УДК 519.6

О.Ю. ЛІСІНА, Т.С. ВАСИЛЬЧУК
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

МОДЕЛЮВАННЯ РЕЖИМІВ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ТЕПЛОВИХ ПОЛІВ БЕЗСІТКОВИМИ МЕТОДАМИ

Об'єктом дослідження роботи є нестаціонарні теплові поля з зовнішньої нелинейностью. Предметом дослідження є математична модель двомірної нестаціонарної задачі теплопровідності і методи дослідження цієї моделі. Мета полягає в моделюванні та аналізі теплових режимів систем безсітковими методами. Дана стаття присвячена моделюванню та аналізу теплових полів за допомогою безсіткових методів. Були досліджені двовимірні нестаціонарні теплові поля з зовнішньої нелінійністю, проведено аналіз систем безсітковими методами. На підставі проведених числових експериментів було зроблено порівняльний аналіз числових результатів щодо використання різних базисних функцій – радіальних базисних функцій (РБФ) та атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) . Також у процесі виконання великої кількості розрахунків встановлено, що збільшення щільності розташування координатних точок в області приводить до найкращого числового результата, що підтверджується зменшенням обчислювальної похибки.

Ключові слова: безсіткові методи, радіально-базисні функції, атомарні радіальні базисні функції, задача теплопровідності, нелінійні граничні умови

О.Ю. ЛИСИНА, Т.С. ВАСИЛЬЧУК
Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЖИМОВ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ БЕССЕТОЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Объектом исследования работы являются нестационарные тепловые поля с внешней нелинейностью. Предметом исследования является математическая модель двухмерной нестационарной задачи теплопроводности и методы исследования этой модели. Цель заключается в моделирование и анализ тепловых режимов систем бессеточными методами. Данная статья посвящена моделированию и анализу тепловых полей с помощью бессеточных методов. Были исследованы двумерные нестационарные тепловые поля с внешней нелинейностью, проведен анализ систем бессеточными методами. На основании проведенных численных экспериментов был сделан сравнительный анализ результатов при использовании различных базисных функций - радиальных базисных функций (РБФ) и атомарных радиальных базисных функций (АРБФ). Также в процессе выполнения большого количества расчетов установлено, что увеличение плотности расположения координатных точек в области приводит к наилучшему численному результату, что подтверждается уменьшением вычислительной погрешности.

Ключевые слова: бессеточные методы, радиально-базисные функции, атомарные радиальные базисне функции, задача теплопроводности, нелинейные граничные условия.

O.LISINA, T. VASILCHUK
V.N. Karazin Kharkiv National University

MODELING OF NONLINEARITY MODES IN THE STUDY OF THERMAL FIELDS WITH MESHFREE METHODS

The object of the study of the presented work are two-dimensional nonstationary thermal fields with external nonlinearity. The subject of the study is a mathematical model of the two-dimensional nonstationary heat conduction problem and the methods of investigating this model. The aim of the paper is to simulate and study thermal fields using the meshless approaches to solving the boundary value problems of mathematical physics using radial-basis and atomic radial basis functions. In the course of the work, two-dimensional unsteady thermal fields with external nonlinearity were investigated, a computational analysis was carried out with the aim of approbation of the possibilities of using meshless methods in conditions of using a different basis. This article is devoted to modeling and analysis of two-dimensional thermal fields with the help of numerical methods, oriented to use as a basic infinitely differentiable functions of a special kind. Functions are solutions of integral differential equations generated by operators of various kinds. In this paper, we used atomic radial basis functions, which are solutions of the equation with the Helmholtz operator. In addition, for comparison, radial-basis functions-Gauss, multiquadratic, inverse quadratic, inverse multiquadratic, were used in the numerical solution scheme. Thermal problems were solved with external nonlinearities in the initial conditions, boundary conditions, and also in a mixed *formulation. heat conduction problems in multiply connected regions are investigated and solved. Based on the numerical experiments carried out, a comparative analysis of the results was made using various basic functions, radial basis functions and atomic radial basis functions. An estimate of the approximate calculation of basis functions was taken into account. A computational experiment on the use of a basis in different approximations was carried out. Also, in the process of performing a large number of calculations, it was found that an increase in the density of the location of coordinate points in the region leads to the best numerical result, which is confirmed by a decrease in the computational error.*

Keywords: meshless methods, radial basis functions, atomic radial basis functions, heattransfer problem, nonlinear boundary conditions.

