УДК 517.11+519.92+539.3

В.О. БАРАНЕНКО, Д.Л. ВОЛЧОК
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

МЕТОДИКА ЗАСТОСУВАННЯ ОСНОВНИХ ОЗНАЧЕНЬ ТЕОРІЇ НЕЧІТКИХ МНОЖИН В ЗАДАЧАХ АНАЛІЗУ ТА ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

В роботі подана методика застосування основних означень теорії нечітких множин в задачах аналізу та оптимального проектування стрижневих систем. Наведено приклади моделювання балки і ферми у випадку неповної інформації про початкові дані. Розглянуто приклад пружної системи у випадку нечіткої інформації про бажаний ресурс задачі про довговічність від утоми розтягнутої панелі з крайовою тріщиною.

Ключові слова: нечіткі величини, стрижневі системи, фазифікація, дефазифікація, аналіз, оптимізація.

В.А. БАРАНЕНКО, Д.Л. ВОЛЧОК
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры

МЕТОДИКА ПРИМЕНЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕОРИИ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В работе представлена методика применения основных определений теории нечётких множеств в задачах анализа и оптимального проектирования стержневых систем. Приведены примеры моделирования балки и фермы в случае неполной информации об исходных данных. Рассмотрен пример упругой системы в случае нечёткой информации о желаемом ресурсе в задаче об усталостной долговечности растянутой панели с краевой трещиной.

Ключевые слова: нечёткие величины, стержневые системы, фаззификация, дефаззификация, анализ, оптимизация

V.A. BARANENKO, D.L. VOLCHOK
Prydniprovs'ka State Academy of Civil Engineering and Architecture

THE METHODOLOGY OF APPLICATION OF THE MAIN DEFINITIONS OF THEORY OF FUZZY SETS IN THE ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGNING PROBLEMS

An important feature of the modern design of any technical system is the development of such a strategy, which can result in the best project system with predetermined capabilities. In developing this strategy takes into account the current achievements in certain areas of science, technology, especially computer and information. Design is no longer based on empirical formulas. The use of analytical computer systems is now a commonly accepted phenomenon. Modern constructions, like machines, are changing very quickly. The dimensions of the design increase its value and, accordingly, represent more requirements for such characteristics: material consistency, reliability, durability, endurance, being "tolerant" to possible damage (tolerance), and others.

In the design theory of structures, including the optimal, dominated deterministic approach. Interest to consideration of more general problems that would take into account uncertainties is growing. To formulate and solve such problems, one needs a mathematical apparatus that would be able to a priori take into account one or another uncertainty. Such a device about the actions of the factors of random nature in mechanics was the theory of probability and mathematical statistics [1].

In addition to random factors in the design may also be factors of other uncertainty, namely: fuzzy and rough. This work is devoted to the development of methods for applying the basic concepts of the theory of fuzzy sets to the problems of analysis and optimal design of structures [2].

The paper describes a method for applying the basic definitions of the theory of fuzzy sets in problems of analysis and optimal design of rod systems. Examples of beam and truss simulations are presented in the case of incomplete information about the initial data. An example of an elastic system is considered in the case of fuzzy information about the desired resource in the problem of the fatigue durability of a stretched panel with an edge crack.

On the example of problems of analysis and optimal design of structural mechanics, the application of basic concepts of the theory of fuzzy sets is considered. Steps of fuzzy simulation and numerical solutions are presented.

Keywords: fuzzy values, rod systems, fuzzification, defuzzification, analysis, optimization

Постановка проблеми

Важливою рисою сучасного проектування будь-якої технічної системи є розробка такої стратегії, в результаті якої можна отримати найкращий проект системи із заданими наперед можливостями.

При розробці цієї стратегії враховуються сучасні досягнення в тих чи інших напрямах науки, технологій, особливо комп'ютерних і інформаційних.

Проектування вже не ґрунтується на емпіричних формулах. Використання аналітичних комп'ютерних комплексів зараз є загально прийнятним явищем. Сучасні конструкції, як і машини, змінюються дуже швидко. Розміри конструкції, її вартість збільшуються і, відповідно, представляють більш суворі вимоги до таких характеристик: матеріаломісткість, надійність, довговічність, витривалість, бути "терплячими" до можливих пошкоджень (толерантність) та інші.

