УДК 536.24

М.Г. БЕРДНИК
Національний технічний університет "Дніпровська політехніка"

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛООБМІНУ КОНУСА, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

Мета. Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в прямому круговому конусі з відомим рівнянням твірної лінії в циліндричній системи координат, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі Діріхле математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження розв'язків отриманої крайової задачі.

Методика. Використання відомих інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є, а також розробленого нового інтегрального перетворення для двовимірного кінцевого простору.

Результати. Знайдено нестаціонарне температурне поле в прямому круговому конусі, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла за умови, що теплофізичні властивості конуса є постійними, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура тіла є постійною, а на зовнішній поверхні конуса відомі значення температури.

Наукова новизна. Вперше побудована узагальнена просторова математична модель розрахунку температурних полів в прямому круговому конусі з відомим рівнянням твірної лінії в циліндричній системі координат, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості розповсюдження тепла у вигляді крайової задачі Діріхле для гіперболічного рівняння теплопровідності. В роботі побудовано інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в прямому круговому конусі у вигляді збіжних рядів по функціях Фур'є.

Практична значимість. Знайдено нестаціонарне температурне поле в прямому круговому конусі з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, що може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (в супутниках, сортопрокатних валках, роторах енергетичних агрегатів, дискових гальмах і ін.).

Ключові слова: комплексний ряд Фур'є, крайова задача Діріхле, інтегральне перетворення Лапласа, час релаксації

М.Г. БЕРДНИК
Национальный технический университет "Днепровская политехника"

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛООБМЕНА ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНУСА

Цель. Построение новой обобщенной пространственной математической модели расчета температурных полей в прямом круговом конусе с известным уравнением образующей линии в цилиндрической системе координат, вращающемся с постоянной угловой скоростью, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Дирихле математической физики для гиперболического уравнения теплопроводности, а также нахождение решений полученной краевой задачи.

Методика. Использование известных интегральных преобразований Лапласа, Фурье, а также разработанного нового интегрального преобразования для двумерного конечного пространства.

Результаты. Найдено нестационарное температурное поле в прямом круговом конусе, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла при условии, что теплофизические свойства конуса являются постоянными, а внутренние источники тепла отсутствуют. В начальный момент времени температура тела является постоянной, а на наружной поверхности тела известны значения температуры.

Научная новизна. Впервые построена обобщенная пространственная математическая модель расчета температурных полей в прямом круговом конусе с известным уравнением образующей линии в цилиндрической системе координат, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси OZ, с учетом конечной скорости распространения тепла в виде краевой задачи Дирихле для гиперболического уравнения теплопроводности. В работе построено интегральное преобразование для двумерного конечного пространства, с применением которого найдено температурное поле в прямом круговом конусе в виде сходящихся рядов по функциям Фурье.

Практическая значимость. Найденное нестационарное температурное поле в прямом круговом конусе с учетом конечной скорости распространения тепла может найти применение при моделировании *температурных полей, возникающих во многих технических системах (в спутниках, сортопрокатных валках, роторах энергетических агрегатов, дисковых тормозах и др.).*

Ключевые слова: комплексный ряд Фурье, краевая задача Дирихле, интегральное преобразование Лапласа, время релаксации.

M. G. BERDNYK
National Technical University "Dnipro Polytechnic"

MATHEMATICAL MODEL AND METHOD OF SOLUTION OF THE GENERALIZED PROBLEM OF HEAT EXCHANGE OF THE CONVENTION CAREED

Objective. Construction of a new generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in a straight circular cone with a known equation of a creature line in a cylindrical coordinate system that rotates with a constant angular velocity, taking into account the final rate of heat propagation in the form of the boundary value problem of Dirichlet of mathematical physics for the hyperbolic heat equation, as well finding solutions to the boundary value problem.

Method. The use of known integral transformations of Laplace, Fourier, and also the developed new integral transform for a two-dimensional finite space.

Results. A non-stationary temperature field in a straight circular cone is found which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the final rate of heat propagation, provided that the thermophysical properties of the body are constant and that internal heat sources are absent. At the initial moment, the temperature of the body is constant, and the temperature is known on the outer surface of the cone.

Scientific novelty. For the first time, a generalized spatial mathematical model for calculating temperature fields in a straight circular cone with a known equation of a creature line in a cylindrical coordinate system is constructed, which rotates with a constant angular velocity around the OZ axis, taking into account the finite rate of heat propagation in the form of the boundary-value Dirichlet problem for the hyperbolic heat equation. An integral transformation for a two-dimensional finite space was constructed, with the use of which a temperature field was found in a straight circular cone in the form of convergent series in Fourier functions.