Постановка проблеми

За останні роки істотно розширилась сфера дослідження явищ теплообміну. У даний час процес теплообміну досліджують за допомогою чисельного моделювання. Математичне моделювання підтримується різноманітними комп'ютерними системами і додатками, пакетами прикладних програм.

Велику роль при проектуванні теплотехніки грає тепловий аналіз, а сама розподіл температур, тепловий потік та температурний градієнт.

Завдяки прогресу в розвитку аналітичних методів в теорії теплопровідності твердих тіл і збільшенні потужності сучасних обчислювальних машин, стало можливим те, що у наш час теоретичне дослідження процесів теплопровідності в значній мірі базується на числовому моделюванні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вивчення нелінійних математичних моделей різних фізико-хімічних явищ і процесів є одним з актуальних напрямків. Саме використання в сучасній фізиці і техніці впливів на речовини електричних полів великої інтенсивності, пучків частинок високої енергії, ударних хвиль високої інтенсивності, потужних теплових потоків, які обумовлені появою таких моделей. Лінійні математичні моделі є лише певними наближеннями при описі різних процесів. Їх можна використовувати в тих випадках, коли досліджувані фізичні величини в даному процесі змінюються не в дуже широкому діапазоні значень.

В основі нелінійних моделей лежать нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. Для них ще не розроблено закінченої теорії і загальних методів розв'язання задачі. Хоча для ряду нелінійних задач вдається знайти точні аналітичні розв'язки, аналіз властивостей яких дозволяє виявити якісно нові нелінійні ефекти в процесі, що досліджується. [2, 4, 5, 11].

Мета дослідження

Метою даної роботи є дослідження двовимірних нестаціонарних теплових полів за допомогою безсіткових методів розв'язання граничних задач математичної фізики з використанням базисних функцій спеціального виду.

Викладання основного матеріалу дослідження

Задача теплопровідності стає нелінійної, якщо будь-який елемент математичної моделі задачі стає нелінійним. Так, квазілінійне параболічне рівняння другого порядку лежать в основі математичних моделей різноманітних явищ і процесів в механіці, фізиці, біології, екології, технології та інших галузей знань.

Нелінійна задача теплопровідності може бути обумовлена нелінійністю граничної умови – це є завдання з зовнішньою нелінійністю. У таких задачах функція нелінійним чином залежить від температури, а нелінійне гранична умова на поверхні тіла представлена функцією, яка нелінійно залежить від температури. Нелінійність в граничних умовах обумовлена, частіше за всього, обліком променистого теплообміну на зовнішніх та внутрішніх границях [1, 3, 6].

Нелінійності можуть змінювати не тільки кількісні характеристики теплових процесів, але і якісну картину їх перебігу. Вони ускладнюють математичні моделі теплових процесів та потребують значно сложніших підходів до пошуку рішень задач.

Взагалі існує дуже багато різних методів для розв'язання диференціальних рівнянь. Наприклад, метод скінчених різниць (метод сіток), метод скінченних елементів, методи скінчених об'ємів та безсіткові методи.

Одним з головних факторів великої уваги до безсіткових методів є практична перевага у порівнянні з методами сіток при розв'язанні задач в складних областях. На відміну від методу сіток, в безсітокових методах область розв'язання задачі має рівномірно розподілені по області вузли, до яких "прив'язуються" базисні функції, тобто центр носія базисної функції, що має форму кола в 2D або кулі в 3D областях, поєднується з відповідним вузлом [9, 10].

