УДК 517.944

С.Г. БЛАЖЕВСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА У ДВОШАРОВОМУ СИМЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в двошаровому симетричному просторі математично приводить до побудови обмеженого розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності В-параболічного типу за початковими умовами та умовами неідеального термічного контакту.

Методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності у двошаровому симетричному просторі.

Проведено аналіз найбільш вживаного на практиці випадку для двошарового осесиметричного тіла.

Ключові слова:інтегральне перетворення, рівняння теплопровідності, крайова задача.

С.Г. БЛАЖЕВСКИЙ
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ ТЕПЛА В ДВУХСЛОЙНОМ СИММЕТРИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Задача о структуре нестационарного температурного поля в двухслойном симметричном пространстве математически приводит к построению ограниченного решения сепаратной системы дифференциальных уравнений теплопроводности В-параболического типа с начальными условиями и условиями неидеального теплового контакта.

Методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя получено интегральное представление точного аналитического решения нестационарной задачи теплопроводности в двухслойном симметричном пространстве.

Проведен анализ наиболее употребляемого на практике случая для двухслойного осесимметричного тела.

Ключевые слова: интегральное преобразование, уравнение теплопроводности, краевая задача.

S.G. BLAZHEVSKIY
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

MODELING OF THE PROCESS OF HEAT DIFFUSION IN TWO-LAYER SYMMETRIC SPACE

Integral representation of the exact analytical solution of the non-stationary heat conduction problem in a two-layer symmetric space is obtained by the method of Fourier-Bessel integral transform.

The research of diffusion processes in the environment is constantly attracting attention. Serious researches began with the simplest model - differential equation of diffusion (heat conduction) under the corresponding initial and boundary conditions. Different analytical, numerical and analytical-numerical methods of finding the solution are developed. One of the effective methods for solving the problem of diffusion is the method of integral transforms such as Fourier, Bessel, Weber.

This paper is devoted to the simulation of the heat conduction process for a two-layer symmetric space. The problem of the structure of a non-stationary temperature field in a two-layer symmetric space mathematically leads to the construction of a bounded solution of a separate system of two heat-conductivity equations of the B-parabolic type with the initial conditions and conditions of non-ideal thermal contact. The solution of the problem is constructed by the method of the Fourier-Bessel hybrid integral transform on the polar axis.

A straight integral Fourier-Bessel transform on the polar axis with one point of conjugation is written in the form of a matrix row. The output system and the initial conditions are written in a matrix form and we apply the operator matrix row to the given problem by the rule of multiplication of matrices. As a result we obtain the Cauchy problem for the ordinary differential equation. We construct the solution of this problem using the Cauchy function method. The inverse Fourier-Bessel transform is written in the form of an operator matrix column and we apply it to the constructed solution of the Cauchy problem. As a result, we obtain unique bounded solution of the original problem which completely describes the structure of the non-stationary temperature field in a two-layer symmetric space.

The analysis of the most used case in practice for two-layer axisymmetric body has been carried out.

Keywords: integral transform, heat equation, boundary problem.

Постановка проблеми

Процеси дифузії, які постійно відбуваються в навколишньому середовищі, привертали до себе увагу протягом усієї історії розвитку суспільства. Але серйозні дослідження почалися з найпростішої моделі – диференціального рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial u^2}{\partial r^2} = f(t,r)$$

з відповідними початковими та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різного узагальнення даного рівняння. Слід відмітити появу в другій половині XX-го століття "Узагальненої термомеханіки", породженої гіперболічним рівнянням теплопровідності [2]. Розроблялися різні аналітичні, числові та аналітично-числові методи знаходження розв’язку.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

На особливу увагу заслуговує розроблений в другій половині XX-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик для вивчення технічного стану композитних матеріалів. Це привело навіть у випадку жорсткості межі області до диференціального рівняння з сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функцій та її похідних [3]. Інтегральне зображення точного аналітичного розв’язку задачі в цьому випадку одержати неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо для побудови розв’язку використовувати метод інтегральних перетворень типу Фур’є, Бесселя, Вебера.

Мета дослідження

Дана робота присвячена моделюванню процесу теплопровідності для двошарового симетричного простору.

Викладення основного матеріалу дослідження

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в двошаровому симетричному просторі математично приводить до побудови обмеженого в області

$$D_2^+ = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2 = (0, R_1) \cup (R_1, \infty)\}$$

розв’язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності B-параболічного типу [1]

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} - a_k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha_k + 1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)T_k(t,r) = f_k(t, r),\ r \in (R_{k-1}, R_k),\ k=1, 2, \quad (1)$$

за початковими умовами

$$T_k(t, r)|_{t=0} = g_k(r),\ r \in (R_{k-1}, R_k),\ R_0 = 0,\ R_2 = \infty,\ k = 1, 2, \quad (2)$$