В теорії проектування конструкцій, в тому числі й оптимальному, де домінує детермінований підхід, наявний інтерес до розгляду більш загальних задач, в яких були б враховані невизначеності. Для формулювання і розв'язання їх потрібний такий математичний апарат, який мав би можливість апріорно врахувати ту чи іншу невизначеність.

Таким апаратом про дії факторів випадкової природи в механіці стала теорія ймовірності і математична статистика [1].

Крім випадкових факторів в проектуванні можуть бути також фактори іншої невизначеності, а саме: нечіткі і неточні.

Дана робота присвячена розробці методів застосування основних понять теорії нечітких множин до задач аналізу та оптимального проектування конструкцій [2].

Мета дослідження

Розглядається деяка технічна пружна система, яка описується таким рівнянням стану

$$(x,v): f(x,v) \to y, \tag{1}$$

де вектори x, v утворюються, відповідно, з незмінних та змінних вихідних параметрів, а y – вектор результатів. Функція f – дійснозначна, яка визначається елементами x, v на множинах X і V, приймає значення елементів на множині Y. При цьому $x \in X \subseteq R^n$; $v \in V \subseteq R^m$. Перетворення f може бути задано аналітичним виразом або обчислювальною комп'ютерною програмою, диференціальним рівнянням або їх системою, скінченно-різницевим або скінченно-елементним підходом, аналітичними або чисельними процедурами оптимального проектування конструкцій. Нехай вектор v містить в собі елементи $v_i = \xi_i$; $i = 1, 2, ..., t$, які мають невизначену природу, зокрема нечітку, тобто

$$v = (v_1, v_2, ..., v_r, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_t); \; r + t = m. \tag{2}$$

Характерною рисою в означені нечітких множин є уведення до розгляду так званої функції належності елемента ξ_i до нечіткої множини Ω, яка визначена на універсальній множини U, тобто $v \in \Omega \subseteq U \subseteq R$. В ТНМ змінні, що уводяться за допомогою словесних квантифікаторів виду "приблизно", "близько до числа", "в інтервалі", "декілька більше (менше)", "майже дорівнює", "величина ледве.." інтерпретуються як нечіткі множини.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В багатьох довідниках інформація про характеристики матеріалів задається у вигляді інтервалів, наприклад модуль пружності Ст3 задається $E = (1.9 \cdot 10^5 ... 2.1 \cdot 10^5)$ МПа. Рекомендацій щодо вибору значення E в заданому проміжку не пропонується. Крім того границі такого інтервалу можуть бути розпливчасті, неточні. Ставиться питання: чи можна включити до розгляду значення інтервалу, як сукупність точок, тобто як нечітку множину? Або інший приклад. Такі характеристики проекту, як навантаження, місце прикладення сили, як правило, в реальності можуть бути нечіткими, неточними. Наприклад, величина навантаження прикладеного до балки "близько до значення 20кН" або "навантаження від лівого краю прикладене на відстані l від двох до трьох метрів".

$$(\approx 2) \le l \le (\approx 3). \tag{3}$$

Як видно із запису (3), кінці є приблизні числа. Описати їх можна за допомогою функції належності ТНМ, або розглянути у вигляді

$$[c \le 2 \le a] \le l \le [b \le 3 \le d]; \; c \le a \le b \le d. \tag{4}$$

Для моделювання інформаційної ситуації (4) в роботі [3] розроблено математичний апарат теорії неточних множин.

Викладення основного матеріалу дослідження

1. Нечітке моделювання.

1.1. Етап фазифікації

Не порушуючи загальності підходу, розглянемо випадок, коли $t=1$ і функція належності є трикутного виду (рис. 1) для нечіткої множини $A(v_t)\subseteq U$:

$$\mu_A(v)=\begin{cases}\dfrac{v-a}{m-a}, a\le v<m\\ 1, v=m\\ \dfrac{b-v}{b-m}, m<v\le b\\ 0\end{cases}. \qquad (5)$$

Носій множини A в цьому випадку записується як $A(a,m,b)_\Delta$, тобто функція μ в інтервалі $[a,b]$ має додатне значення.

