УДК 539.3

В.О. ВАХНЕНКО
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики та статистики, Страсклайдський університет

ВЗАЄМОДІЯ СОЛІТОНІВ ІЗ БЛИЗЬКИМИ ШВИДКОСТЯМИ

При взаємодії подібних солітонів доведено, що існує два розв'язки. Ці розв'язки отримані, в одному випадку, через двократні полюси в методі оберненої задачі розсіяння, в іншому, – коли амплітуди взаємодіючих солітонів близькі.

Дослідження фокусується на вивченні рівняння, яке запропоноване нами раніше. Мета роботи полягає у дослідженні взаємодії подібних (близьких за швидкістю) солітонів, а також звичайного солітона і сингулярного солітона з близькими швидкостями. Доведено, що існує граничний розв'язок, коли швидкості звичайних солітонів, а також звичайного та сингулярного солітонів наближаються один до одного. В межі розв'язок містить один солітон, який набуває зсув за координатою.

Ключові слова: подібні солітони, взаємодія.

В.А. ВАХНЕНКО
Институт геофизики им. С.И. Субботина НАН Украины
Е.Дж. ПАРКЕС
Департамент математики и статистики, Страсклайдский университет

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ С БЛИЗКИМИ СКОРОСТЯМИ

При взаимодействии подобных солитонов доказано, что существует два решения. Эти решения получены, с одном случае, через двукратные полюса в методе обратной задачи рассеяния, в другом, – когда амплитуды взаимодействующих солитонов близки. Исследование фокусируется на изучении уравнения, которое предложено нами ранее. Цель работы состоит в исследовании взаимодействия подобных (близких по скорости) солитонов, а также обычного солитона и сингулярного солитона с близкими скоростями. Доказано, что существует предельное решение, когда скорости обычных солитонов, а также обычного и сингулярного солитонов приближаются друг к другу. В пределе решение содержит один солитон, который приобретает сдвиг по координате.

Ключевые слова: подобные солитоны, взаимодействие.

V.O. VAKHNENKO
Subbotin Institute of Geophysics NAS of Ukraine
E.J. PARKES
Department of Mathematics and Statistics, University of Strathclyde

INTERACTION OF SOLITONS WITH CLOSE VELOCITIES

The study of the nonlinear evolution equations is actually in modern physics. We are focused on the equation suggested recently in our papers (*the Vakhnenko equation*). *The purpose of this investigation is to study the interaction between similar usual solitons as well as between usual soliton with singular soliton by means of analyses* (*1*) *of the two-multiple poles in the inverse scattering transform method and* (*2*) *of the limit case for two usual solitons with close amplitudes. For investigation of the solitons interaction with close velocities (amplitudes), two solutions have been found. First solution has been obtained throughout two-multiple poles in the inverse scattering transform method. Secondary solution has been obtained from known formula for interaction of two usual solitons with close velocities. It is proved that at interaction of two usual similar solitons, the minimal distance between these solitons is increased when the velocities* (*amplitudes*) *of these solitons tend to one another. As result there is only one soliton, however, with shift to the left on axis X. In the case of two-multiple poles, the essential other result is obtained. The solution consists of both usual soliton and singular soliton. The usual soliton and the singular soliton with similar velocities interact on large distance. This minimal distance of the approach between the soliton and the singular soliton is increased always for close velocities. In limit when the velocities of soliton and of singular soliton tend to one another, the solution tends to the solution with only one soliton which, however, has a shift on axis X. The additional investigations should be carried out in order to understand a difference between these solutions.*

Keywords: close solitons, interaction.

Постановка проблеми

В сучасній фізиці виникає необхідність вивчення нелінійних еволюційних рівнянь. Низка задач, що досліджуються в різноманітних галузях фізики: оптиці, гідродинаміці, фізиці плазми [1–4], приводить до рівняння Вахненка-Паркеса (the Vakhnenko-Parkes equation (*VPE*)) [5–10]:

$$W_{XXT} + (1 + W_T)W_X = 0. \tag{1}$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Виявилось, що рівняння *VPE* (1) є одним з інтегровних рівнянь. Воно використовується для опису фізичних явищ, зокрема, терагерцових імпульсів у несиметричних двоатомних молекулах [2], високочастотних збурень у релаксивному середовищі [3–4], солітонів у феромагнетиках [4].

