ІНЖЕНЕРНІ НАУКИ

УДК 681.5.015.22

ХАФЕД И.С. АБДУЛСАЛАМ
Национальный транспортный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ КОЛЕБАНИЙ ЗУБЧАСТЫХ ПЕРЕДАЧ

С целью улучшения вычислительных свойств и расширения сфер применения математических моделей динамики колебательных процессов механических систем класса зубчатых передач разработана конечно-разностная математическая модель на основе применения метода конечных разностей. В качестве объекта для применения метода конечных разностей была предложена математическая модель зубчатой передачи в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: метод конечных разностей, математическая модель, колебательный процесс, коэффициент трения.

ХАФЕД І.С. АБДУЛСАЛАМ
Національний транспортний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ КОЛИВАНЬ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

З метою поліпшення обчислювальних властивостей і розширення сфер застосування математичних моделей динаміки коливальних процесів механічних систем класу зубчастих передач, розроблена кінцево-різницева математична модель на основі застосування методу скінченних різниць. В якості об'єкта для застосування методу скінченних різниць була запропонована математична модель зубчастої передачі у вигляді системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Ключові слова: метод кінцевих різниць, математична модель, коливальний процес, коефіцієнт тертя.

HAFED I.S. ABDULSALAM
National Transport University

MATHEMATICAL MODEL FOR THE DYNAMICS OF OSCILLATIONS OF THE ZOOM TRANSMISSIONS

Evaluation of the dynamic characteristics the mechanical oscillatory systems (in particular gears) is an actual task and is carried out by constructing and computerizing their mathematical models, with that the detailed modeling, composition and number of their parameters are the determining factors that affecting on the accuracy of the dynamic calculation. Most of the modern mathematical models of the dynamics of oscillatory the gears describe the oscillatory process in continuous time. It is possible to significantly expand the possibilities of modeling oscillatory processes in mechanical systems of the gears class by creating mathematical models of dynamics, the solution of which is presented in discrete time, taking into account the coefficients of friction. The transition to such model is possible on the basis of the application the method of finite differences (MFD) with respect to the mathematical model in the form of one or several (system) of differential equations. At the same time, the accuracy of the results obtained on such a model is enhanced by the possibility of including an arbitrary deformation law for the material of the mechanical system. With the aim of improve the computational properties and expansion applications of mathematical models of the dynamics of oscillatory processes of mechanical systems class gears, with reference to one of them developed a finite-difference mathematical model, based on the use of the finite difference method. As an object to the use of the finite difference method was proposed a mathematical model of gear in the form of a system of linear differential equations of the second order. It is shown that the finite difference method can be used to transform mathematical models of the dynamics of oscillatory processes of mechanical systems to a finite-difference form, taking into account terms that take energy dissipation. On the example of a system of 14 linear differential equations of the second order describing radial-axial oscillations of a gear in three planes, its finite-difference analogue is developed.

Keywords: finite difference method, the mathematical model, the oscillatory process, the differential equations of dynamics.

Постановка проблемы

Оценка динамических характеристик механических колебательных систем (в частности зубчатых передач) осуществляется путём построения и компьютерной реализации их математических моделей. При этом детализация моделей, состав и количество их параметров являются определяющими факторами, влияющими на точность динамического расчёта [1]. Большинство из разработанных математических моделей динамики колебаний зубчатых передач, (в частности [2 - 6]), описывают колебательный процесс в непрерывном времени. Значительно расширить возможности моделирования колебательных процессов в механических системах класса зубчатых передач представляется возможным за счёт создания математических моделей динамики, решение которых представлено в дискретном времени, с учётом коэффициентов трения. Переход к такой модели возможен на основе применения метода конечных разностей (МКР) по отношению к математической модели в виде одного или нескольких (системы) дифференциальных уравнений.