Перспективність таких методів підтверджується при розв'язанні завдань, які є традиційно складними в разі застосування методів сіток. Практичні дослідження показують, що методи сіток важко застосовувати у ситуаціях, коли об'єкти, що розглядаються в задачах, представляють з себе набір дискретних фізичних об'єктів, або, коли завдання, які розв'язуються, зводяться до дослідження складних процесів, моделювання течії рідини в гідродинаміці, опису рівноважних і нерівноважних систем в термодинаміці. Ці методи також корисні для:

- моделювання, в якому створення сітки в тривимірному об'єкту зі складною геометрією може бути особливо складним або вимагає людської допомоги;
- моделювання, в якому вузли можуть бути створені або знищені, наприклад, при імітації злому;
- моделювання, при якому геометрія проблеми може переміщатися з положення з фіксованою сіткою, наприклад, при моделюванні згинання;
- моделювання, що включає нелінійну поведінку матеріалу, розриви або особливості.

Застосування атомарних радіальних базисних функцій (АРБФ) в численних алгоритмах розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних досліджувалися в роботах Колодяжного В.М. і Рвачева В.А., в яких була встановлена можливість досить точно апроксимувати розподілені дані без використання процедур перерахунку сітки. Увага до АРБФ з компактними носіями багато в чому обумовлена потребами практики при побудові ефективних обчислювальних алгоритмів, які є альтернативними методу скінченних елементів. Цим обумовлений інтерес до дослідження алгоритмів розв'язання задач теплопровідності із застосуванням в якості базисних атомарних функцій багатьох змінних [7, 8].

Математична постановка задачі про розповсюдження тепла у перерізі сталевої заготовки при нагріванні включає диференціальне рівняння теплопровідності:

$$pc\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

де c – залежність питомої теплоємності від температури, ρ – залежність щільності від температури, k – коефіцієнт зміни теплопровідності.

Початкові умови: $u(0,x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in(\Omega+\partial\Omega)=\overline{\Omega}$, граничні умови в загальному вигляді: $\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}=g(x,y,t)\big|_{\partial\Omega}$, $t>0$, де Ω – обмежена область із E^2, $\partial\Omega$ – границя області.

Розглянемо задачу, математична модель якої включає нелінійність у початковій умові:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=10;\\ u(0,\,x)=\sin(x);\\ u\big|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

де фізичні параметри дорівнюють одиниці; розрахункове значення щільності розподілення координатних точок області є $h=0.05$, а значення інтервалу часового шару $\tau=0.01\,c$.

Робоча область представлена на рис. 1.

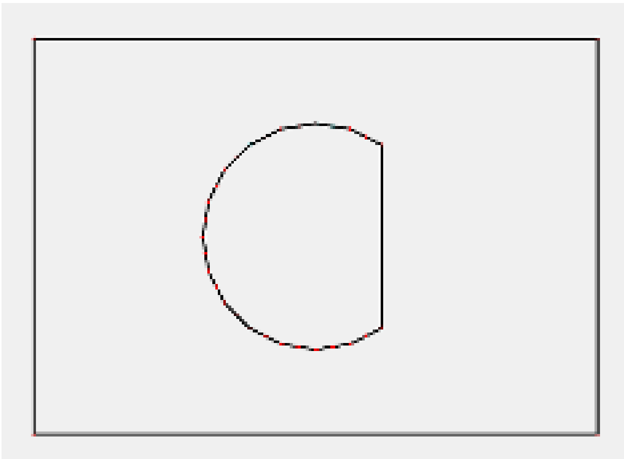

Рис. 1. Область розв'язання задачі.

На рис. 2 представлено візуалізацію розв'язка задачі на початковий момент часу.