Використовуючи α – рівневий переріз функції $\mu_A(v)$, отримаємо границі $X_L(\alpha)$ і $X_R(\alpha)$ нечіткої множини A шляхом розв'язання рівняння $\mu(v)=\alpha$, а саме:

$$X_L(\alpha)=m\alpha+(1-\alpha)a\ ;\ X_R(\alpha)=m\alpha+(1-\alpha)b\ ;\alpha\in[0,1].$$

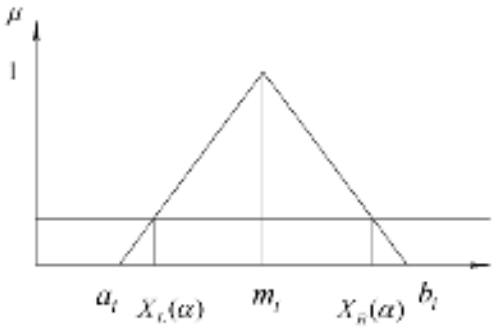

Рис. 1. Графічна інтерпретація α – рівневого перерізу для функції належності трикутного типу

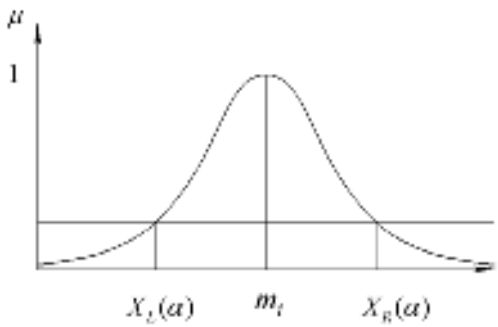

Рис. 2. Графічна інтерпретація α – рівневого перерізу для функції належності гауссового типу

Враховуючи, що $X_L(\alpha)$ є для кожного α рівня нижньою межею ($\inf$) множини A, а $X_R(\alpha)$ – верхньою межею (Sup), то на основі операції (композиції або декомпозиції) нечіткої множини запишемо [2]:

$$A=\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\mu_i}{v_{1i}}+\frac{1}{v_{1N}}+\sum_{i=N+1}^{2N}\frac{\mu_i}{v_{1i}}, \qquad (6)$$

де N – число дискретів α – рівнів і $\Delta\alpha=1/N$, $\mu_i=i\cdot\Delta\alpha$,

де $v_{1i}=X_L(\alpha_i)$ для $i=1,2,...,N-1$, $v_{1i}=X_R(\alpha_i)$ для $i=N+1,N+2,...,2N$.

Зауваження 1. Точки рівня $\alpha=0$ для функції належності гауссового виду (рис.2)

$$\mu_A(x)=\begin{cases}+\infty, x\to\infty\\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, a\le x\le b\\ -\infty, x\to-\infty\end{cases} \qquad (7)$$

не розглядаються. В цьому випадку необхідно починати розв'язання з рівня $\alpha=\Delta\alpha=1/N$, для якого маємо: $X_L(\alpha)=m-\Delta$; $X_R(\alpha)=m+\Delta$, де $\Delta=\sigma\sqrt{-2\ln\alpha}$; $0<\alpha\le 1$.

1.2. Етап аналізу або оптимізації

Трикутний і гауссовий види функції належності використовуються для моделювання словесних означень квантифікаторів типу "приблизно" та інші. З отриманої опуклої множини A (6) для кожного значення v_{1i}; $i=1,2,...,2N$, розраховуються значення $y_i=f(x,u,v_{1i})$, з яких формується нечітка множина Y результатів $\{y_i\}$; $i=1,2,...,2N$, з функцією належності μ_A.

$$Y = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\mu_{Yi}}{y_i} + \frac{1}{y(x=m)} + \sum_{i=N+1}^{2N} \frac{\mu_{Yi}}{y_i} \tag{8}$$

В цьому полягає виконання другого етапу моделювання.

Зауваження 2. Може трапитись, що значення $y_L(\alpha)$ будуть більші, ніж $y_R(\alpha)$. В цьому випадку потрібно виконати перестановку.

Зауваження 3. Якщо в запису нечіткої множини Y

$$\frac{\mu_i}{y_i} + \frac{\mu_{i+1}}{y_{i+1}} + \frac{\mu_{i+2}}{y_{i+2}} + \frac{\mu_{i+3}}{y_{i+3}} \tag{9}$$

виникає ситуація $y_{i+1} = y_{i+3}$, тоді потрібно виконати у відповідності до ТНМ таку операцію $\theta = \max(\mu_{i+1}; \mu_{i+3})$, і тоді вираз (9) запишеться як

$$\frac{\mu_i}{y_i} + \frac{\theta}{y_{i+1}} + \frac{\mu_{i+2}}{y_{i+2}}.$$

Зауваження 4. Нечітка множина у випадку опуклості і неперервності функції $\mu(x)$ (функції трикутного і гауссового виду опуклі) задовольняє означенню нечіткого числа [2].

