

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА, М.М. МУКВИЧ

Національний університет біоресурсів і природокористування України

**АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ НА ПОВЕРХНІ УЯВНОГО
КАТЕНОЇДА ТА КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ**

Здійснено аналітичний опис мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних ліній, які лежать на поверхні уявного катеноїда, утвореного при обертанні ланцюгової лінії на кут із комплексною величиною. Знайдено параметричні рівняння уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній. Параметричні рівняння сімей ізотропних ліній отримано із умови рівності нулю лінійного елемента уявного катеноїда. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями сітки переносу.

Ключові слова: мінімальна поверхня, ізотропна лінія, катеноїд, ізометрична сітка координатних ліній, середня кривина поверхні.

С.Ф. ПИЛИПАКА, Н.Н. МУКВИЧ

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ МНИМОГО
КАТЕНОИДА И КОНСТРУИРОВАНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

Осуществлено аналитическое описание минимальных поверхностей с помощью изотропных линий, лежащих на поверхности мнимого катеноида, образованного при вращении цепной линии на угол комплексной величины. Приведены параметрические уравнения мнимого катеноида с изометрической сетью координатных линий. Параметрические уравнения семейств изотропных линий определены из условия равенства нулю линейного элемента мнимого катеноида. Аналитическое описание минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями сети переноса.

Ключевые слова: минимальная поверхность, изотропная линия, катеноид, изометрическая сеть координатных линий, средняя кривизна поверхности.

S.F. PYLYPAKA, M.M. MUKVICH

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

**ANALYTICAL DESCRIPTION OF ISOTROPIC LINES ON THE SURFACE OF THE IMAGINARY
CATENOID AND CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES**

With the development of CAD systems in the design of surfaces of technical forms and architectural designs, use the surface compartments that are given analytically and have the required geometric properties. Geometric models, described by minimal surfaces, have the benefits of practical content. The tension at each point of the minimal surface is a constant value, so the geometric shape of the minimal surface provides uniform distribution of forces in the shell and additional rigidity. The condition for equality of the value of the mean curvature of the minimum surface at all its points is a necessary condition for the minimum area of the compartment of a surface limited by a plane or a spatial curve (contour) on this surface. Finding an analytic description of the minimal surface passing through a closed line reduces to solving the nonlinear differential Euler-Lagrange equation in partial derivatives, which in the general case is not integrated. The works of K. Weierstrass, Lie, Riemann, Schwarz, and others resulted, in the wide use of methods and results of complex function theory in the theory of minimal surfaces.

Aim of research. Find the parametric equations of the imaginary catenoid, assigned to the isometric (or isothermal) grid of imaginary coordinate lines. Determine the analytical description of isotropic lines on the surface of the imaginary catenoid. To find the analytical description of minimal surfaces using these isotropic lines.

Materials and methods of research. Analytical description of minimal surfaces were made in complex space with isotropic lines of grid transfer.

Results of the research and discussion. The analytical description of the minimal surfaces with the help of isotropic lines, which lie on the surface of the imaginary catenoid formed during the rotation of the chain line at an angle with a complex value, is carried out. The parametric equations of the imaginary catenoid, which are assigned to the isometric grid of coordinate lines, are found. Parametric equations of families of isotropic lines are obtained from the condition of zero equality of the linear element of the imaginary catenoid.

Conclusions and prospects. On the surface of the imaginary catenoid, assigned to the isometric grid of coordinate lines, for each value it is possible to construct four families of isotropic lines. Each isotropic line can be

fitted with a minimum surface and a adjoint minimal surface. The resulting minimal surfaces and the adjoint minimal surfaces have common metric properties and common properties of the surface curvature. Prospects for future research is to study the differential characteristics of minimal surfaces and optimization of engineering methods of technical surfaces forms design.

Keywords: minimal surface, isotropic line, cycloid, isometric grid of the coordinate lines, mean curvature of a surface.