Practical significance. A non-stationary temperature field in a direct circular cone is found, taking into account the final rate of heat propagation, which can be used in the simulation of temperature fields that occur in many technical systems (in satellites, roller mills, rotors of power aggregates, disk brakes, etc.).

Keywords: Fourier series complex, Dirichlet boundary value problem, Laplace integral transformation, relaxation time.

Постановка проблеми

Диски складної форми, які обертаються, є найважливішим елементом багатьох машин. Можливість отримання високих параметрів роботи таких машин визначається міцністю і довговічністю дисків. У більшості сучасних турбомашин диски працюють в умовах підвищеної навантаженості, що приводить до виникнення пластичних деформацій, де необхідно враховувати вплив високих температур і виникнення температурних напружень. Великий вплив на величину температурних напружень надає закон зміни температури по радіусу диска. Відомо, що заміна лінійного закону зміни температури по радіусу квадратичним законом може привести до істотного зростання окружних напружень. Тому достатня точність визначення температурного поля в розрахунках на міцність має принципове значення. Крім того, при великих швидкостях обертання вплив скінченності величини швидкості поширення тепла на теплообмін стає помітним [1–2]. Ось чому до числа проблем, що представляє великий теоретичний і практичний інтерес, відноситься проблема вивчення температурного поля в тілах обертання, які обертаються навколо своєї осі, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла

Анализ останніх досліджень і публікацій

Як показує огляд літератури теплообмін в тілах обертання, які обертаються, вивчений в даний час ще недостатньо [1]. В [1] показано, що чисельні методи дослідження нестаціонарних неосесиметричних задач теплообміну циліндра, якій обертаються, є не завжди ефективними, якщо мова йде про обчислення при великих швидкостях обертання.

В [1] доводиться, що умови стійкості обчислень в методах кінцевих елементів і кінцевих різниць, що застосовуються до розрахунку нестаціонарних неосесиметричних температурних полів циліндрів, які обертаються, визначаються аналогічними характеристиками. Ці умови мають вигляд:

$$1-2\frac{\Delta F_o}{\Delta\varphi^2}\geq 0 \quad \text{і} \quad \frac{1}{\Delta\varphi}-\frac{Pd}{2}\geq 0\,,$$

де F_0 – критерій Фур'є; Pd – критерій Предводітелева.

Якщо $Pd = 10^5$, що відповідає кутовій швидкості обертання металевого циліндра $\omega = 1{,}671\,сек^{-1}$ радіусом 100 мм, змінні $\Delta\varphi$ и ΔF_o повинні бути підпорядковані таким умовам:

$$\Delta\varphi \le 2\cdot 10^{-5} \qquad \text{і} \qquad \Delta F_o \le 2\cdot 10^{-10}.$$

Для рівномірно охолоджуваного циліндра за умови *Bi* = 5 (*Bi* – критерій Біо), час необхідний для того, щоб температура досягла 90% стаціонарного стану, дорівнює $Fo \approx 0.025$. Це означає, що потрібно принаймні здійснити $1.3\cdot 10^8$ операцій по часу для того, щоб було досягнуто стаціонарний розподіл температури.

Більш того, потрібно відзначити, що протягом одного циклу обчислень потрібно здійснити $3.14\cdot 10^5$ операцій, оскільки внутрішній стан у кільці характеризується $3.14\cdot 10^5$ точками. У результаті видно, що число обчислень, необхідних для отримання чисельного результату видається нереальним.

Тому, для вирішення крайових задач, які виникають при математичному моделюванні тривимірних нестаціонарних процесів теплообміну в прямому круговому конусі, який обертаються, будемо застосовувати інтегральні перетворення.

Мета дослідження

Побудова нової узагальненої просторової математичної моделі розрахунку температурних полів в *в прямому круговому конусі*, що обертається з постійною кутовою швидкістю, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічного рівняння теплопровідності, а також знаходження рішень отриманої крайової задачі.

Викладення основного матеріалу дослідження

Розглянемо розрахунок температурного поля прямого кругового конуса (рис.1) з твірною лінією $r = z\cdot \mathrm{tg}A$ у циліндричній системі координат (ρ,φ,z).