Зауваження 5. Перетворення f може задаватись аналітичним чином або виконуватись за допомогою розрахункових засобів, використовуючи відповідні програми, або необхідні комплекси програм.

1.3. Етап дефазифікації

Сутність етапу дефазифікації полягає в перетворені нечіткої величини Y в чітке число Y^{def} за допомогою, наприклад, правилу середнього центру [2]:

$$Y^{def} = \sum_{i=0}^{2N} \mu_i \, y_i \Big/ \sum_{i=0}^{2N} \mu_i \,, \tag{10}$$

або за правилом, яке запропонував Б. Лю [3]:

$$Y^{def} = \sum_{i=0}^{2N} w_i \, y_i \,, \tag{11}$$

де вагові коефіцієнти визначаються як

$$w_i = w_i(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m); m = 2N-1; \; \mu_0 = \mu_{2N} = 0;$$

$$w_1 = \frac{1}{2}(\mu_1 + A_0 - B_0),$$

$$w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0), \text{ для } 2 \le i \le m-1;$$

$$w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m),$$

де $A_0 = \max\limits_{1 \le j \le m}\{\mu_j\}$; $B_0 = \max\limits_{1 < j \le m}\{\mu_j\}$; $C_0 = \max\limits_{1 \le j \le i}\{\mu_j\}$; $D_0 = \max\limits_{1 \le j < i}\{\mu_j\}$; $S_0 = \max\limits_{1 < j \le m}\{\mu_j\}$; $Q_0 = \max\limits_{i \le j \le m}\{\mu_j\}$; $P_0 = \max\limits_{i \le j < m}\{\mu_j\}$.

2. Результати моделювання

2.1. Проектування ферми

Розглянемо оптимальне проектування 4-х елементної ферми з двома нечіткими навантаженнями (рис. 3). Нехай $P_1 \approx 2$ кН, $P_2 \approx 2$ кН. Позначимо через P вектор навантаження $P = \{P_1, P_2\}$. Довжини елементів задаються як $l_1 = 1000\sqrt{2}$ мм, $l_2 = l_3 = 1000$ мм, $l_4 = 500\sqrt{2}$ мм. Модуль пружності E дорівнює 207кН/мм^2, границю моменту опору взято $R_0 = 0{,}15 кН/мм^2$ для розтягнутих елементів. Для стиснутих елементів $\varphi_{\min} R_0$, де $\varphi_{\min}$ – коефіцієнт поздовжнього прогину. В числових розрахунках взято $\varphi_{\min} = 2/3$. Задача оптимізації полягає у визначені такого вектора перерізів $F = \{F_i\}$; $i = 1,2,3,4$ елементів ферми, який задовольняє умовам міцності та жорсткості і забезпечує мінімальне значення обсягу матеріалу, тобто

$$\{F_i^*\} = \arg\left\{ \min_{F_i} \sum_{i=1}^{4} l_i F_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{4} \frac{D_i}{F_i} \le [y]; \sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \le R_i^* \right\}, \tag{12}$$

де $D_i = \dfrac{N_i \bar{N}_{i1} l_i}{E}$; $R_i^* = \begin{cases} R_0, N_i > 0 \\ \varphi_{\min} R_0, N_i < 0 \end{cases}$.

Зусилля N_i визначаються за формулою $N = BP$; $N = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$.

Визначення $\bar{N}$ виконується при $P = (1,0)$. Матриця перетворення сил в цьому прикладі є

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Нехай нечітке навантаження визначається функцією належності трикутного виду (5), а $P_1(1,2,3)_\Delta$, $P_2(1,2,4)_\Delta$. Нечіткість розкиду границь $[a,b]$ від моди m даних досягає 50% і 100%. Виконавши процедуру, яка описана вище, отримаємо $V_{opt}^{def} = 397011 мм^3$, що на 52.8% більше, ніж при детермінованому підході ($V_{opt}^{\det} = 259903 мм^3$). Процедура оптимізації перетинів виконана на основі динамічного програмування [4].