Постановка проблеми

Мінімальні поверхні, середня кривина H у всіх точках яких дорівнює нулю, використовуються при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. Оболонки мінімальних поверхонь можуть перекривати складні архітектурні плани без утворення розривів геометрії [1, С. 153]. Рівність нулеві величини H середньої кривини мінімальної поверхні є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром). Три-періодичні мінімальні поверхні використовуються при створенні фільтрувальних матеріалів [2]. Вивчається можливість використання три-періодичних мінімальних поверхневих структур для синтезу будівельних матеріалів, які характеризуються оптимізованими фізичними властивостями [3]. При створенні сучасних структурованих упаковочних матеріалів використовують мінімальні поверхні у ролі рівноважних поверхонь, які відповідають максимально можливій ефективності тепло-масо-переносу упаковки [4].

Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через просторову криву (контур), що обмежує найменшу площу відсіку поверхні, приводить до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [5, С. 685]. При створенні геометричних моделей на основі мінімальних поверхонь важливим є спрощення їх аналітичного опису. Проблема знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь, починаючи з робіт К. Вейерштрасса, С. Лі, Б. Рімана, Г. Шварца розв'язується за допомогою методів функцій комплексної змінної [5, С. 686].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно знайти параметричні рівняння ізотропних ліній нульової довжини [6, С. 144]. Моделювання ізотропної кривої на основі рівняння фундаментального сплайна здійснено у роботі [7]. Ряд робіт [8, 9] авторів даної статті присвячено реалізації методу аналітичного опису ізотропних ліній, які лежать на поверхнях обертання, віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній. Зокрема, у статті [8] знайдено параметричні рівняння ізотропних ліній, які лежать на поверхні катеноїда, та побудовано мінімальні поверхні на їх основі. Тому потребує дослідження можливість знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда, утвореного при обертанні ланцюгової лінії на кут із комплексною величиною.

Мета дослідження

Знайти параметричні рівняння уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної (або ізотермічної) сітки уявних координатних ліній. Визначити аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного катеноїда. На основі вказаних ізотропних ліній побудувати мінімальні та приєднані мінімальні поверхні.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо уявну поверхню катеноїда, утворену при обертанні ланцюгової лінії, заданої параметричними рівняннями: $\varphi(\tau) = \mu \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$; $\psi(\tau) = \tau$ (де μ – параметр ланцюгової лінії), на деякий кут, комплексна величина якого дорівнює: $(\alpha + \beta i) \cdot w$, де $\alpha, \beta \in R$; $w \in [0; 2\pi)$; i – уявна одиниця. Параметричні рівняння уявної поверхні катеноїда є функціями комплексної змінної і мають вигляд:

$$X(\tau; w) = \mu \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \cdot \cos[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \quad Y(\tau; w) = \mu \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right) \cdot \sin[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \quad Z(\tau; w) = \tau. \quad (1)$$

У роботі [9] авторів статті наведено алгоритм відшукування параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до уявної ізометричної сітки координатних ліній. Перехід від ортогональної до ізометричної сітки координат здійснюється за допомогою введення нової змінної t , яка пов'язана із змінною τ наступним чином [9]:

$$t = \frac{1}{\alpha + \beta i} \cdot \int \frac{\sqrt{(\varphi'_{\tau})^2 + (\psi'_{\tau})^2}}{\varphi(\tau)} \cdot d\tau. \quad (2)$$

Знайдемо умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній, підставивши вирази $\varphi(\tau) = \mu \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)$; $\psi(\tau) = \tau$ у (2), і, після перетворень, отримаємо залежність:

$$t = \frac{\tau}{(\alpha + \beta i) \cdot \mu} + C_1,$$

де C_1 – довільна стала інтегрування.

Нехай $C_1 = 0$, тоді умову переходу до ізометричної сітки координатних ліній запишемо у вигляді:

$$\tau = \mu \cdot (\alpha + \beta i) \cdot t.$$

Підставивши останній вираз у (1), отримаємо параметричні рівняння поверхні уявного катеноїда, віднесеної до ізометричної сітки уявних координатних ліній:

$$\begin{aligned} X(t; w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)t] \cdot \cos[(\alpha + \beta i)w]; & Y(t; w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)t] \cdot \sin[(\alpha + \beta i)w]; \\ Z(t; w) &= \mu \cdot (\alpha + \beta i) \cdot t, \end{aligned} \quad (3)$$

де μ – параметр ланцюгової лінії; $t, \mu, b \in R$; $w \in [0; 2\pi]$.

