ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ

УДК 519.9; 537.84

Е.А. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, Е.В. ПОКЛОНСКИЙ, Е.В. БАБАЕВА
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Эффекты турбулентности играют большую роль в плазме, встречающейся в природе. Случайный характер турбулентных процессов плазмы указывает на то, что для определения средних величин целесообразно использовать статистическое описание турбулентности. В работе рассматривается одна из моделей плазмы – модель проводящей жидкости, описываемая системой уравнений МГД. Для системы уравнений МГД с неограниченной энергией в неограниченной области построена мера Радона на множестве обобщенных решений, позволяющая математически корректно определять вероятностные средние определенного класса функционалов от решений этих уравнений. В работе используется конструкция статистических решений Арсеньева А.А., позволяющая осреднять нелокальные по времени функционалы от решений системы МГД для зависящих от случая начальных данных и внешних сил.

Ключевые слова: мера, инвариантность, сходимость, пространство, топология

О.О. АРШАВА, А.П. ХАРЧЕНКО, Є.В. ПОКЛОНСЬКИЙ, О.В. БАБАЄВА
Харківський національний університет будівництва та архітектури

СТАТИСТИЧНІ РОЗВ’ЯЗКИ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ МАГНІТНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ

Ефекти турбулентності відіграють велику роль в плазмі, що зустрічається в природі. Випадковий характер турбулентних процесів плазми вказує на те, що для визначення середніх величин доцільно використовувати статистичний опис турбулентності. В роботі розглядається одна з моделей плазми - модель рідкого провідника, що описується системою рівнянь МГД. Для системи рівнянь МГД з необмеженою енергією в необмеженій області побудована міра Радона на множині узагальнених рішень, що дозволяє математично коректно визначати ймовірнісні середні певного класу функціоналів від розв'язків цих рівнянь. В роботі використовується конструкція статистичних рішень Арсеньєва А.А., що дозволяє осереднювати нелокальні за часом функціонали від рішень системи МГД для залежних від випадку початкових даних і зовнішніх сил.

Ключові слова: міра, інваріантність, збіжність, простір, топологія

E.A. ARSHAVA, A.P. KHARCHENKO, E.V. POKLONSKIY, E.V. BABAEVA
Kharkiv National University of Construction and Architecture

STATISTICAL SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF MAGNETIC HYDRODYNAMICS EQUATIONS

The effects of turbulence play a big role in the plasma that occurs in nature. Here it is should be noted studies of the plasma of the ionosphere, plasma near-earth space, the plasma of the radiation belts of the Earth and, in part, the interplanetary plasma. At present, the large role of turbulent processes in the acceleration of particles of radiation belts, the formation of polar auroras, the dynamics of the Earth's magnetosphere, and other processes is clear. Turbulent plasma motion takes place in MHD generators and plasma engines. Gradually, the conviction is strengthened that the effects of turbulence play a fundamental role in the plasma. All the variety of physical phenomena in a plasma requires for their explanation the attraction of ideas about turbulence. This circumstance made the problems of plasma turbulence and questions of its stability basic in plasma physics. The random nature of the turbulent plasma processes indicates that it is expedient to use the statistical description of turbulence to determine the average values. Average values of the investigated quantities are used to describe turbulence. In this paper we consider one of the plasma models, the conductive fluid model, described by the system of MHD equations. From a mathematical point of view, we encounter the following problem: a function describing a random process is sought as a generalized solution of a nonlinear differential equation. There are in general many solutions to the differential equation and they do not depend continuously on the data of the problem. The question is whether the equation has measurable solutions and how to describe the measure induced on the set of solutions by the initial probability measure. In this paper, for a system of MHD equations with unbounded energy in an unbounded domain, we construct a Radon measure on the set of generalized solutions that allows us to determine mathematically the probability averages of a certain class of functionals from the solutions of these equations. In this paper we use the construction of statistical solutions A.A. Arsenev, which allows us to average nonlocal functionals from the solutions of the MHD system for the case-dependent initial data and external forces.