Анализ последних исследований и публикаций

Построению математических моделей динамики зубчатых передач посвящено значительное количество работ учёных и исследователей, в частности: Н.А. Ковалева, М. Боша, М.Д. Генкина, В.К. Гринкевича, Д.Т. Демитрадзе и многих других. Проводя анализ их работ, можно отметить следующее: Модель Н. А. Ковалева [2] учитывает только крутильные формы колебаний зубчатых колёс при постоянной поперечной жёсткости колебательной системы. В модели динамики М. Боша [3] также рассматриваются только крутильные колебания, с учётом таких виброобразующих факторов как ошибка форм профиля и основного шага. Модель М.Д. Генкина и В.К. Гринкевича [4] построена с учётом влияния опор и учитывает такие параметры колебательной системы как демпферы зацепления, упругие жёсткости колёс, массы, моменты инерции и радиусы колёс, угол закрутки и упругую деформацию колёс. Модель учитывает крутильные и поперечные составляющие колебаний механической системы. Модель Д.Т. Демитрадзе так же даёт возможность рассматривать крутильные и поперечные колебания зубчатых колёс [5]. На данной модели исследовалось влияние податливости опор на динамику зубчатой передачи с учётом переменной жёсткости зацепления и коэффициентов демпфирования опор. Результаты исследований констатируют, что основная частота радиальных и поперечных колебаний колёс определяется частотой смены жёсткости зубьев и ошибкой зацепления. Предложенная автором [6] математическая модель динамики одноступенчатой косозубой эвольвентной зубчатой передачи в виде системы 14-ти линейных дифференциальных уравнений 2-ого порядка относительно обобщённых координат имеет вид (1):

$$
\begin{aligned}
&J\ddot{\varphi} = -k_1(\varphi - \varphi_1) + M;\\
&J_{X1}\ddot{\varphi}_1 = k_1(\varphi - \varphi_1) - C_3 r_{B1} R_1;\\
&J_{X2}\ddot{\varphi}_2 = -k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + C_3 r_{B2} R_2;\\
&J_3\ddot{\varphi}_3 = k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + M_3;\\
&J_{Y1}\ddot{\phi}_1^{Y} = -C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^{Y})l_1 + C''_{1Z}(z_1 + l_2\phi_1^{Y})l_2 + C_3\xi R_3;\\
&J_{Y2}\ddot{\phi}_2^{Y} = -C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^{Y})l_1 + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^{Y})l_2 - C_3\xi R_4;\\
&J_{Z1}\ddot{\phi}_1^{Z} = -C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^{Z})l_1 + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^{Z})l_2 + C_3 r_{B1} tg\,\beta_0 R_5;\\
&J_{Z2}\ddot{\phi}_2^{Z} = -C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_1^{Z})l_1 + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_2^{Z})l_2 - C_3 r_{B2} tg\,\beta_0 R_6; \qquad (1)\\
&m_1\ddot{x}_1 = C_{1X}x_1 + C_3(tg\,\beta_0 + 1)R_7;\\
&m_2\ddot{x}_2 = C_{2X}x_2 - C_3(tg\,\beta_0 + 1)R_8;\\
&m_1\ddot{y}_1 = C'_{1Y}(y_1 - l_1\phi_1^{Z}) + C''_{1Y}(y_1 + l_2\phi_1^{Z}) + C_3 R_9;\\
&m_2\ddot{y}_2 = C'_{2Y}(y_2 - l_1\phi_2^{Z}) + C''_{2Y}(y_2 + l_2\phi_1^{Z}) - C_3 R_{10};\\
&m_1\ddot{z}_1 = C'_{1Z}(z_1 - l_1\phi_1^{Y}) + C''_{1z}(z_1 + l_2\phi_1^{Y}) + C_3 R_{11};\\
&m_2\ddot{z}_2 = C'_{2Z}(z_2 - l_1\phi_2^{Y}) + C''_{2Z}(z_2 + l_2\phi_2^{Y}) - C_3 R_{12}.
\end{aligned}
$$

В модели принят вектор обобщенных координат, имеющий следующий вид: $q = \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \phi_1^y, \phi_1^z, \phi_2^y, \phi_2^z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2\}^T$, где *φ; φ1; φ2; φ3* – углы поворота присоединенных масс и зубчатых колес вокруг осей *x1, x2*; $\phi_1^{\,y}; \phi_1^{\,z}; \phi_2^{\,y}; \phi_2^{\,z}$ – углы поворота шестерни и колеса вокруг осей *y1,* *y2* и *z1, z2*; *x1, y1, z1, x2, y2, z2* – линейные перемещения шестерни и колеса вдоль осей *x, y, z*. Отличительной особенностью данной модели является её трехмерность, возможность описания динамических процессов как в косозубой так и в прямозубой зубчатых передачах, учет погрешностей зацепления, переменной жесткости зацепления, податливости опор при наличии шести степеней свободы.