Лінійний елемент уявного катеноїда (3), віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, має вигляд:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot [dt^2 + dw^2] \quad (4)$$

Розклавши на множники вираз (4), отримаємо:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot (dt - i \cdot dw)(dt + i \cdot dw),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot w + C \quad \text{або} \quad t = -i \cdot w + C, \quad (5)$$

де C – довільна стала інтегрування.

Лінійний елемент (4) уявного катеноїда визначає довжину будь-якої лінії, яка йому належить. Тому при підстановці виразів (5) у параметричні рівняння уявного катеноїда (3) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних ліній нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу $t = i \cdot w + C$ у рівняння (3) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння ізотропної лінії, яка лежить на поверхні уявного катеноїда:

$$\begin{aligned} x(w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)(i w + C)] \cdot \cos[(\alpha + \beta i) \cdot w]; \\ y(w) &= \mu \cdot \operatorname{ch}[(\alpha + \beta i)(i w + C)] \cdot \sin[(\alpha + \beta i) \cdot w]; & z(w) &= \mu(\alpha + \beta i) \cdot (i w + C). \end{aligned} \quad (6)$$

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні у рівняннях (6) введемо заміну: $w = u + i \cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (6), отримаємо рівняння мінімальної поверхні (C – довільна стала):

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \mu \cdot [\cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) + \\ &\quad + \sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Y(u, v) &= \mu \cdot [\cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) - \\ &\quad - \sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Z(u, v) &= \mu \cdot (\alpha(C - v) - \beta u); \end{aligned} \quad (7)$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= \mu \cdot [\sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) - \\ &\quad - \cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Y^*(u, v) &= \mu \cdot [\sin(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \sin(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{sh}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{ch}(\beta u + \alpha v) + \\ &\quad + \cos(\alpha u + \beta(C - v)) \cdot \cos(\alpha u - \beta v) \cdot \operatorname{ch}(\alpha(C - v) - \beta u) \cdot \operatorname{sh}(\beta u + \alpha v)]; \\ Z^*(u, v) &= \mu \cdot (\alpha u + \beta(C - v)); \end{aligned} \quad (8)$$

На рис.1 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (8) відповідно, при $\mu = 2$; $\alpha = 1$; $\beta = \sqrt{3}$; $C = 0$; $u \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]$; $v \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]$.

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) та приєднаної поверхні (8) дорівнюють:

$$E = G = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \mu^2 \cdot \operatorname{ch}^2[C\alpha - 2(\beta u + \alpha v)]; \quad F = 0. \quad (9)$$

Коефіцієнти L, M, N другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) дорівнюють:

$$L = -N = 2\mu(\alpha^2 - \beta^2); \quad M = -4\mu \cdot \alpha\beta. \quad (10)$$

Коефіцієнти L^*, M^*, N^* другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8) дорівнюють:

$$L^* = -N^* = 4\mu \cdot \alpha\beta = -M; \quad M^* = 2\mu(\alpha^2 - \beta^2) = L. \quad (11)$$