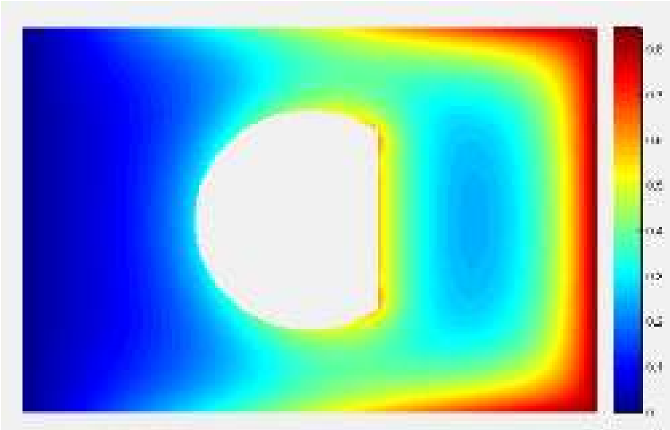

Рис. 2. Розподіл температури на першому кроці обчислювального експерименту.

У ході проведення обчислювального експерименту було виявлено, що збільшення щільності розподілення координатних точок області приводить до зменьшення обчислювальної похибки. Використання різних функцій у якості базисних демонструє значно кращій результат за умов використання атомарних радіальних базисних функцій. Нев'язки, які були отримані у ході розв'язання першої задачі представленні у табл. 1.

Таблиця 1

Щільність розподілення координатних точок області	**РБФ Гаусса**	**РБФ мульти-квадратична**	**РБФ обернена квадратична**	**РБФ обернена мульти-квадратична**	**АРБФ**
0,05	0.072407	0.064585	0.042332	0.050702	8.4384e-7
0,045	0.10089	0.12795	0.10305	0.11145	9.9091e-7
0,04	0.071373	0.05351	0.037319	0.041451	9.7188e-7
0,035	0.083787	0.077494	0.060373	0.065207	9.3244e-7
0,03	0.06483	0.057662	0.04085	0.047911	9.896e-7
0,025	0.1308	0.096469	0.086753	0.088321	9.6091e-7
0,02	0.073289	0.064678	0.047721	0.050832	9.9988e-7

Для задачі з нелінійностю у граничній умові:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 5; \\ u(0,\ x) = 0; \\ u\big|_{\partial\Omega} = \sin(x), \end{cases}$$

з використанням тих самих розрахункових значень для τ, h та робочої області з рис. 1 дає аналогічну картину розподілення обчислювальних похибок за умов використання різних базисів. Слід відмітити, що значення похибок за умов використання атомарних радільних базисних функцій дає стабільніший результат.

Ускладнимо математичну модель, та введемо нелінійності як у початкові умови, так і у граничні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 5; \\ u(0,\ x) = \exp(x); \\ u\big|_{\partial\Omega} = \exp(-x), \end{cases}$$

та розглянемо іншу робочу область (рис. 3).

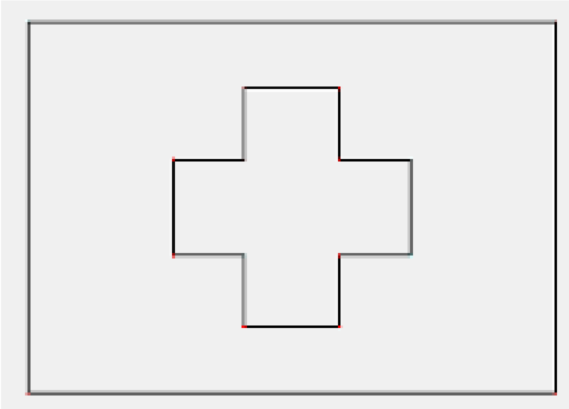

Рис. 3. Область розв'язання задачі

Були зроблені висновки, що вказані фактори не змінюють кардинально результат розрахунків. Нев'язки, які були отримані у ході розв'язання першої задачі, представленні у табл. 2.