Анализируя особенности каждой из рассмотренных моделей, можно сделать основной вывод о том, что переход к конечно-разностной математической модели динамики колебаний механических систем данного класса, с учетом коэффициентов трения, является задачей актуальной.

Цель исследования

Основная цель работы заключается в улучшении вычислительных свойств и расширения сфер применения математических моделей динамики колебательных процессов механических систем класса зубчатых передач, путем разработки конечно-разностной математической модели, на основе применения метода конечных разностей. В качестве объекта для применения метода конечных разностей рассматривается математическая модель зубчатой передачи, в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Изложение основного материала исследования

В методе конечных разностей (МКР) на область колебательного тела условно наносится сетка линий, точки пересечения которых называются *узлами* [7]. Неизвестными считаются значения функций в узлах, относительно которых справедливы известные дифференциальные уравнения динамики тел колебания. Производные в дифференциальных уравнениях при этом, аппроксимируются приближенными алгебраическими формулами, на основе известных соотношений между операторами дифференцирования и операторами конечных разностей [8]. Полученные алгебраические формулы называются *конечно-разностными*, и неизвестными в них являются значения функций в узлах. Замена производных в дифференциальном уравнении конечно-разностными формулами, приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Граничные условия также заменяются алгебраическими уравнениями. Решение системы линейных алгебраических уравнений даёт возможность найти распределение смещений координат точек колебательного тела относительно положения равновесия, изменения его положения и формы. По сути, МКР даёт возможность в заданном интервале изменения значений независимой переменной получить конечно-разностную аппроксимацию дифференциальных уравнений системой алгебраических рекуррентных формул или уравнений.

Основная идея такой аппроксимации схематично, в общем виде может быть представлена так [8]: в заданном в общем виде дифференциальном уравнении либо системе: $F\left(y'';y';y;t\right)=0$; $y\left(t_0\right)=y_0$; $y'\left(t_0\right)=y'_0$, – производится замена независимой переменной *t* её представлением на заданном интервале $[t_0,\ t)$ путём преобразования $t=t_0+h\cdot n=h(n_0+n)$, а искомая функция и её производные выражаются через конечно-разностные соотношения, через определённое количество равномерно расположенных с шагом $h=1$ ординат $y(n)$, начиная с n_0: $y(n_0)=y_0$, $y(n_0+1)=y_1$, $y(n_0+2)=y_2$, …, $y(n_0+k–1)=y_{k–1}$; $F(y_{n+k},\ y_{n+k–1};\ ...;\ y_{n+1},\ y_n,\ n)=0$, $y(k)=y_k$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Разрешив неявную форму разностного выражения относительно старшей координаты $y(k)$, получаем рекуррентную формулу, из которой по известным *k* начальным ординатам можно последовательно найти ординаты всего искомого процесса. Проще всего такая задача решается в случае аппроксимации производной разностью первого порядка:

$$y'(n)=\frac{\Delta y(n)}{\Delta t}=\frac{y(n+1)-y(n)}{h}=y(n+1)-y(n)\big|_{h=1}.$$

После приведения исходной системы к системе уравнений первого порядка, каждая искомая переменная получает значения при $n=0$, что равно своему начальному условию. В результате рекуррентный вычислительный процесс оказывается определённым, и даёт возможность вычислить на очередном шаге ($k=1$) значения всех переменных. Такой вычислительный процесс соответствует численному интегрированию систем дифференциальных уравнений по явному методу Эйлера. Основной сложностью здесь является выбор шага интегрирования для нецелочисленной независимой переменной *t*.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$x''=p(t)x'(t)+q(t)x(t)+r(t)\,, \qquad (2)$$