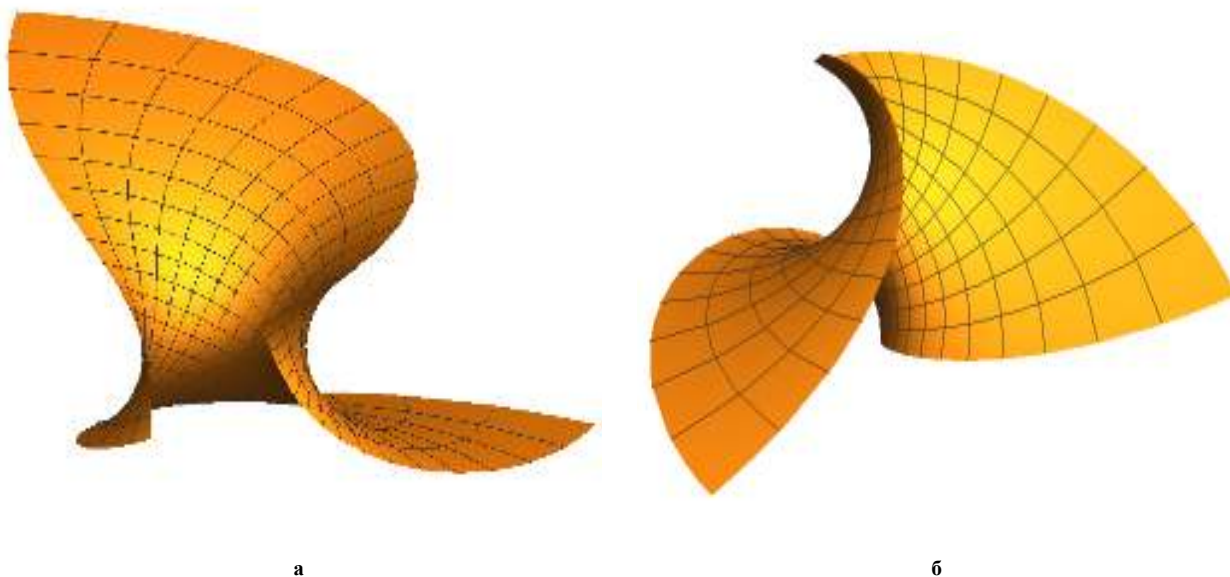


Рис. 1. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (6):
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7);
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8).

На рис. 2 зображено відсіки мінімальної та приєднаної поверхонь, побудованих за рівняннями (7) і (8) відповідно, при $\mu = 2; \alpha = \beta = 1; C = 0; u \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]; v \in [-0,15\pi; \dots, 0,15\pi]$.

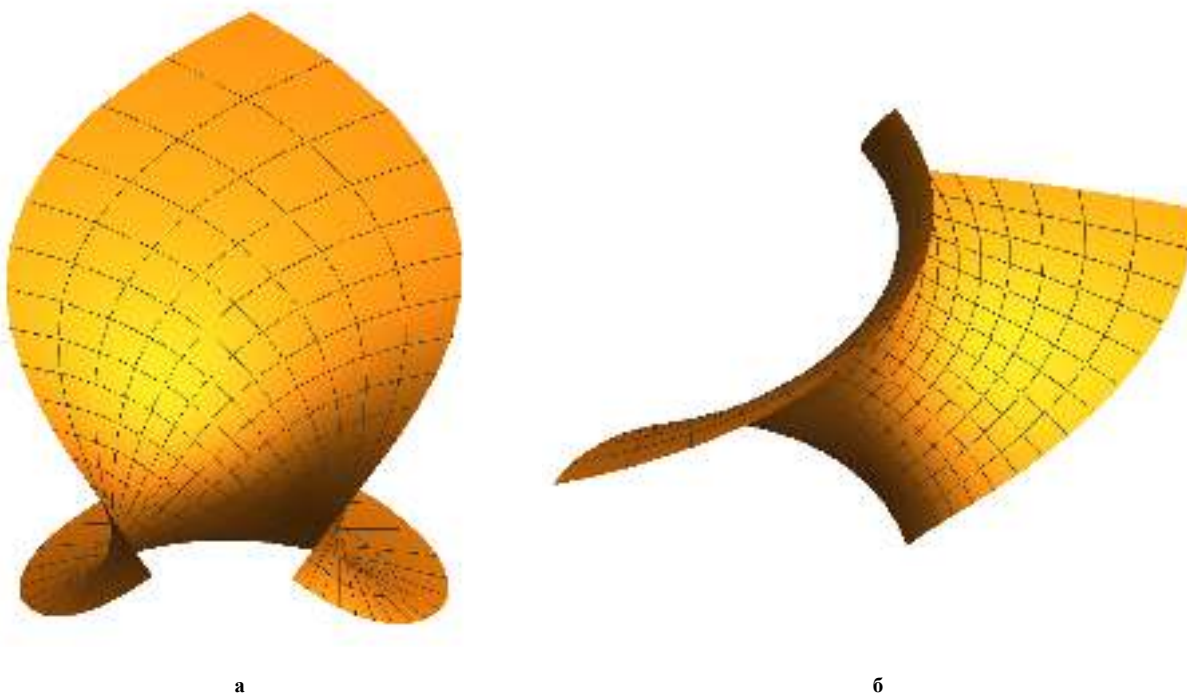


Рис. 2. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (6) при $\alpha = \beta = 1$:
а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (7), віднесеної до координатної сітки асимптотичних ліній;
б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8), віднесеної до координатної сітки ліній кривини.