Keywords: measure, invariance, convergence, space, topology

Постановка проблемы

1. Рассмотрим систему нелинейных уравнений магнитной гидродинамики (МГД)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{3}u_k\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\pi}{\rho}\sum_{i=1}^{3}H_k\frac{\partial H}{\partial x_k}-\nu\Delta u=\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\left(p+\frac{\pi H^2}{2}\right)+f,\\
&\operatorname{div}u=0,\\
&\operatorname{rot}E=-\pi\frac{\partial H}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}H=\sigma\big(E+\pi[u,H]\big)+j,\\
&\operatorname{div}(\pi H)=0,
\end{aligned}\tag{1}$$

где: $u(x,t)$ – скорость течения жидкости в точке $x=(x_1,x_2,x_3)$ в момент времени t; $H(x,t)$ и $E(x,t)$ – векторы магнитной и электрической напряженностей, $p(x,t)$ – давление; $f(x,t)$ – внешние гидродинамические силы; $j(x,t)$ – заданные токи; π – магнитная проницаемость; σ – проводимость; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость жидкости.

Систему (1) будем рассматривать в области $G=G_1\cup G_2\cup G_3$, где G_1 и G_3 – ограниченные области, а $G_2=R^3\setminus(G_1\cup G_3)$, причем

$$\begin{aligned}
&H\big|_{|x|=\infty}=H_\infty,\\
&E\big|_{|x|=\infty}=0,
\end{aligned}\tag{2}$$

где H_∞ – постоянный вектор. Кроме того, во всем объеме заданы начальные условия

$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\quad H\big|_{t=0}=H_0(x).\tag{3}$$

Функции $\sigma(x)$ и $\pi(x)$ являются разрывными функциями в $G=G_1\cup G_2\cup G_3$:

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_1=const>0, & x\in G_1,\\ 0, & x\in G_2,\\ \sigma_3(x), & x\in G_3,\end{cases}$$

$$\pi(x)=\begin{cases}\pi_1=const>0, & x\in G_1,\\ \pi_2(x), & x\in G_2,\\ \pi_3(x), & x\in G_3,\end{cases}$$

$\sigma_1,\sigma_3\ge\sigma_0>0;\quad \pi(x)\ge\pi_0>0.$ В дальнейшем σ_k и π_k будем считать постоянными.

Вектор $j(x,t)$ зададим следующим образом:

$$j(x,t)=\begin{cases}0 & ,x\in G_1\cup G_2\\ j(x,t) & ,x\in G_3.\end{cases}$$

Анализ последних исследований и публикаций

Ранее [1] было анонсировано существование статистических решений – мер Радона, аналогов мер Гиббса на пространстве обобщенных решений системы МГД. Краткое изложение этого вопроса приведено в [3].

Цель исследования

Целью настоящей работы является доказательство теоремы существования статистических решений системы (1-3). Используется конструкция статистических решений Арсеньева А.А. [4, 5].

Изложение основного материала исследования

2. Пусть $W_2^l(G)$ – гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых квадратично интегрируемы в G и имеют квадратично интегрируемые обобщенные производные до порядка l; $\overset{\circ}{W}{}_2^l(G)$ – подпространство $W_2^l(G)$, являющееся замыканием в норме $W_2^l(G)$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций в G; $\overset{\circ}{J}_1(G)$ – подпространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, состоящее из соленоидальных функций.

Далее, пусть задана ограниченная область G с дважды непрерывно-дифференцируемой границей ∂G и разрывная функция

$$\pi(x)=\begin{cases}\pi_1(x)\ , x\in G\\ \pi_2(x)\ , x\in R^3\setminus G,\end{cases}$$

причем $\pi(x)\ge\pi_0>0;$ π_1 и π_2 непрерывно-дифференцируемые в G и $R^3\setminus G$ и, кроме того, $\pi_2(x)$ и $\dfrac{\partial\pi_2(x)}{\partial x_i}$ ограничены.