Детальний опис властивостей рівняння *VPE* (1) можна знайти в огляді [7]. Подальший розвиток у вивченні рівняння *VPE* пов'язаний із дослідженням двократних полюсів у методі оберненої задачі розсіяння (*ОЗР*) [10].

Мета дослідження

Мета дослідження полягає у вивченні взаємодії подібних солітонів, з одного боку, через двократно вироджені полюси в *ОЗР*, з іншого, – коли їх амплітуди близькі одна до одної.

Викладення основного матеріалу дослідження

Спочатку аналізуємо односолітонний розв'язок, який одержано як методом Хіроти, так і методом оберненої задачі розсіяння (*ОЗР*) [10]:

$$U(X,T) = (W(X,T) - W(-\infty))_X = 6 \cdot [\ln(f(X,T))]_{XX},$$

через допоміжну функцію $f(X,T) = 1 + c_1 \exp(\theta_1)$ з $c_1 = \dfrac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1}$, $\theta_1 = \sqrt{3}\xi_1 X - \dfrac{T}{\sqrt{3}\xi_1}$. Амплітуда та швидкість солітону визначаються однозначно величиною ξ_1, в той час як величина $c_1 > 0$ задає початкове положення (зсув) солітону. Чим більша величина c_1, тим більше солітон зсунутий ліворуч. Навпаки, з $c_1 \to 0$ солітон зсунутий праворуч X_0 і гранично прямує по осі X до нескінченності $X_0 \to \infty$. Ці факти будемо використовувати під час вивчення взаємодії двох солітонів, для яких $\xi_1 \to \xi_2$. Для визначеності вважаємо, що $\xi_1 > \xi_2$.

Для довільних ξ_i взаємодія двох солітонів для *VPE* подається у вигляді [7]:

$$U(X,T) = (W(X,T) - W(-\infty))_X = 6[\ln(f(X,T))]_{XX}, \tag{2}$$

де $f(X,T) = 1 + c_1 \exp(\theta_1) + c_2 \exp(\theta_2) + bc_1c_2 \exp(\theta_1 + \theta_2)$, $c_i = \dfrac{\beta_i}{2\sqrt{3}\xi i_1}$, $\theta_i = \sqrt{3}\xi_i X - \dfrac{T}{\sqrt{3}\xi_i}$,

$b = \left(\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1}\right)^2 \dfrac{\xi_2^2 + \xi_1^2 - \xi_1\xi_2}{\xi_2^2 + \xi_1^2 + \xi_1\xi_2}$. Звертаємо увагу, що завжди $b > 0$.

Граничний випадок $\xi_1 = \xi_2$ приводить до одного солітону з величиною $c_3 = c_1 + c_2$, яка відповідає, як відмічалось, за початковий зсув цього солітону. Видно з (2), що точно така ж залежність виникає при $c_2 = 0$ (навіть при $\xi_1 \neq \xi_2$).

Детально проаналізуємо випадок із близькими ξ_1, ξ_2, але нерівними $\xi_1 \neq \xi_2$. Величина b прямує до нуля $b \to 0$, а значить мінімальна відстань, на яку можуть зійтися солітони при взаємодії $\xi_1 - \xi_2 = \Delta\xi << \xi$, прямує до нескінченності.

Зручно функцію переписати у вигляді $f(X,T) = \exp(\theta_1)[\exp(-\theta_1) + c_1 + c_2 \exp(\theta_2 - \theta_1) +$ $+ bc_1c_2 \exp(\theta_2)]$. Тільки другий множник відіграє визначальну роль, де знаходиться солітон ξ_2. Солітон ξ_2 знаходиться на відстані, де $\frac{1}{3}\dfrac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2}\exp(\theta_1) \approx 1$, тобто $\theta_1 = \sqrt{3}\xi_1 X_2 \approx -\ln\left(\frac{1}{3}\dfrac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2}\right)$. На цій відстані член $c_2 \exp(\theta_2 - \theta_1) = c_2 \exp\left[-\dfrac{\Delta\xi}{\xi_1}\ln\left(\frac{1}{3}\dfrac{\Delta\xi^2}{\xi_1^2}\right)\right] \to c_2$ при $\Delta\xi \to 0$.