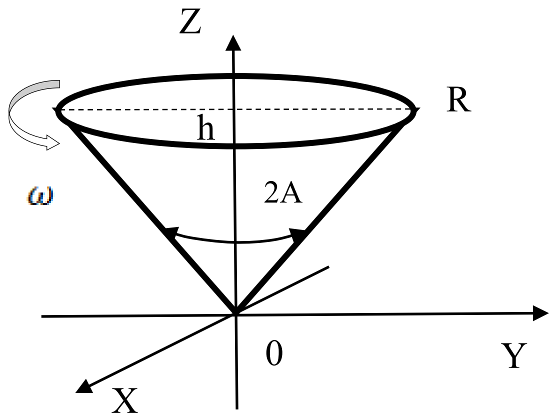

Рис. 1. Прямий круговий конус з рівнянням твірною лінією $r = z\cdot \mathrm{tg}A$.

Конус обертається навколо осі *OZ* з постійною кутовою швидкістю ω а швидкість поширення тепла є відомою величиною. Теплофізичні властивості тіла не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні. У початковий момент часу температура циліндра є постійною G_0, а на бічній поверхні циліндра температура відома і не залежить від часу $V(\varphi,z)$. На основі конуса (при *z*=*h*) відомі значення температури $G(r,\varphi)$.

В [1] отримано узагальнене рівняння переносу енергії для рушійного елемента суцільного середовища, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла. Згідно [1] узагальнене рівняння балансу енергії твердого тіла, яке обертається, з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі *OZ*, теплофізичні властивості якого не залежать від температури, а внутрішні джерела тепла відсутні, в циліндричній системи координат приймає вигляд:

$$\gamma\, \mathrm{c}\left\{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{t}} + \omega\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \tau_r\left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi\partial t}\right]\right\} = \lambda\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right], \tag{1}$$

де γ – щільність середовища; *c* – питома теплоємність; $T(\rho,\varphi,z,t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; *t* – час; τ_r – час релаксації.

Математично задача визначення температурного поля циліндра складається в інтегруванні диференціального рівняння теплопровідності (1) в області

$D=\{(\rho,\varphi,z,t)|\rho\in(0,z),\varphi\in(0,2\pi),\mathrm{z}\in(0,1),\mathrm{t}\in(0,\infty)\}$, що з урахуванням прийнятих допущень запишеться у виді:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\omega\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+\tau_r\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\tau_r\omega\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\varphi^2}+\chi\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right] \tag{2}$$

з початковими умовами

$$\theta(\rho,\varphi,z,0)=0,\quad \frac{\partial\theta(\rho,\varphi,z,0)}{\partial t}=0 \tag{3}$$

і граничними умовами

$$\theta(z,\varphi,z,t)=G(\varphi,z), \tag{4}$$

$$\theta(\rho,\varphi,1,t)=\Lambda(\rho,\varphi), \tag{5}$$

де $\theta=\frac{T(\rho,\varphi,z,t)-G_0}{T_{\max}-G_0}$ – відносна температура тіла; $a=\frac{\lambda}{c\gamma}$ – коефіцієнт температуропровідності; $T_{\max}=\max\limits_{r,\varphi,z}\{V(\varphi,z),\ G(r,\varphi)\}$; $\chi=\left(\frac{R}{h}\right)^2$; $\rho=\frac{r}{R}$; $z=\frac{z}{h}$; $G(\varphi,z),\Lambda(\rho,\varphi)\in \mathrm{C}(0,2\pi)$.Тоді розв'язок крайової задачі (2)-(5) $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ є двічі неперервно диференційованим по ρ і φ, z, один раз по t в області D і неперервним на $\overline{D}$ [3], тобто $\theta(\rho,\varphi,z,t)\in C^{2,1}(D)\cap C(\overline{D})$, а функції $G(\varphi,z)$, $\Lambda(\rho,\varphi)$, $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ можуть бути розкладені в комплексний ряд Фур'є [3]:

$$\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Lambda(\rho,\varphi)\end{Bmatrix}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ G_n(z)\\ \Lambda_n(\rho)\end{Bmatrix}\cdot\exp(in\varphi), \tag{6}$$

де

$$\begin{Bmatrix}\theta_n(\rho,z,t)\\ G_n(z)\\ \Lambda_n(\rho)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\theta(\rho,\varphi,z,t)\\ G(\varphi,z)\\ \Lambda(\rho,\varphi)\end{Bmatrix}\cdot\exp(-in\varphi)d\varphi,$$

$$\theta_n(\rho,z,t)=\theta_n^{(1)}(\rho,z,t)+i\theta_n^{(2)}(\rho,z,t),\ \ \mathrm{G}_n(z)=G_n^{(1)}(z)+iG_n^{(2)}(z),\quad \Lambda_n(\rho)=\Lambda_n^{(1)}(\rho)+i\Lambda_n^{(2)}(\rho).$$