Определение 1. [8] $K(R^3)$ есть пространство вектор-функций ψ, принадлежащих к $W_2^1(G)$ и $W_2^1(R^3\setminus G)$, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div}\pi_1\psi^{(1)}=0,\quad \operatorname{div}\pi_2\psi^{(2)}=0,\quad \operatorname{rot}\psi^{(2)}=0,$$
$$\psi_\tau^{(1)}\Big|_{\partial G}=\psi_\tau^{(2)}\Big|_{\partial G},$$
$$\pi_1\psi_n^{(1)}\Big|_{\partial G}=\pi_2\psi_n^{(2)}\Big|_{\partial G},$$

где $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ – значение вектора ψ в G и $R^3\setminus G$, а $\psi_n^{(1)}$ и $\psi_n^{(2)}$ – проекции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ на направление нормали к ∂G, внешнее относительно G.

3. Пусть Ω – ограниченная область трехмерного эвклидова пространства R^3 и $K_0(\Omega)$ – множество двухкомпонентных функций

$$w(x)=\{u(x),H(x)\},$$

удовлетворяющих условию

$$\|w\|_{K_0}=\left(\int u^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int \pi H^2(x)dx\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{3}\left(\int u_{x_k}^2(x)dx\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\frac{1}{\sigma}\left(\operatorname{rot}H(x)\right)^2dx\right)^{1/2}<\infty.$$

Пусть D – множество двухкомпонентных функций $g(x)=\{\varphi(x),\psi(x)\}$, каждая из которых имеет компактный носитель и удовлетворяет условию

$$\|g\|_D=\left(\int \varphi^2(x)dx\right)^{1/2}+\left(\int \pi\psi^2(x)dx\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{3}\left(\int \varphi_{x_k}^2(x)dx\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\frac{1}{\sigma}\left(\operatorname{rot}\psi(x)\right)^2dx\right)^{1/2}<\infty.$$

Определим двойственность $\langle K_0(\Omega),D\rangle$, положив

$$\langle w,g\rangle=\int\left(u(x)\varphi(x)+\pi H(x)\psi(x)+\tfrac{1}{\sigma}\operatorname{rot}H(x)\operatorname{rot}(\psi(x))\right)+\sum_{k=1}^{3}\int u_{x_k}(x)\varphi_{x_k}(x),\tag{4}$$

если $w(x)\in K_0(\Omega)$ и $\operatorname{supp}g(x)\subset\Omega$, и наделим пространство $K_0(\Omega)$ топологией $\sigma(K_0,D)$.

Пусть T – компактное подмножество R_+^1, $K_T(\Omega)$ – множество непрерывных функций $T\to K_0(\Omega)$. Будем рассматривать $K_T(\Omega)$ как топологическое векторное пространство [7], в котором база окрестностей нуля задается таким образом:

$$L_{\varepsilon,B}=\left\{w(t);\sup_{t\in T}\sup_{1\le i\le n}\left|\langle w,g_i\rangle\right|<\varepsilon,g_i\in B\right\},$$

где B – конечное подмножество из D, $\operatorname{supp}g_i\subset\Omega$.

Рассмотрим последовательность областей Ω_m, $\Omega_{m+1}\supset\Omega_m$, $\bigcup_m\Omega_m=R^3$ и последовательность компактных множеств T_m, $T_{m+1}\supset T_m$, $\bigcup_m T_m=R_+^1$.

Обозначим K_0 проективный предел пространств $K_0(\Omega_m)$ и символом K_T проективный предел пространств $K_{T_m}(\Omega_m)$.

4. Обозначим через $O(R(\Omega,T))$ множество таких элементов $w \in K_T$, которые для каждой области $\Omega \subset R^3$ и каждого компакта $T \subset R^1_+$ удовлетворяют оценке $\sup\limits_{t\in T}\|w\|_{K_0} \le R(\Omega,T)$, где $R(\Omega,T)$ – произвольная константа для каждой области $\Omega \subset R^3$ и $T \subset R^1_+$.

Определение 2. Множество $K \subset K_T$ называется локально ограниченным, если оно является подмножеством некоторого множества $O(R(\Omega,T))$.