на интервале $[a;\ b]$ с граничными условиями $x(a)=\alpha,\ x(b)=\beta$. Построим разбиение отрезка $[a;\ b]$ с помощью точек $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$. Положим $h=(b–a)/N$, и $t_i=a+ih$ для $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N$. Формулы центрированных разностей, используемых для приближения производных, имеют вид [8]:

$$x'(t_i)=\frac{x(t_{i+1})-x(t_{i-1})}{2h}+O(h^2);\ x''(t_i)=\frac{x(t_{i+1})-2x(t_i)+x(t_{i-1})}{h^2}+O(h^2)\,, \qquad (3)$$

где $O(h^2)$ – точность аппроксимации ($O(h^2)$ означает Ch^2, где C – некая константа, h – сеточный шаг).

Заменим каждый член $x(t_i)$ в правой части равенства (2) на $x(i)$, и полученные в результате уравнения подставим в (3) получим уравнение (4).

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2}+O(h^2)=p(t_i)\left(\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}+O(h^2)\right)+q(t_i)x_i+r(t_i)\,. \tag{4}$$

Опустим в (4) два члена порядка $O(h^2)$ и введём обозначения $p_i=p(t_i)$, $q_i=q(t_i)$, $q_i=q(t_i)$. В результате получим разностное уравнение (5), которое используется для получения численных приближений к дифференциальному уравнению (2):

$$\frac{x_{i+1}-2x_i+x_{i-1}}{h^2}=p_i\,\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h}+q_i x_i+r_i\,, \tag{5}$$

Приближения получаются в процессе умножения каждой части уравнения (5) на h^2. Собирая члены содержащие x_{i-1}, x_i, и x_{i+1}, и располагая их в системе линейных уравнений получим уравнение (6).

$$\left(-\frac{h}{2}p_i-1\right)x_{i-1}+\left(2+h^2q_i\right)x_i+\left(\frac{h}{2}p_i-1\right)x_{i+1}=-h^2r_i\,, \tag{6}$$

Для $i=1,2,\ \ldots,\ N-1$, где $x_0=\alpha,\ x_N=\beta$. система уравнений (6) имеет трехдиагональную форму, которая в матричном виде изображается уравнением (7):

$$\begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & \frac{h}{2}p_1-1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{2}p_2-1 & 2+h^2q_2 & \frac{h}{2}p_2-1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{2}p_i-1 & 2+h^2q_i & \frac{h}{2}p_i-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{2}p_{N-2}-1 & 2+h^2q_{N-2} & \frac{h}{2}p_{N-2}-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h}{2}p_{N-1}-1 & 2+h^2q_{N-1} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -h^2r_1+e_0 \\ -h^2r_2 \\ -h^2r_i \\ -h^2r_{N-2} \\ -h^2r_{N-1}+e_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где $e_0=\left(\frac{h}{2}p_1+1\right)\alpha$, и $e_N=\left(\frac{-h}{2}p_{N-1}+1\right)\beta.$

Если вычисления производить с шагом h, то численное приближение к решению будет представлять собой множество дискретных точек $\{(t_i;\ x_i)\}$. В качестве основы для построения конечно-разностной математической модели динамики зубчатой передачи, возьмём разработанную ранее автором систему дифференциальных уравнений (1), которую с учётом диссипации энергии в колебательной системе необходимо дополнить членами, учитывающими трение, которые представлены системой уравнений (8):