З огляду на те, що $\theta(\rho,\varphi,z,t)$ функція дійсна, обмежимося надалі розглядом $\theta_n(\rho,z,t)$ для n=0,1,2,…, тому що $\theta_n(\rho,z,t)$ і $\theta_{-n}(\rho,z,t)$ будуть комплексно спряженими [3-4]. Підставляючи значення функцій з (6) у (2)-(5), у результаті одержимо систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial t}+\vartheta_n^{(i)}\theta_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial t^2}+\tau_r\vartheta_n^{(i)}\frac{\partial\theta_n^{(m_i)}}{\partial t}=\frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\theta_n^{(i)}+\chi\frac{\partial^2\theta_n^{(i)}}{\partial z^2}\right] \tag{7}$$

з початковими умовами:

$$\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)=0,\qquad \frac{\partial\theta_n^{(i)}(\rho,z,0)}{\partial t}=0 \tag{8}$$

і граничними умовами:

$$\theta_n^{(i)}(z,z,t)=G_n^{(i)}(z) \tag{9}$$

$$\theta_n^{(i)}(\rho,1,t)=\Lambda_n^{(i)}(\rho), \tag{10}$$

де $\vartheta_n^{(1)}=-\omega n$; $\vartheta_n^2=\omega n$; $m_1=2$, $m_2=1$; i=1, 2.

Для розв'язання крайової задачі (7)-(10) застосовуємо інтегральне перетворення:

$$\bar{f}(\mu_{n,k})=\iint\limits_{\mathrm{D}}Q(\mu_{n,k},\rho,z)\cdot\rho\cdot\mathrm{f}(\rho,z)d\sigma \tag{11}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},\rho,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ знаходяться з розв'язку задачі:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial Q}{\partial \rho}-\frac{n^2}{\rho^2}Q+\mu^2{}_{n,k}\cdot Q+\chi\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}=0 \tag{12}$$

$$\mathrm{Q}(\mu_{n,k},\rho,0)=0,\ \ Q(\mu_{n,k},\rho,1)=0,\ \ Q(\mu_{n,k},z,z)=0. \tag{13}$$

Власні функції $Q(\mu_{n,k},\rho,z)$ і власні значення $\mu_{n,k}$ (12)–(13) знаходяться за формулами, які приведені в [5], а формула оберненого перетворення має вигляд:

$$\mathrm{f}(\rho,z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\left\|Q(\mu_{n,k},\rho,z)\right\|^2}\bar{f}(\mu_{n,k})\cdot \tag{14}$$

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (7) інтегральне перетворення (11). В результаті одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t}+\vartheta_n^{(i)}\left[\overline{\theta}_n^{(m_i)}+\tau_r\frac{d\overline{\theta}_n^{(m_i)}}{d\,t}\right]+\tau_r\frac{d^2\overline{\theta}_n^{(i)}}{d\,t^2}=\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}-\mu_{n,k}^2\overline{\theta}_n^{(i)} \tag{15}$$

з початковими умовами:

$$\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)=0, \qquad \frac{\partial\overline{\theta}_n^{(i)}(\mu_{n,k},t)}{\partial t}=0\,, \tag{16}$$

де $\Omega_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}=-\int\limits_0^1 z\frac{\partial Q(\mu_n,\xi(z),z)}{\partial\rho}G_n^{(i)}(z)dz+\chi\oint\limits_L\rho\left(Q(\mu_{n,k},\rho,z)\frac{\partial\theta_n^{(i)}}{\partial z}-\theta_n^{(i)}\frac{\partial Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\partial z}\right)d\rho\,.$

Криволінійний інтеграл обчислюється по замкнутому додатно орієнтованому контуру (рис. 2.).

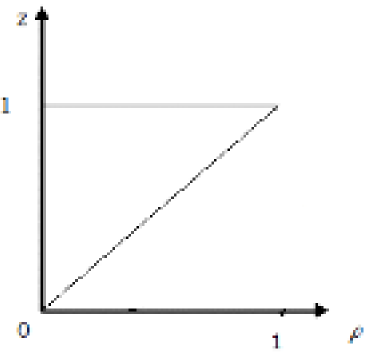

Рис. 2. Замкнутий контур з твірною лінією $\rho = z$.