та умовами неідеального термічного контакту [7]

$$\begin{cases} \left.\left[\left(b_1\frac{\partial}{\partial r} + 1\right)T_1(t,r) - T_2(t,r)\right]\right|_{r=R_1} = 0, \\ \left.\left(\lambda_1^*\frac{\partial T_1(t,r)}{\partial r} - \lambda_2^*\frac{\partial T_2(t,r)}{\partial r}\right)\right|_{r=R_1} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Розв’язок задачі (1)–(3) побудуємо методом гібридного інтегрального перетворення типу Фур’є-Бесселя на полярній осі [4, 5]. Пряме інтегральне перетворення Фур’є-Бесселя на полярній осі $r \ge 0$ з однією точкою спряження зобразимо у вигляді матриці рядка:

$$H_\alpha[\ldots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \cdots V_{(\alpha);1}(r,\lambda)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \quad \int_{R_1}^{R_2} \cdots V_{(\alpha);2}(r,\lambda)\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr\right], \quad (4)$$

$V_{(\alpha);\,k}$ – компоненти спектральної функції мають вигляд:

$$V_{(\alpha);1}(r,\lambda) = \frac{2}{\pi}\frac{\lambda_2^*}{\lambda^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}J_{\alpha_1,\alpha_1}(\lambda r), (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$V_{(\alpha);2}(r,\lambda) = \lambda[a_{(\alpha);12}(\lambda)J_{\alpha_2,\alpha_2}(\lambda r) - a_{(\alpha);11}(\lambda)N_{\alpha_2,\alpha_2}(\lambda r)],$$

σ_k – компоненти вагової функції:

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_1^2}\frac{\lambda_k^*}{\lambda_{k+1}^*}R_1^{2(\alpha_2-\alpha_1)},\ \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2}.$$

Запишемо систему (1) і початкові умови (2) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_1^2 B_{\alpha_1}\right)T_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2^2 B_{\alpha_2}\right)T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t,r) \\ f_2(t,r) \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_1(r) \\ g_2(r) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Тут B_α – диференціальний оператор:

$$B_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Застосуємо до задачі (5) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок [4]. Внаслідок основної тотожності гібридного перетворення диференціального оператора одержуємо задачу Коші [6]:

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} + \lambda^2\tilde{T}(t,\lambda) = \tilde{f}(t,\lambda);\quad \tilde{T}\Big|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda). \tag{6}$$

Тут прийняті позначення:

$$\tilde{T}(t,\lambda) = \sum_{k=1}^{2}\int_{R_{k-1}}^{R_k} T_k(t,r)V_{(\alpha);k}(r,\lambda)\sigma_k r^{2\alpha_k+1}dr,\ R_0 = 0,\ R_2 = \infty,$$

$$\tilde{f}(t,\lambda) = \sum_{k=1}^{2}\int_{R_{k-1}}^{R_k} f_k(t,r)V_{(\alpha);k}(r,\lambda)\sigma_k r^{2\alpha_k+1}dr,$$

$$\tilde{g}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2}\int_{R_{k-1}}^{R_k} g_k(r)V_{(\alpha);k}(r,\lambda)\sigma_k r^{2\alpha_k+1}dr.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (6) є функція

$$\tilde{T}(t,\lambda) = e^{-\lambda^2 t}\tilde{g}(\lambda) + \int_0^t e^{-(t-\tau)\lambda^2}\tilde{f}(\tau,\lambda)d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)}[\tilde{f}(\tau,\lambda) + \tilde{g}(\lambda)\delta_+(\tau)]d\tau. \tag{7}$$

У рівності (7) $\delta_+(t)$ – міра Дірака, зосереджена в точці $t = 0+$. Визначимо функції

$$G_j(t,r) = f_j(t,r) + g_j(r)\delta_+(t),\ j = 1, 2, \tag{8}$$

і функції впливу

$$H_{(\alpha);kj}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_{(\alpha);k}(r,\lambda)V_{(\alpha);j}(\rho,\lambda)\Omega_{(\alpha);n}(\lambda)d\lambda,\ k,j, = 1, 2, \tag{9}$$

породжені дією теплових джерел (або початкового температурного стану), неперервно розподілених на кожній ділянці двошарового простору.

Застосуємо до матриці-елемента $[\tilde{T}(t,\lambda)]$, де $\tilde{T}(t,\lambda)$ визначена формулою (7), обернене перетворення Фур'є-Бесселя:

$$H_{(\alpha)}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \cdots V_{(\alpha);1}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha);1}(\lambda)d\lambda & \int_0^\infty \cdots V_{(\alpha);2}(r,\lambda)\Omega_{(\alpha);2}(\lambda)d\lambda \end{bmatrix} \tag{10}$$

за правилом множення матриць. В результаті отримаємо функції:

$$T_j(t,r) = \sum_{k=1}^{2}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)G_k(\tau,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho d\tau \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{2}\left\{\int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)g_k(\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho +\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{(\alpha);jk}(t-\tau,r,\rho)f_k(\tau,\rho)\sigma_k\rho^{2\alpha_k+1}d\rho d\tau\right\}, R_0=0, R_2=\infty, j=1,2. \quad (11)$$

які є єдиним розв'язком задачі (1)–(3), а, отже, повністю описують структуру шуканого нестаціонарного температурного поля.

