поверхні,

$$E = (X'_u)^2 + (Y'_u)^2 + (Z'_u)^2, \quad F = X'_u X'_v + Y'_u Y'_v + Z'_u Z'_v, \quad G = (X'_v)^2 + (Y'_v)^2 + (Z'_v)^2.$$

Для поверхні (2) $E = 1$, $F = \cos \varphi$, $G = (\cos \varphi + 1)^2 + 1$. Таким чином, довжина дуги кривої $\psi = \psi(\varphi)$ на поверхні (2) обчислюється за формулою

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi \psi' + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1) (\psi')^2} d\varphi \quad (3)$$

Цей інтеграл є функціоналом, який досягає мінімуму на геодезичній кривій. Отже, геодезична крива має задовольняти рівняння Ейлера [5, С. 18]:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi} - \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \psi'} \right) = 0$$

де F – підінтегральна функція. Оскільки $\frac{\partial F}{\partial \psi} = 0$, то $\frac{\partial F}{\partial \psi'} = C$, $C = const$

Тобто

$$\frac{\cos \varphi + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1)\psi'}{\sqrt{1 + 2 \cos \varphi \psi' + ((\cos \varphi + 1)^2 + 1)(\psi')^2}} = C \tag{4}$$

Розв'язуючи це рівняння відносно ψ' , отримаємо:

$$\psi' = \frac{\pm 2C \cos \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 - C^2 + 1}}{((\cos \varphi + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos \varphi + 1)^2 - C^2 + 1}}$$

Таким чином,

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\pm 2C \cos \frac{t}{2} - \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - C^2 + 1}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - C^2 + 1}} dt + \psi(\varphi_0) \tag{5}$$

Розглянемо окремі випадки.

- Нехай $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = 0$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = 1$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 1). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1 - \cos t \cos \frac{t}{2}}{\left(4 \cos^4 \frac{t}{2} + 1\right) \cos \frac{t}{2}} dt$$

Цей інтеграл можна безпосередньо проінтегрувати:

$$\begin{aligned} \psi(\varphi) = & \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{2\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5} - 2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} + \\ & + \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{2\sqrt{5} - 2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2\sqrt{5} - 2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5} + 2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 1} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned}$$

- Нехай $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = \frac{3}{5}$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = 2$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 2). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{4 \cos \frac{t}{2} - \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}} dt$$

- $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -1$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = -2$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 3). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi}^0 \frac{4 \cos \frac{t}{2} + \cos t \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}}{((\cos t + 1)^2 + 1) \sqrt{(\cos t + 1)^2 - 3}} dt$$

- $\varphi_0 = 0, \psi(\varphi_0) = 0, \psi'(\varphi_0) = -0,4$. Підставляючи ці значення в (4), знаходимо, що $C = -1$ (на рис. 1 геодезична лінія під номером 4). Тоді за формулою (5):

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi}^0 \frac{1 + \cos t \cos \frac{t}{2}}{\left(4 \cos^4 \frac{t}{2} + 1\right) \cos \frac{t}{2}} dt$$

Цей інтеграл також можна безпосередньо проінтегрувати:

$$\psi(\varphi) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2} \ln \left| \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{2\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}\sqrt{\sqrt{5}-2}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2+\sqrt{5}} \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}-2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{2\sqrt{5}-2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{2\sqrt{5}-2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \sqrt{5}} \right| + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}\sqrt{2\sqrt{5}+2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Усі отримані формули є досить громіздкими для обчислення. В нашому випадку для обчислення визначених інтегралів ми скористалися формулами Симпсона. Для побудови геодезичних ліній в графічному редакторі AutoCAD необхідно задану змінну φ і визначену відповідно залежну змінну ψ підставити до рівняння поверхні (2). На рис. 2 подано циклічну гвинтову поверхню з отриманими геодезичними лініями, початок яких є в точці $P(2, 0, 0)$.