Застосовуємо до системи диференціальних рівнянь (15) з початковими умовами (16) інтегральне перетворення Лапласа[4]:

$$\widetilde{f}(s)=\int\limits_0^{\infty}f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

В результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно $\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}$:

$$s\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}+\vartheta_n^{(i)}\left(\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}+\tau_r s\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(m_i)}\right)+\tau_r s^2\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=q_{n,k}\left(\frac{\widetilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(\mathrm{i})}}{\mu^2{}_{n,k}}-\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}\right) \tag{17}$$

де i=1, 2; $q_{n,k}=\dfrac{a}{R^2}\,\mu^2{}_{n,k}$.

Розв’язавши систему рівнянь (17), одержуємо:

$$\widetilde{\overline{\theta}}_n^{(i)}=\alpha_{n,k}\frac{\widetilde{\Omega}_{n,k}^{(i)}\left(\tau_r s^2+s+\ q_{n,k}\ \right)+(-1)^{i+1}\omega n\widetilde{\Omega}_{n,k}^{(m_i)}(1+s\tau_r)}{\left(\tau_r s^2+s+\ q_{n,k}\ \right)^2+\omega^2 n^2(1+s\tau_r)^2}, \tag{18}$$

де $\alpha_{n,k} = \dfrac{a}{R^2}$; (i=1, 2).

Застосовуючи до зображення функцій (18) формули оберненого перетворення Лапласа одержуємо оригінали функцій:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right)\\ +\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\big]+\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right),\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t) = \sum_{j=1}^{2}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)+\tau_r\omega ni\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[\tau_r\omega n-(2\tau_r s_j+1)i\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right)\\ +\sum_{j=3}^{4}\zeta_{n,k}(s_j)\cdot\Big\{\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(2)}(s_j)\cdot\big[(2\tau_r s_j+1)-\tau_r\omega ni\big]-\tilde{\Omega}_{\mathrm{n,k}}^{(1)}(s_j)\cdot\big[\tau_r\omega n+(2\tau_r s_j+1)i\big]\Big\}\cdot\left(e^{s_j t}-1\right),\end{aligned} \quad (20)$$

де $\zeta_{n,k}(s_j) = \dfrac{0.5 s_j^{-1}\alpha_{n,k}}{(2\tau_r s_j+1)^2+(\tau_r\omega n)^2}$, а значення s_j для j=1, 2, 3, 4 визначаються за формулами:

$$s_{1,2} = \frac{(\tau_r\omega ni-1)\pm\sqrt{(1+\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r},\ s_{,3,4} = \frac{(\tau_r\omega ni+1)\pm\sqrt{(1-\tau_r\omega ni)^2-4\tau_r q_{n,k}}}{2\tau_r}.$$

Таким чином, з урахуванням формул обернених перетворень (6) і (14), одержуємо температурне поле у прямому круговому конусі, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо осі OZ, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла:

$$\theta(\rho,\varphi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left[\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)+i\cdot\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)\right]\frac{Q(\mu_{n,k},\rho,z)}{\|Q(\mu_{n,k},\rho,z)\|^2}\right\}\cdot\exp(in\varphi),$$

де значення $\bar{\theta}_n^{(1)}(\mu_{n,k},t)$ і $\bar{\theta}_n^{(2)}(\mu_{n,k},t)$ визначаються по формулам (19), (20).

Висновки

Вперше побудована математична модель розрахунку полів температури у в прямому круговому конусі, з урахуванням кінцевої швидкості поширення тепла, який обертається, у вигляді крайової задачі математичної фізики для гіперболічних рівнянь теплопровідності з граничними умовами Діріхле. Побудовано інтегральне перетворення для двовимірного кінцевого простору, із застосуванням якого знайдено температурне поле в прямому круговому конусі у вигляді збіжних рядів по функціям Фур'є. Знайдений розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну конуса, який обертається, з урахуванням скінченності величини швидкості поширення тепла може знайти застосування при моделюванні температурних полів, які виникають у багатьох технічних системах (супутниках, роторах енергетичних агрегатів, дискових гальмах та ін).

Список використаної літератури

1. Бердник М.Г. Аналітичний розв'язок узагальненої крайової задачі теплообміну циліндра, який обертається / М.Г. Бердник // МАТЕМАТИЧНІ МАШИНИ І СИСТЕМИ. – 2015. – № 4. – С. 117-123.
2. Конет І.М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Львів, 2011. – 48 с. – (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; 01.11).
3. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики / Б.М. Маркович. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 384 с.
4. Лопушанська Г.П. Перетворення Фур'є, Лапласа: узагальнення та застосування / Г.П. Лопушанська, А.О. Лопушанський, О.М. М'яус. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2014. – 152 с.
5. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. – М.: Наука, 1989. – 288 с.