Лемма 1. [5] Для того, чтобы множество $K \subset K_T$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы:

1) оно было локально ограничено;
2) для любой области $\Omega \subset R^3$ и компакта $T \subset R^1_+$, множество $P_r(\Omega,T)(K)$ замкнуто в $K_T(\Omega)$;
3) множество $D_g = \{d(t) = \langle w, g\rangle, w \in K\}$ равностепенно непрерывно на любом компакте T при каждой функции $g \in D$.

Лемма 2. Множества вида

$$K = \left\{ w : \sup_{w\in K}\sup_{t\in T} X(w,\Omega) \le C_1(w,\Omega),\ \sup_{w\in K}\sup_{t\in T}(X^2(w,\Omega) + \Phi^2(w,\Omega)) \le C_2(w,\Omega) \right\},$$

где $X^2(w,\Omega) = \rho\|v\|^2_{L_2} + \left\|\sqrt{\pi}H\right\|^2_{L_2}$, $\Phi^2(w,\Omega) = \rho\nu\sum\limits_{i=1}^{3}\left\|v_{x_k}\right\|^2_{L_2} + \int\frac{1}{\sigma}(rotH)^2\,dx$, локально ограничены.

Доказательство. Непосредственно иссследует из определения $\|w\|_{K_0}$.

5. Определение 3. Вектор-функцию $\Psi = (\varphi,\psi)$ будем называть пробной, если компоненты имеют компактный носитель и удовлетворяют условиям

$$\varphi \in W_2^1(Q_1),\quad \psi \in W_2^1(Q_k),\quad Q_k = [0,\theta]\times G_k,\quad k = 1,2,3;$$
$$\left\|\varphi_{x_i}\right\|_{L_2},\quad \left\|\psi_{x_i}\right\|_{L_2} \le M;\quad \varphi \in \overset{\circ}{J}_1(G_1),\quad \psi \in K(R^3).$$

Пусть

$$\begin{aligned}
\Sigma(\Psi,w,\theta) \equiv{}& \langle\Psi,w\rangle\big|_{t=\theta} - \langle\Psi,w\rangle\big|_{t=0} + \\
&+\int_0^\theta\!\!\int\left\{-u\varphi_t - \left[u_k u - \frac{\pi}{\rho}(h_k h + h_{0k}h + h_k h_0)\right]\varphi_{x_k} - w - \nu u_{x_k} - f\varphi\right\}dxdt - \\
&-\int u_0(x)\varphi(x,0)\,dx + \\
&+\int_0^\theta\!\!\int\left\{-\pi h\psi_t + \frac{1}{\sigma}\operatorname{rot}h\operatorname{rot}\psi - \pi[u, h+h_0]\operatorname{rot}\psi - \frac{j_0}{\sigma}\operatorname{rot}\psi\right\}dxdt - \\
&-\int \pi(H_0 + h_0)\psi(x,0)\,dx,
\end{aligned}\tag{5}$$

где $h_0 = H_\infty + \psi_0$, $h \in K(R^3)$, а ψ_0 удовлетворяет следующим условиям

$$\operatorname{rot}\psi_0 = 0,\quad \operatorname{div}\pi\psi_0 = 0$$
$$\left(\pi_1\psi_{0n}^{(1)} - \pi_2\psi_{0n}^{(2)}\right)\Big|_{\partial G_1} = (\pi_2 - \pi_1)H_{\infty n}\big|_{\partial G_1},$$
$$\left(\pi_3\psi_{0n}^{(3)} - \pi_2\psi_{0n}^{(2)}\right)\Big|_{\partial G_3} = (\pi_2 - \pi_3)H_{\infty n}\big|_{\partial G_3},$$
$$\psi_{0\tau}^{(1)}\Big|_{\partial G_1} = \psi_{0\tau}^{(2)}\Big|_{\partial G_1},$$

$$\psi_{0\tau}^{(2)}\Big|_{\partial G_1} = \psi_{0\tau}^{(3)}\Big|_{\partial G_3},$$

$$\psi_0 \in L_2(R^3), \quad W_2^{(1)}(G_i), \quad i = 1,2,3.$$

Лемма 3. Отображение $w \to \Sigma(\Psi, w, \theta)$ непрерывно по w на каждом локально-ограниченном множестве.