2.2. Проектування балки

Проектування балки, яка закріплена жорстко одним кінцем і шарнірно оперта іншим [5].

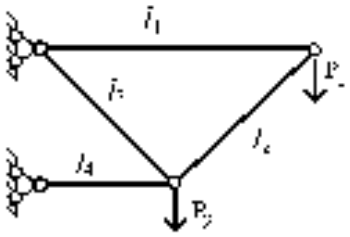

Рис. 3. Розрахункова схема ферми

Рис.4. Розрахункова схема балки

Визначити найбільший згинальний момент $M^P{}_{\max}$ під навантаженням і знайти реактивний момент M_R при $l = 5$ м і нечітких даних $P \cong$ (близько до числа 10^4) H. Виконуючі фазифікацію нечітких величин шляхом уведення функції належності, нехай ця функція буде для c трикутного виду з носієм $c = (1.5;2;2.5)_\Delta$ $м$. Для P узято функцію належності гауссового виду (7) з $m_p = 10^4$ H, $\sigma = 2.5 \cdot 10^3$ H. Застосовуючи процедуру, що наведено вище, отримаємо при кількості дискретів $M = 50$ такі значення моментів: $M_R{}^{\det} = -8979$ $H \cdot м$, $M^P{}_{\max}{}^{\det} = 8236$ $H \cdot м$ (на 1.5 % менше від розв'язання при детермінованих даних)

При цьому для детермінованих (чітких) даних $P = 10^4$ H, $c = 2$ $м$ маємо $M_R{}^{\det} = -8400$ $H \cdot м$; $M^P{}_{\max}{}^{\det} = 8640$ $H \cdot м$. Число статистичних випробувань $N = 10^4$.Результати експериментів представлено в табл. 1.

В стовпці 2. показано відхилення параметрів c і P від модального значення у відсотках (%). В стовпчиках 4 і 6 показано відхилення результатів M_R і M_u (в %) у нечіткому випадку від результатів, отриманих при чітких даних. В стовпцях 3 і 5 подано дефазифіковані результати щодо нечітких множин M_R і M_u, які відповідно, описують реактивний момент і момент згинальний. При $m_c = 2$ і $m_p = 10^4$ і $\sigma = 0$ отримуємо результат розв'язання при чітких даних.

На рис. 5 подано графічне уявлення залежності впливу нечіткості на фактори M_u та M_R: із збільшенням розкиду параметрів нечіткості σ, a_c, b_c збільшується за модулем значення реактивного моменту (2) та зменшується значення згинального моменту (1).

Таблиця 1

Реакція результатів розрахунку реактивного моменту і згинального моменту від степеню нечіткості завдання вихідних даних.

Вихідні данні $m_c = 2\ м$, $m_p = 10^4\ Н$		%	Результат M_R $(Н \cdot м)$	%	Результат M_u $(Н \cdot м)$	%
	1	2	3	4	5	6
1	$a_c = 2; b_c = 2; \sigma = 0$	0	-8400	0	8640	0
2	$a_c = 1.9; b_c = 2.1; \sigma = 500$	5	-8528	1.5	8595	0.52
3	$a_c = 1.8; b_c = 2.2; \sigma = 1000$	10	-8650	2.98	8531	1.26
4	$a_c = 1.7; b_c = 2.3; \sigma = 1500$	15	-8766	4.36	8450	2.2
5	$a_c = 1.6; b_c = 2.4; \sigma = 2000$	20	-8876	5.67	8352	3.3
6	$a_c = 1.5; b_c = 2.5; \sigma = 2500$	25	-8979	6.89	8236	4.68

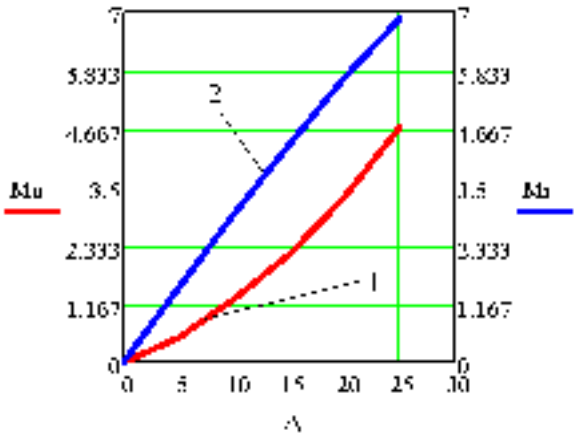

Рис. 5. Залежність впливу % розкиду $\Delta = m - a$ і $\Delta = b - m$ початкових даних на % відхилення дефазифікованих значень моментів M_R і M_u