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих мінімальних поверхонь (7) та (8), перетворюють вираз середньої кривини $H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$ для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

При $\alpha = \pm \beta$ коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (7) дорівнюють $L = N = 0$ і середній коефіцієнт M^* другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8) теж дорівнює нулю. Тобто мінімальну поверхню (7) віднесено до координатної сітки асимптотичних ліній, а приєднану мінімальну поверхню (8) – до координатної сітки ліній кривини.

Вираз (4) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds^2 = \mu^2 \cdot (\alpha + \beta i)^2 \cdot (dw - i \cdot dt)(dw + i \cdot dt),$$

де i – уявна одиниця. Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$w = i \cdot t + C \quad \text{або} \quad w = -i \cdot t + C, \quad (12)$$

де C – довільна стала інтегрування. Тоді з аналогічних міркувань можна знайти аналітичний опис двох сімей ізотропних ліній та відповідних мінімальних поверхонь, які мають спільні метричні властивості та властивості кривини із мінімальними поверхнями (7), (8). Аналогічний результат отримаємо при утворенні мінімальних поверхонь, використовуючи рівність $t = -i \cdot w + C$ для аналітичного опису сім'ї ізотропних ліній.

Слід зазначити, що мінімальна поверхня (7) та приєднана мінімальна поверхня (8), маючи рівні відповідні коефіцієнти першої квадратичної форми, допускають неперервне згинання одна на одну.

Висновки

На поверхні уявного катеноїда, віднесеного до ізометричної сітки координатних ліній, для кожного значення C можна побудувати чотири сім'ї ізотропних ліній, і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї мінімальну поверхню. Утворені мінімальні поверхні та приєднані мінімальні поверхні мають спільні метричні властивості та спільні властивості кривини поверхні. Запропонований метод аналітичного опису мінімальних поверхонь дозволяє утворювати ізометричні мінімальні поверхні, віднесені до координатної сітки асимптотичних ліній або до координатної сітки ліній кривини.

Список використаної літератури

1. Расчёт оболочек сложной формы / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук.– К.: Будівельник, 1990. – 192 с.
2. Sreedhar Nurshaun. Mass transfer analysis of ultrafiltration using spacers based on triply periodic minimal surfaces: Effects of spacer design, directionality and voidage / Nurshaun Sreedhar, Thomas Navya, Al-Ketan Oraib, Rowshan Reza, Hernandez Hector H., Arafat Hassan A. // Journal of Membrane Science. – 2018. – Vol. 561. – P. 89-98. – <https://doi.org/10.1016/j.memsci.2018.05.028>
3. Lu Han. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems / Lu Han, Shunai Che // Advanced Materials. – 2018. – Vol. 30. – I. 17 – P. 1705708. <https://doi.org/10.1002/adma.201705708>
4. Navasardyan Ekaterina. Minimal surfaces as a constant-energy surfaces for maximum heat and mass transfer efficiency in structured packing of the distillation column / Ekaterina Navasardyan, Ivan Arkharov, Artem Dontzov, Aleksey Arkharov // Journal of Enhanced Heat Transfer. – 2018. – Vol. 25. – DOI: 10.1615/JEnhHeatTransf.2018026639
5. Математическая энциклопедия / [гл. ред. И.М. Виноградов]. – Т. 3. – М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1982. – С. 683-690.
6. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М.–Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
7. Аушева Н.М. Изотропні фундаментальні сплайни / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми моделювання. – 2016. – № 6. – С. 3-7.
8. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальних поверхонь за допомогою ізотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: техніка та енергетика АПК. – 2016. – № 241. – С. 197-203.
9. Пилипака С.Ф. Аналітичні залежності утворення ізотропних ліній на уявних поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Сучасні проблеми моделювання. – 2018.– № 12. – С. 126-131.