Доказательство. Пусть $w_n \to w$ в топологии K_T. Тогда u_n, H_n, $u_{x_k n}$, $\operatorname{rot} H_n$ сходятся слабо в $L_2(\Omega)$ к своим предельным значениям, соответственно u, H, u_{x_k}, $\operatorname{rot} H$, равномерно по t, что дает возможность предельного перехода в линейных членах тождества. Предельный переход в нелинейных членах возможен в силу теорем вложения.

Лемма 4. Множество функций, удовлетворяющих условиям:

1) w: $\sup\limits_{w \in K} \sup\limits_{t \in T} X(w,\Omega) \le C_1(w,\Omega)$,

$$\sup_{w \in K} \sup_{t \in T} (X^2(w,\Omega) + \Phi^2(w,\Omega)) \le C_2(w,\Omega),$$

2) $\Sigma(\Psi, w, \theta) = 0, \quad \forall w \in K$, компактно в K_T.

Доказательство. Покажем, что множество K удовлетворяет условиям леммы 1. Локальная ограниченность следует из леммы 2.

Пусть $\{w_n\} \subset K_T$

и

$$\sup_{t \in T} X(w_n,\Omega) \le C_1(\Omega,T),$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w_n,\Omega) + \Phi^2(w_n,\Omega)) \le C_2(\Omega,T).$$

Тогда из сходимости $w_n \to w$ в топологии K_T следует

$$\sup_{t \in T} X(w_0,\Omega) \le C_1(\Omega,T),$$

$$\sup_{t \in T} (X^2(w_0,\Omega) + \Phi^2(w_0,\Omega)) \le C_2(\Omega,T).$$

Откуда, учитывая непрерывность функции $\Sigma(\Psi, w, \theta)$, следует замкнутость множества в K_T, удовлетворяющего условиям леммы.

Равностепенная непрерывность следует из условия (5), которое дает

$$\left| \langle \Psi, w \rangle \big|_{t=\theta} - \langle \Psi, w \rangle \big|_{t=0} \right| \le C(\varphi,\psi) \left(\sup_{0 \le t \le \theta} (X^2(w,\Omega) + \Phi^2(w,\Omega)) + C(\Omega) \right) |\theta| .$$

Следовательно, находимся в условиях леммы 1, откуда и заключаем справедливость доказываемого утверждения

6. Положим

$$\Xi(\Psi, w) = |\Sigma(\Psi, w, \theta)|^2 \Big/ \left(1 + |\Sigma(\Psi, w, \theta)|\right)^2 . \tag{6}$$

Пусть μ_0 – вероятностная мера на K_0.

Определение 4. Вероятностную меру Радона на пространстве K_T назовем статистическим решением системы МГД с начальной мерой μ_0, если выполнены следующие условия:

1) для любой непрерывной ограниченной на K_T функции $F(w)$ и любой функции $\Xi(\Psi, w)$ вида (6) справедливо равенство

$$\int F(w) \cdot \Xi(\Psi, w) d\mu = 0;$$

2) сужение меры μ на множество функционалов, зависящих от значения функции w в момент времени $t = 0$, совпадает с мерой μ_0.

Теорема. Для любого $\delta > 0$ существует статистическое решение системы (1)-(3) с начальной мерой μ_0, которое удовлетворяет условию:

$$\sup_{t \in T} X(w,\Omega) \le \left(X(w|_{t=0},\Omega) + \delta \right) \Big/ \operatorname{mod} \mu ,$$

$$\sup_{t \in T} \left(X^2(w,\Omega) + \Phi^2(w,\Omega) \right) \le \left(X^2(w|_{t=0},\Omega) + \Phi^2(w|_{t=0},\Omega) + \delta \right) \Big/ \operatorname{mod} \mu ,$$

для любого компакта $T \subset R^1_+$, любой области $\Omega \subset R^3$.