Таблиця 2

Щільність розподілення координатних точок	РБФ Гаусса	РБФ мульти-квадратична	РБФ обернена квадратична	РБФ обернена мульти-квадратична	АРБФ
0,05	0.016698	0.01665	0.0134158	0.015535	9.4674e-7
0,045	0.019543	0.019414	0.017197	0.018055	9.4803e-7
0,04	0.023552	0.023543	0.021549	0.02209	9.9559e-7
0,035	0.019961	0.01992	0.018307	0.019039	9.3273e-7
0,03	0.014902	0.014749	0.013634	0.013956	9.9686e-7
0,025	0.021811	0.021849	0.020858	0.021105	9.9673e-7
0,02	0.020926	0.02093	0.019998	0.020142	9.8244e-7

Висновки

У статті досліджені особливості реалізації безсіткового методу розв'язання двовимірних крайових змішаних задач теплопровідності з зовнішньою нелінійністю, розв'язано двовимірні крайові змішані задачі теплопровідності в багатозв'язних областях з використанням безсіткового методу та АРБФ. Також було виконано порівняльний аналіз використання РБФ і АРБФ при реалізації процедури пошуку розв'язку двовимірної мішаної задачі теплопровідності. Встановлено джерела формування похибки при реалізації безсіткового методу на основі використання АРБФ при розв'язанні крайових задач теплопровідності.

Представлені в роботі безсіткові схеми розв'язання крайових задач теплопровідності: дозволяють розширювати можливості обчислювальних методів при дослідженні теплових процесів у складних машинобудівних конструкціях; спрощують процедуру розв'язання просторових задач теплопровідності для багатозв'язних областей; формують основу для дослідження теплових процесів у нелінійному середовищі.

Список використаної літератури

1. Березовская Л.М. Расчет нестационарного несимметричного температурного поля плоскослоистого нагревателя при нелинейных граничных условиях / Л.М.Березовская, В.М. Борзаковский, Ф.Ф. Леженин // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1982. – С.28-31.
2. Блесман А.И. Влияние температурного поля на срок службы изделий цилиндрической симметрии с защитными покрытиями / А.И. Блесман, Д.В. Постников, Д.А. Полонянкин, Е.А. Рогачев, Є.А. Ткаченко // Омский научный вестник. – 2014. – № 3 (133). – С. 25-28.
3. Буров И.С. Закономерности нагрева цилиндрического тела высокотемпературной гетерогенной струей / И.С. Буров, В.В. Голубев, А.Б. Демидович // ИФЖ. – 1989. – Т.56, № 6. – С. 970-974.
4. Геренштейн А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия: "Математическое моделирование и программирование". – 2008. – Вып. 1. – № 15 (115). – С. 9-11.
5. Де Лилло С. Решения нелинейной задачи теплопроводности на полупрямой / Де Лилло С., Д. Лупо, М. Соммакал // ТМФ. – 2007.

6. Житомирский И.С. Нестационарная задача теплопереноса в слоисто-вакуумной изоляции / И.С. Житомирский, А.М. Кислов, В.Г. Романенко // ИФЖ. – 1977. – Т.32, № 5. – С. 806-813.
7. Колодяжний В.М. Фінітні розв′язки функціонально–диференціальних рівнянь з частинними похідними / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2004. – № 5 – С. 17-22.
8. Колодяжний В.М. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лісіна // Доповіді НАН України. – 2011. – № 8. – С. 16-22.
9. Колодяжный В.М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В.М. Колодяжный, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 3. – С. 67-74.
10. Колодяжный В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М.Колодяжный, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 49-56.
11. Тимошпольский В.И. Математическое моделирование нелинейных процессов нагрева (противоточный теплообмен) в металлургии и машиностроении / В.И. Тимошпольский, Ю.С. Постольник, П.Э. Ратников, О.А. Кондрашова // ИФЖ. – 2008. – Т. 81. – № 1. – С. 108-116.