$$\begin{gathered}
\ddot{\varphi}=\cdots-\left[\frac{h_1}{J}\right]\dot{\varphi}+\left[\frac{h_1}{J}\right]\dot{\varphi}_1\cdots;\quad \ddot{\varphi}_1=\cdots-\left[\frac{h_1}{J_{x1}}\right]\dot{\varphi}+\left[\frac{h_1-h_3}{J_{x1}}\right]\dot{\varphi}_1+\left[\frac{h_3}{J_{x1}}\right]\dot{\varphi}_2\cdots; \\
\ddot{\varphi}_2=\cdots-\left[\frac{h_3}{J_{x2}}\right]\dot{\varphi}_1+\left[\frac{h_2+h_3}{J_{x2}}\right]\dot{\varphi}_2-\left[\frac{h_2}{J_{x2}}\right]\dot{\varphi}_3\cdots;\quad \ddot{\varphi}_3=\cdots\left[\frac{h_2}{J_3}\right]\dot{\varphi}_3-\left[\frac{h_2}{J_3}\right]\dot{\varphi}_2\cdots; \\
\ddot{\phi}_1^y=\cdots+\left[\frac{l_1h'_{1z}+l_2h''_{1z}}{J_{y1}}\right]\dot{\phi}_1^y\cdots;\quad \ddot{\phi}_2^y=\cdots+\left[\frac{l_1h'_{2z}+l_2h''_{2z}}{J_{y2}}\right]\dot{\phi}_2^y\cdots; \\
\ddot{\phi}_1^z=\cdots+\left[\frac{l_1h'_{1y}+l_2h''_{1y}}{J_{z1}}\right]\dot{\phi}_1^z\cdots;\quad \ddot{\phi}_2^z=\cdots+\left[\frac{l_1h'_{2z}+l_2h''_{2z}}{J_{z2}}\right]\dot{\phi}_2^z\cdots; \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ddot{y}_1=\cdots+\left[\frac{h'_{1y}+h''_{1y}}{m_1}\right]\dot{y}_1\cdots;\quad \ddot{y}_2=\cdots+\left[\frac{h'_{2y}+h''_{2y}}{m_2}\right]\dot{y}_2\cdots; \\
\ddot{z}_1=\cdots+\left[\frac{h'_{1z}+h''_{1z}}{m_1}\right]\dot{z}_1\cdots;\quad \ddot{z}_2=\cdots+\left[\frac{h'_{2z}+h''_{2z}}{m_2}\right]\dot{z}_2\cdots.
\end{gathered} \tag{8}$$

После замены производных системы уравнений (1) их конечно-разностным эквивалентом (3), с учётом дополнения членами (8) и преобразования (4), окончательно конечно-разностная математическая модель динамики зубчатой передачи приобретает вид (9):