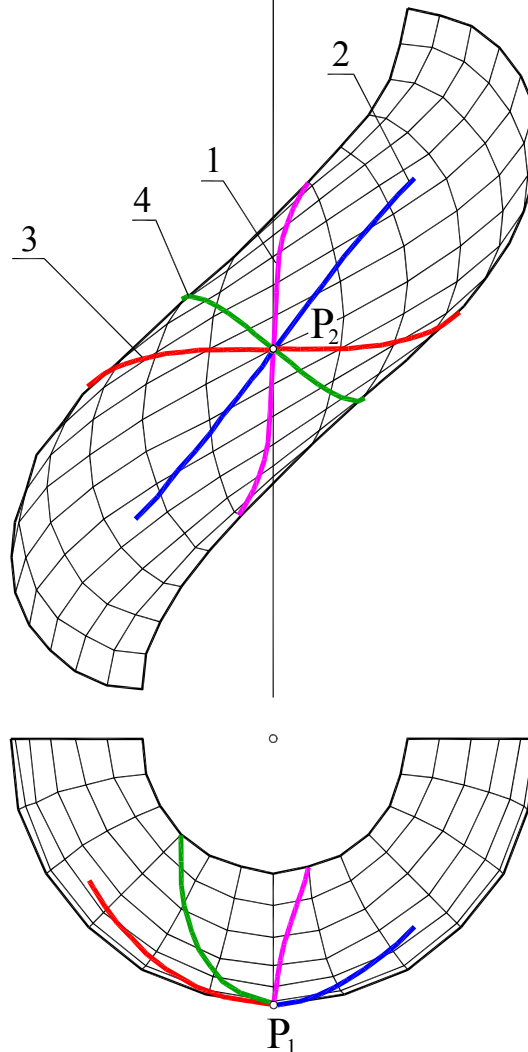


Рис. 1. Комплексне креслення геодезичних ліній на циклічній гвинтовій поверхні

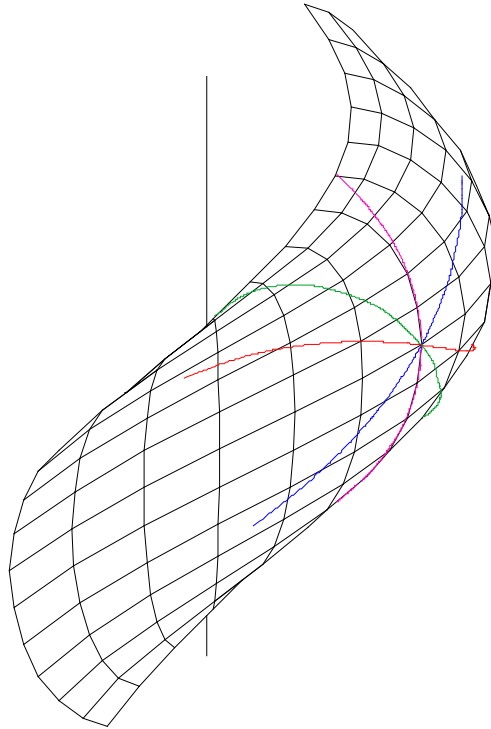


Рис. 2. Геодезичні лінії на циклічній гвинтовій поверхні в графічному редакторі AutoCAD

Висновки

В роботі шляхом мінімізації відстані між двома точками знайдено рівняння геодезичних ліній циклічної гвинтової поверхні у вигляді інтеграла, а для деяких випадків – в явному вигляді. Для підтвердження отриманих результатів в графічному редакторі AutoCAD було побудовано кілька геодезичних ліній, що виходять з однієї точки.

Список використаної літератури

1. Люкшин В.С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов [Текст] / В.С. Люкшин. – М.: Машиностроение, 1968. – 371 с.
2. Кремець Я.С. Геодезичні лінії поверхонь в задачах армування оболонок та інерційного руху матеріальної точки [Текст]: Дис. ... канд. техн. наук 05.05.01 / Я.С. Кремець. – К., 2017. – 141 с.
3. Пришляк О. Диференціальна геометрія / О. Пришляк – К.: Видавничо- поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 68 с.
4. Табакова І.С. Побудова геодезичної лінії гладкої поверхні, що виходить із даної точки у заданому напрямку [Текст] / І.С. Табакова // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Б. Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика. – Мелітополь: МДПУ, 2014. – Т. 1. – С. 217 – 224.
5. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления: монографія [Текст] / Л. Янг. – М.: Мир, 1974. – 488 с.