Таким чином, можна стверджувати, що при взаємодії подібних солітонів $\xi_1 \approx \xi_2$ мінімальна можлива відстань між солітонами збільшується, в той час як коефіцієнт при ξ_1 наближається до значення $(c_1 + c_2)$. Тобто, в кінцевому результаті маємо один солітон, але з початковою фазою, що відповідає значенню $(c_1 + c_2)$.

Розглянемо підхід з двократно виродженими полюсами. Двічі вироджені полюси для дискретної частини спектральних даних у методі оберненої задачі розсіяння розглянуті на прикладі рівняння *VPE* (1) у [11]. Показано, що розв'язки рівняння (1) підпорядковуються співвідношенню:

$$W(X,T) - W(-\infty) = 6 \cdot [\ln(F(X,T))]_X \tag{3}$$

через допоміжну функцію

$$F(X,T) = F_{2p}(X,T) = 1 + c_2\left(1 + gh\right)\exp(\theta_2) + p_2 \exp(2\theta_2), \tag{4}$$

$$g = \frac{1}{2\xi_1} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(X + \frac{T}{3\xi_1^2}\right),\ c_2 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{3}\xi_1},\quad \theta_2 = \sqrt{3}\xi_1 X - \frac{T}{\sqrt{3}\xi_1},\ p_2 = -\frac{h^2 c_2^2}{3 \cdot 2^4 \xi_1^2}.$$

Сталі ξ_1, h – дійсні. Існує одна довільна стала β_1.

Оскільки $p_2 < 0$ для довільної дійсної β_1, тому маємо $\lim\limits_{X \to -\infty} F = 1$, а також $\lim\limits_{X \to +\infty} F = -\infty$. Отже, існує X_r таке, що $F(X_r) = 0$, тому дійсний розв'язок (3) з (4) є сингулярним.

Порівнюючи (2) з (4), потрібно відмітити, що існує два випадки, а саме, коли $b > 0$, а також випадок, коли $p_2 < 0$. Розуміння цих випадків потребує додаткового аналізу.

Висновки

Доведено, що для взаємодії солітонів із близькими швидкостями (амплітудами) існує два розв’язки. Ці розв’язки отримані, в одному випадку, через двократно вироджені полюси в методі оберненої задачі розсіяння, в іншому, – коли амплітуди взаємодіючих солітонів близькі.

Список використаної літератури

1. Kraenkel R.A. An integrable evolution equation for surface waves in deep water / R.A. Kraenkel, H. Leblond, M.A. Manna // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – Vol. 47. – № 2. – 17 p.
2. Сазонов С.В. Нелинейное распространение векторных предельно коротких импульсов в среде симметричных и несимметричных молекул / С.В. Сазонов, Н.В. Устинов // ЖЭТФ. – 2017. – Т. 151. – Вып. 2. – С. 249-269.
3. Vakhnenko, V.O. High frequency soliton-like waves in a relaxing medium / V.O. Vakhnenko // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40. – № 3. – P. 2011-2020.
4. Kuetche V. K. Inhomogeneous exchange within ferrites: Magnetic solitons and their interactions / V.K.Kuetche // J. Magnetism Magnetic Materials. – 2016. – Vol. 398. – P. 70–81.
5. Vakhnenko V.O. The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2002. – Vol. 13. – № 9. – P. 1819-1826.
6. Ye Y. New coherent structures of the Vakhnenko-Parkes equation / Y. Ye, J. Song, S. Shen, Y. Di // Results in Physics. – 2012. – Vol. 2. – P. 170-174.
7. Vakhnenko V.O. Approach in theory of nonlinear evolution equations: the Vakhnenko-Parkes equation / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Advances in Mathematical Physics. – 2016. – Vol. 2016. – 39 p. – Article ID 2916582.
8. Vakhnenko V.A. Solitons in a nonlinear model medium / V.A. Vakhnenko // J. Phys.A: Math.Gen. – 1992. – Vol. 25. – P. 4181-4187.
9. Roshid H. Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and – expansion method / H. Roshid, M.R. Kabir, R.C. Bhowmik, B.K. Datta // SpringerPlus – 2014. – Vol. 3. – 10 p.
10. Vakhnenko V.O. The inverse problem for some special spectral data / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2016. – Vol. 82. – P. 116-124.
11. Vakhnenko V.O. The singular solutions of a nonlinear evolution equation taking continuous part of the spectral data into account in inverse scattering method / V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes // Chaos, Solitons & Fractals. – 2012. – Vol. 45. – № 6. – P. 846-852.