Для прикладу розглянемо двошаровий простір, що володіє осьовою симетрією й знаходиться в початковий момент часу при нульовій температурі ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $g_1(r) = g_2(r) = 0$). Припустимо, що в шарі $I_2 = \{r: r \in (R_1, \infty)\}$ теплові джерела відсутні ($f_2 = 0$), а в шарі $I_1 = \{r: r \in (0, R_1)\}$ густина теплових джерел [7]:

$$f_1(t,r) = \frac{T_0}{t_0}(I - B_t^{t_0})[tS_+(t)]f_{11}(r) \equiv$$

$$\equiv \frac{T_0}{t_0}[tS_+(t) - (t-t_0)S_+(t-t_0)]f_{11}(r) \underset{t\to 0}{\to} T_0 f_{11}(r). \quad (12)$$

У цьому випадку маємо (при $f_{11}(r) = 1$):

$$q_i = a_i^{-1}\lambda,\ i = 1, 2;\ k_\lambda = \left(\lambda_1^*\right)^{-1}\lambda_2^* = \text{const},$$

$$\sigma_1 = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*}\frac{1}{a_1^2},\ \sigma_2 = \frac{1}{a_2^2},$$

$$w_{01}(\lambda) = k_\lambda q_2 J_1(q_2R_1)(J_0(q_1R_1) - b_1q_1J_1(q_1R_1)) - q_1J_0(q_2R_1)J_1(q_1R_1);$$

$$w_{02}(\lambda) = k_\lambda q_2 N_1(q_2R_1)(J_0(q_1R_1) - b_1q_1J_1(q_1R_1)) - q_1N_0(q_2R_1)J_1(q_1R_1);$$

$$V_1(r,\lambda) = \frac{2k_\lambda}{\pi R_1}J_0(q_1r),\ w_0(\lambda) = w_{01}^2(\lambda) + w_{02}^2(\lambda),$$

$$V_2(r,\lambda) = w_{01}(\lambda)N_0(q_2r) - w_{02}(\lambda)J_0(q_2r);$$

$$H_{11}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_1(r,\lambda)V_1(\rho,\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{w_0(\lambda)};$$

$$H_{21}(t,r,\rho) = \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}V_2(r,\lambda)V_1(\rho,\lambda)\frac{\lambda d\lambda}{w_0(\lambda)};$$

$$T_1(t,r) = \frac{1}{k_\lambda}\int_0^t\int_0^{R_1}H_{11}(t-\tau,r,\rho)f_1(\tau,\rho)\rho d\rho d\tau =$$

$$= \frac{T_0}{t_0}(I - B_t^{t_0})\left\{\frac{4a_1k_\lambda}{\pi^2R_1}\int_0^\infty\left(\frac{t}{\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^4}\right)J_1\left(\frac{\lambda}{a_1}R_1\right)J_0\left(\frac{\lambda}{a_1}r\right)\frac{d\lambda}{w_0(\lambda)}S_+(t)\right\}\underset{t\to 0}{\to}$$

$$\to \frac{4a_1k_\lambda}{\pi^2R_1}T_0\int_0^\infty\frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^2}J_0\left(\frac{\lambda}{a_1}r\right)J_1\left(\frac{\lambda}{a_1}R_1\right)\frac{d\lambda}{w_0(\lambda)}; \quad (13)$$

$$T_2(t,r) = \frac{T_0}{t_0}(I - B_t^{t_0})\left\{\frac{2a_1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{t}{\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^4}\right)J_1\left(\frac{\lambda}{a_1}R_1\right)V_2(r,\lambda)\frac{d\lambda}{w_0(\lambda)}S_+(t)\right\}\underset{t\to 0}{\to}$$

$$\to \frac{2a_1}{\pi} T_0 \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\lambda^2 t}}{\lambda^2} J_1\left(\frac{\lambda}{a_1} R_1\right) V_2(r,\lambda) \frac{d\lambda}{w_0(\lambda)} . \qquad (14)$$

Формули (13), (14) показують, що:

1) із плином часу ($t \to \infty$) температурне поле стабілізується до стаціонарного стану:

$$T_1(t,r) = \frac{1}{2} b_1 R_1 - \frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*} \frac{1}{2} R_1^2 \ln R_1 + \frac{1}{4}(R_1^2 - r^2) ,$$

$$T_2(t,r) = -\frac{\lambda_1^*}{2} \frac{R_1^2}{\lambda_2^*} \ln r ;$$

2) із зростанням термоопору ($b_1 \to \infty$) функції T_1 прямують до нуля.

Висновки

У даній статті методом інтегрального перетворення Фур'є-Бесселя отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку нестаціонарної задачі теплопровідності у двошаровому симетричному просторі.

Проведено аналіз найбільш вживаного на практиці випадку для двошарового осесиметричного тіла.

Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
3. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
4. Ленюк М.П. Узагальнення інтегралу Фур'є-Бесселя / М.П. Ленюк // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – Вип. 1, Ч. 1. – С. 79 -91.
5. Блажевський С.Г. Термопружний стан багатошарових симетричних тіл / С.Г. Блажевський, М.П. Ленюк. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – 130 с.
6. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. – М.: Физматгиз, 1963. – 251 с.