$$
\begin{aligned}
&\frac{z_{1(i+1)}-2z_{1(i)}+z_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{r_{b1}}{m_1}\right]\varphi_1-\left[\frac{r_{b2}}{m_1}\right]\varphi_2+\left[\frac{CL_4}{m_1}+\frac{C_з(t)\xi^2}{m_1\cos\alpha_t}\right]\phi_1^y-\left[\frac{C_з(t)\xi^2}{m_1\cos\alpha_t}\right]\phi_2^y+\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{m_1}\right]x_1-\\
&-\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{m_1}\right]x_2+\left[\frac{2C}{m_1}+\frac{C_з(t)\xi}{m_1\cos\alpha_t}\right]z_1+\left[\frac{h'_{1z}+h''_{1z}}{m_1}\right]\frac{z_{1(i+1)}-z_{1(i-1)}}{2H}-\left[\frac{C_з(t)\xi}{m_1\cos\alpha_t}\right]z_2-\left[\frac{\delta\varphi+j}{m_1}\right];\\
&\frac{z_{2(i+1)}-2z_{2(i)}+z_{2(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{r_{b1}}{m_2}\right]\varphi_1-\left[\frac{r_{b2}}{m_2}\right]\varphi_2-\left[\frac{C_з(t)\xi^2}{m_2\cos\alpha_t}\right]\phi_1^y+\left[\frac{CL_4}{m_2}+\frac{C_з(t)\xi^2}{m_2\cos\alpha_t}\right]\phi_2^y+\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{m_2}\right]x_1-\\
&-\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{m_2}\right]x_2-\left[\frac{C_з(t)\xi}{m_2\cos\alpha_t}\right]z_1+\left[\frac{2C}{m_2}+\frac{C_з(t)\xi}{m_2\cos\alpha_t}\right]z_2+\left[\frac{h'_{2z}+h''_{2z}}{m_2}\right]\frac{z_{2(i+1)}-z_{2(i-1)}}{2H}-\left[\frac{\delta\varphi+j}{m_2}\right];\\
&\frac{\varphi_{(i+1)}-2\varphi_{(i)}+\varphi_{(i-1)}}{H^2}=-\left[\frac{k_1}{J}\right]\varphi_{(i)}+\left[\frac{k_1}{J}\right]\varphi_{1(i)}-\left[\frac{h_1}{J}\right]\frac{\varphi_{(i+1)}-\varphi_{(i-1)}}{2H}+\left[\frac{h_1}{J}\right]\frac{\varphi_{1(i+1)}-\varphi_{1(i-1)}}{2H}+\left[\frac{M}{J}\right];\\
&\frac{\varphi_{1(i+1)}-2\varphi_{1(i)}+\varphi_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{k_1}{J_{x1}}\right]\varphi_{(i)}-\left[\frac{k_1}{J_{x1}}\right]\varphi_{1(i)}-\left[\frac{h_1}{J_{x1}}\right]\frac{\varphi_{(i+1)}-\varphi_{(i-1)}}{2H}+\left[\frac{h_1-h_з}{J_{x1}}\right]\frac{\varphi_{1(i+1)}-\varphi_{1(i-1)}}{2H}+\\
&+\left[\frac{h_з}{J_{x1}}\right]\frac{\varphi_{2(i+1)}-\varphi_{2(i-1)}}{2H}-\left[\frac{C_з(t)r_{b1}}{J_{x1}}\right]x_{1(i)}+\left[\frac{C_з(t)r_{b1}}{J_{x1}}\right]x_{2(i)};\\
&\frac{\varphi_{2(i+1)}-2\varphi_{2(i)}+\varphi_{2(i-1)}}{H^2}=-\left[\frac{k_2}{J_{x2}}\right]\varphi_{2(i)}+\left[\frac{k_2}{J_{x2}}\right]\varphi_{3(i)}-\left[\frac{h_з}{J_{x2}}\right]\frac{\varphi_{1(i+1)}-\varphi_{1(i-1)}}{2H}+\\
&+\left[\frac{h_2+h_з}{J_{x2}}\right]\frac{\varphi_{2(i+1)}-\varphi_{2(i-1)}}{2H}-\left[\frac{h_2}{J_{x2}}\right]\frac{\varphi_{3(i+1)}-\varphi_{3(i-1)}}{2H}+\left[\frac{C_з(t)r_{b2}}{J_{x2}}\right]x_{1(i)}-\left[\frac{C_з(t)r_{b2}}{J_{x2}}\right]x_{2(i)};\\