2.3. Оцінка довжини крайової тріщини від нечітко заданого ресурсу в задачі про довговічність від утоми розтягнутої панелі

Розглядається смуга, як елемент конструкції, яка зазнає циклічного навантаження осьового розтягнення. Нехай в початковий момент ($t = 0$) існує крайова тріщина відкритого розриву з первісною довжиною a_0. Під дією зовнішнього навантаження $\sigma(t)$ відбувається сталий (стабільний) розвиток тріщини, який описується рівнянням Периса [5]:

$$\frac{da}{dN} = f(a, \sigma), \tag{10}$$

де a – характеристика розміру (довжини) тріщини; N – число циклів навантаження. Умова відмовлення, що означає перехід конструкції в непрацездатний стан, має вид:

$$a\Big|_{N=N^*} = a_*. \tag{11}$$

Величина a_* – визначається за умови початку катастрофічного росту тріщини, тобто

$$K_{\max} = K_{IC}, \tag{12}$$

де K_{IC} – в'язкість руйнування при плоскому деформуванні. Якщо розв'язати рівняння Периса, отримаємо таку залежність числа циклів від початкового розміру тріщини [6, 7]:

$$N^* = \frac{2}{\beta(2-n)}\left(\sqrt{a_*^{2-n}} - \sqrt{a_0^{2-n}}\right), \tag{13}$$

де $\beta = A(1.12\sqrt{\pi}\Delta\sigma)^n$; n, A – задані характеристики матеріалу.

$$a_* = \left(\frac{K_{IC}}{1.12\sqrt{\pi\sigma_{\max}}} \right)^2 . \qquad (14)$$

Із співвідношень (13)-(14) виразимо a_0 через задану кількість циклів N^*:

$$a_0 = \left[\sqrt{a_*^{2-n}} - \frac{1}{2} NA(1.12\sqrt{\pi}\sigma)^n (2-n) \right]^{\frac{2}{2-n}} .$$

Нехай величина N^* задається нечітким чином: "приблизно N^*". Ставиться таке питання: а який початковий розмір тріщини a_0 буде в цьому випадку? Для числового розрахунку було взято нечітку величину з трикутною функцією належності $N(6\cdot 10^4, 10\cdot 10^4, 14\cdot 10^4)_\Delta$ циклів. В цьому випадку розкид нечіткої величини буде 40%.

Якщо застосувати описану вище процедуру, отримаємо $a_0^{def} = 48.14$ мм. При детермінованому підході ($N = 10\cdot 10^4$) маємо $a_0^{det} = 60.1$ мм. Порівнюючи a_0^{def} із a_0^{det} бачимо, що уведення до розгляду нечіткого опису призводить до зменшення початкового розміру тріщини на 20% від детермінованого розв'язку. Обчислення проводилось при $l = 5$ м; $m_P = 10^4$; $A = 3.55\cdot 10^{-13}$; $n = 2.95$; $K_{IC} = 5300 H\cdot мм^{1/2}$; $\sigma = \sigma^{\max} - \sigma^{\min} = 145 H/мм^2$ [7].

Висновки

На прикладі задач аналізу і оптимального проектування будівельної механіки конструкцій розглянуто застосування основних понять теорії нечітких множин. Наводяться етапи нечіткого моделювання та числові розв'язки.

Список використаної літератури

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1971. – 255 с.
2. Рутковская Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы / Д. Рутковская, М. Пилинский, Л. Рутковский. – М.:Горячая линия-Телеком, 2008. – 383 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределённого программирования / Б. Лю. – М.: Бином и лаборатория знаний, 2005. – 416 с.
4. Бараненко В.А. Динамическое программирование и последовательные приближения / В.А. Бараненко // Придніпровський науковий журнал. Серія: Фізико-математичні науки. – 1998. – №12 (179). – С. 38-44
5. Тимошенко С. Сопротивление материалов. Т.1 / С. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.
6. Броек Д. Основы механики разрушения / Д. Броек – М.: Высшая школа, 1980. – 368 с.
7. Партон В.З. Механика разрушения / В.З. Партон. – М.: Наука, 1990 – 240 с.