Доказательство. Пусть $Z(\delta)$ – произвольная непрерывная ограниченная на K_T функция. Покажем, что функция

$$\chi: \quad F \to \int F\big(Z(\delta)w_0\big)d\mu_0 \tag{7}$$

задает меру Радона на K_T. Для этого достаточно доказать [6], что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K_ε, что для определенного формулой (7) функционала χ справедлива оценка $|\chi(F)| < \varepsilon$ при $F(w) \equiv 0$ на K_ε и $\sup\limits_{w \in K} F(w) \le 1$. Поскольку μ_0 – это мера Радона, то для данного $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $\Gamma_\varepsilon \subset K_0$, что $\mu_0(K_0 \setminus \Gamma_\varepsilon) < \varepsilon$.

Положим

$$C_1(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \sup_{w_0 \in \Gamma_\varepsilon} X(w_0, \Omega) + \delta,$$

$$C_2(\Omega, \Gamma_\varepsilon) = \sup_{w_0 \in \Gamma_\varepsilon} \left(X^2(w_0, \Omega) + \Phi^2(w_0, \Omega)\right) + \delta,$$

и обозначим через K_ε множество элементов $w \in K_T$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{t \in T} X(w, \Omega) \le C_1(\Omega, \Gamma_\varepsilon),$$

$$\sup_{t \in T} \left(X^2(w, \Omega) + \Phi^2(w, \Omega)\right) \le C_2(\Omega, \Gamma_\varepsilon),$$

и $\Sigma(\Psi, w, \theta) = 0$ для всех пробных функций Ψ; $\theta \in R^1_+$.

Это множество компактно в K_T, кроме того $Z(\delta)(\Gamma_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$. Поэтому

$$|\chi(F)| = \left| \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} F\big(Z(\delta)w_0\big)d\mu_0 \right| + \left| \int\limits_{K_0/\Gamma_\varepsilon} F\big(Z(\delta)w_0\big)d\mu_0 \right| \le \sup_w |F(w)| \operatorname{mes}\big(K_0 \setminus \Gamma_\varepsilon\big) < \varepsilon,$$

если $\operatorname{supp} F(w) \subset K_T \setminus K_\varepsilon$, $|F(w)| \le 1$, что и требовалось доказать.

Выводы

Таким образом, доказана теорема о существовании мер, порождаемых системой уравнений магнитной гидродинамики с неограниченной энергией в неограниченном пространстве.

Список использованной литературы.

1. Харченко А.П. О мерах, порождаемых системой уравнений магнитной гидродинамики / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский // Сборник тезисов докладов международной конференции "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (г. Харьков, 17-22 апреля 2011 г.). – Харьков, 2011. – С.251-252.
2. Харченко А.П. Однородные статистические решения систем МГД. / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский // Сборник тезисов докладов международной конференции "Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Тараповские чтения-2012" (г. Харьков, 1-31 мая 2012 г.). – Харьков. – 2012. – С.123.
3. Харченко А.П. Описание множества статистических решений системы уравнений магнитной гидродинамики / А.П. Харченко, Е.В. Поклонский, А.В. Немцева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – Воронеж: Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, 2015. – Т.3, № 8-4 (9-14). – С. 318-322.
4. Арсеньев А.А. Построение турбулентной меры для системы уравнений Навье-Стокса. / А.А. Арсеньев // ДАН СССР. – 1975. – Т. 225, № 1. – С. 18-20.
5. Арсеньев А.А. О статистических решениях нелинейного волнового уравнения. / А.А. Арсеньев // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 7. – С. 1239-1252.
6. Смолянов О.Г. Меры на топологических линейных пространствах. / О.Г. Смолянов, С.В. Фомин // УМН. – 1976. – Т. 31, Вып. 4. – С. 3-56.
7. Бурбаки Н. Интегрирование / Н. Бурбаки. –М:. Наука, 1977. – 600 с.
8. Ладыженская О.А. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников // Тр. Математического ин-та АН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 115-173.
9. Аршава Е.А. Инвариантные меры системы уравнений магнитной гидродинамики. / Е.А. Аршава, А.П. Харченко, Е.В. Поклонский, Е.В. Бабаева // Вестник ХНТУ. – Херсон. – 2017. – № 3(62), Т. 1. – С. 13-17.