&\frac{\varphi_{3(i+1)}-2\varphi_{3(i)}+\varphi_{3(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{k_2}{J_3}\right]\varphi_{2(i)}-\left[\frac{k_2}{J_3}\right]\varphi_{3(i)}-\left[\frac{h_2}{J_3}\right]\frac{\varphi_{2(i+1)}-\varphi_{2(i-1)}}{2H}+\left[\frac{h_2}{J_3}\right]\frac{\varphi_{3(i+1)}-\varphi_{3(i-1)}}{2H}+\left[\frac{M_3}{J_3}\right];\\
&\frac{\phi^y_{1(i+1)}-2\phi^y_{1(i)}+\phi^y_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{r_{b1}}{J_{y1}}\right]\varphi_{1(i)}-\left[\frac{r_{b2}}{J_{y1}}\right]\varphi_{2(i)}+\left[\frac{CL_1}{J_{y1}}+\frac{C_з(t)\xi^2}{J_{y1}\cos\alpha_t}\right]\phi^y_{1(i)}-\left[\frac{C_з(t)\xi^2}{J_{y1}\cos\alpha_t}\right]\phi^y_{2(i)}+\left[\frac{tg\beta_0}{J_{y1}}\right]x_{1(i)}-\\
&-\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{J_{y1}}\right]x_{2(i)}+\left[\frac{CL_2}{J_{y1}}+\frac{C_з(t)\xi}{J_{y1}\cos\alpha_t}\right]z_{1(i)}-\left[\frac{C_з(t)\xi}{J_{y1}\cos\alpha_t}\right]z_{2(i)}+\left[\frac{l_1h'_{1z}+l_2h''_{1z}}{J_{y1}}\right]\frac{\phi^y_{1(i+1)}-\phi^y_{1(i-1)}}{2H}+\left[\frac{\delta\varphi+j}{J_{y1}}\right];\\
&\frac{\phi^y_{2(i+1)}-2\phi^y_{2(i)}+\phi^y_{2(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{r_{b1}}{J_{y2}}\right]\varphi_{1(i)}-\left[\frac{r_{b2}}{J_{y2}}\right]\varphi_{2(i)}-\left[\frac{C_з(t)\xi^2}{J_{y2}\cos\alpha_t}\right]\phi^y_{1(i)}+\left[\frac{CL_1}{J_{y2}}+\frac{C_з(t)\xi^2}{J_{y2}\cos\alpha_t}\right]\phi^y_{2(i)}+\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{J_{y2}}\right]x_{1(i)}-\\
&-\left[\frac{\mathrm{tg}\beta_0}{J_{y2}}\right]x_{2(i)}-\left[\frac{C_з(t)\xi}{J_{y2}\cos\alpha_t}\right]z_{1(i)}-\left[\frac{CL_2}{J_{y2}}-\frac{C_з(t)\xi}{J_{y2}\cos\alpha_t}\right]z_{2(i)}+\left[\frac{l_1h'_{2z}+l_2h''_{2z}}{J_{y2}}\right]\frac{\phi^y_{2(i+1)}-\phi^y_{2(i-1)}}{2H}+\left[\frac{\delta\varphi+j}{J_{y2}}\right];\\
&\frac{\phi^z_{1(i+1)}-2\phi^z_{1(i)}+\phi^z_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{CL_1}{J_{z1}}+\frac{C_з(t)(r_{b1})^2\,\mathrm{tg}^2\beta_0}{J_{z1}\sin\alpha_t}\right]\phi^z_{1(i)}-\left[\frac{C_з(t)(r_{b1})^2\,\mathrm{tg}^2\beta_0}{J_{z1}\sin\alpha_t}\right]\phi^z_{2(i)}+\left[\frac{CL_3}{J_{z1}}+\frac{C_з(t)r_{b1}\mathrm{tg}\beta_0}{J_{z1}\sin\alpha_t}\right]y_{1(i)}-\\
&-\left[\frac{C_з(t)r_{b1}\mathrm{tg}\beta_0}{J_{z1}\sin\alpha_t}\right]y_{2(i)}+\left[\frac{l_1h'_{1y}+l_2h''_{1y}}{J_{z1}}\right]\frac{\phi^z_{1(i+1)}-\phi^z_{1(i-1)}}{2H};
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$\frac{\phi^z_{2(i+1)}-2\phi^z_{2(i)}+\phi^z_{2(i-1)}}{H^2}=-\left[\frac{C_з(t)(r_{b2})^2\operatorname{tg}^2\beta_0}{J_{z2}\sin\alpha_t}\right]\phi^z_{1(i)}+\left[\frac{CL_1}{J_{z2}}+\frac{C_з(t)(r_{b2})^2 tg^2\beta_0}{J_{z2}\sin\alpha_t}\right]\phi^z_{2(i)}-$$

$$-\left[\frac{C_з(t)r_{b2}\operatorname{tg}\beta_0}{J_{z2}\sin\alpha_t}\right]y_{1(i)}+\left[\frac{CL_4}{J_{z2}}+\frac{C_з(t)r_{b2}\operatorname{tg}\beta_0}{J_{z2}\sin\alpha_t}\right]y_{2(i)}+\left[\frac{l_1h'_{2y}+l_2h''_{2y}}{J_{z2}}\right]\frac{\phi^z_{2(i+1)}-\phi^z_{2(i-1)}}{2H};$$

$$\frac{x_{1(i+1)}-2x_{1(i)}+x_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{C_{1x}+C_з(t)(\operatorname{tg}\beta_0+1)}{m_1}\right]x_{1(i)}-\left[\frac{C_з(t)(\operatorname{tg}\beta_0+1)}{m_1}\right]x_{2(i)};$$

$$\frac{x_{2(i+1)}-2x_{2(i)}+x_{2(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{C_з(t)(1-\operatorname{tg}\beta_0)}{m_2}\right]x_{1(i)}-\left[\frac{C_{2x}+C_з(t)(\operatorname{tg}\beta_0+1)}{m_2}\right]x_{2(i)};$$

$$\frac{y_{1(i+1)}-2y_{1(i)}+y_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{CL_4}{m_1}+\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_1\sin\alpha_t}\right]\phi^z_1-\left[\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_1\sin\alpha_t}\right]\phi^z_2+$$

$$+\left[\frac{h'_{1y}+h''_{1y}}{m_1}\right]\frac{y_{1(i+1)}-y_{1(i-1)}}{2H}+\left[\frac{2C}{m_1}+\frac{C_з(t)}{m_1\sin\alpha_t}\right]y_1-\left[\frac{C_з(t)}{m_1\sin\alpha_t}\right]y_2;$$

$$\frac{y_{1(i+1)}-2y_{1(i)}+y_{1(i-1)}}{H^2}=\left[\frac{CL_4}{m_1}+\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_1\sin\alpha_t}\right]\phi^z_1-\left[\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_1\sin\alpha_t}\right]\phi^z_2+$$

$$+\left[\frac{h'_{1y}+h''_{1y}}{m_1}\right]\frac{y_{1(i+1)}-y_{1(i-1)}}{2H}+\left[\frac{2C}{m_1}+\frac{C_з(t)}{m_1\sin\alpha_t}\right]y_1-\left[\frac{C_з(t)}{m_1\sin\alpha_t}\right]y_2;$$

$$\frac{y_{2(i+1)}-2y_{2(i)}+y_{2(i-1)}}{H^2}=-\left[\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_2\sin\alpha_t}\right]\phi^z_1-\left[\frac{CL_3}{m_2}-\frac{C_з(t)r_{b1}\operatorname{tg}\beta_0}{m_2\sin\alpha_t}\right]\phi^z_2+$$

$$+\left[\frac{h'_{2y}+h''_{2y}}{m_2}\right]\frac{y_{2(i+1)}-y_{2(i-1)}}{2H}+\left[\frac{C_з(t)}{m_2\sin\alpha_t}\right]y_1+\left[\frac{2C}{m_2}+\frac{C_з(t)}{m_2\sin\alpha_t}\right]y_2; \qquad (9)$$

Выводы

Показана возможность применения метода конечных разностей для преобразования математических моделей динамики колебательных процессов механических систем к конечно-разностному виду, с учетом членов, учитывающих диссипацию энергии. На примере системы 14-ти линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, описывающих радиально-осевые колебания зубчатой передачи в 3-х плоскостях, разработан её конечно-разностный аналог.

Список использованной литературы

1. Аугустайтис К.В. Автоматизированный расчет колебаний машин / К.В. Аугустайтис, П.К. Мозура, К.Ф. Сливинскас, Э.Р. Ставяцкене; Под ред. К.М. Рагульскиса. – Л. : Машиностроение, 1988. – 103 с.
2. Ковалев Н.А. Колебания зубчатых передач / Н.А. Ковалев // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механизмы и машины. – 1961. – №2.
3. Бош. М. Динамика цилиндрических зубчастых колес с учетом точности их изготовления / М. Бош. – Детали машин, 1966. № 11
4. Генкин М.Д. Динамические нагрузки в передачах с косозубыми колесами / М.Д. Генкин, В.К. Гринкевич. – М. Изд-во АН СССР. Институт Машиноведения, 1961. – 116 с.
5. Демитрадзе Д.Т. Экспериментальное исследование крутильных и поперечных колебаний в прямозубых цилиндрических зубчатых передачах / Д. Т. Демитрадзе. // Сообщ. АН Груз.ССР. – 1974. – Т. 75. – №2.
6. Дяченко П.В. Просторова математична модель власних частот та форм коливань механічної системи, класу одноступінчастих, евольвентних зубчастих передач / П.В. Дяченко // Штучний інтелект. – 2011. – № 1. – С. 54-60.
7. Жермен-Лакур П. Математика и САПР: В 2-х кн. Кн. 2. Пер. с франц. / П. Жермен-Лакур, П.Л. Жорж, Ф. Пистр, П. Безье. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
8. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. – М.: ЛАНЬ, 2005. – 288 с.