513.88:517.44: 539.3

Т.Г. ВОЙТИК
Одесский национальный морской университет
Г.С. ПОЛЕТАЕВ
Одесская государственная академия строительства и архитектуры
С.А. ЯЦЕНКО
Национальный университет "Одесская морская академия"

ДВА СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯ РОДСТВЕННОЙ ТИПА РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Важная задача Римана-Гильберта (Римана-Гильберта-Привалова), из теории аналитических функций, возникает или используется в разных теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. Изучается абстрактная родственная указанной задаче типа Римана-Гильберта-Привалова задача с рациональными коэффициентами. Предложены два специальных решения абстрактного уравнения, порождаемого краевым условием задачи. Даны формулы, связывающие эти решения при однозначной разрешимости уравнения. Приведены также формулы их вычислений при правильной факторизации коэффициента и иллюстративные примеры. Процедура свободна от теории интегралов типа Коши и Фурье, требования гёльдеровости функций, индекса.

Ключевые слова: задача Римана, уравнение, кольцо, проектор, факторизационная пара.

Т.Г. ВОЙТІК
Одеський національний морський університет
Г.С. ПОЛЄТАЄВ
Одеська державна академія будівництва та архітектури
С.А. ЯЦЕНКО
Національний університет "Одеська морська академія"

ДВА СПЕЦІАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКИ СПОРІДНЕНОЇ ТИПУ РІМАНА-ГІЛЬБЕРТА-ПРИВАЛОВА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З РАЦІОНАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Важлива задача Рімана-Гільберта (Рімана-Гільберта-Привалова), з теорії аналітичних функцій, виникає або використовується в різних теоретичних та прикладних розділах математики, механіки, їх застосувань. Вивчається абстрактна споріднена до зазначеної задачі типу Рімана-Гільберта-Привалова задача з раціональними коефіцієнтами. Запропоновано два спеціальних розв'язки абстрактного рівняння, яке породжується крайовою умовою задачі. Подані формули, що пов'язують ці розв'язки при однозначній розв'язності рівняння. Наведені також формули їх обчислень при правильній факторизації коефіцієнта та ілюстративні приклади. Процедура вільна від теорії інтегралів типу Коші та Фур'є; вимог виконання умов гьольдеровості функції, індексу.

Ключові слова: задача Рімана, рівняння, кільце, проектор, факторизаційна пара.

T.G. VOYTIK
Odessa National Maritime University
G.S. POLETAEV
Odessa State Academy of Buildings and Architecture
S.A. YATSENKO
National University "Odessa Maritime Academy"

TWO SPECIAL SOLUTION OF RELATED TYPE RIEMANN - HILBERT - PRIVALOV A BOUNDARY PROBLEM WITH RATIONAL COEFFICIENTS

An important problem of the Riemann-Hilbert-Privalov, from the theory of analytic functions, arises or is used in different theoretical and applied branches of mathematics, of mechanics and their proposals. Including in the theory elasticity, and the problems of torsion. Arises in the theory of certain types of differential equations, of integral equations of convolution type, in the study of the corresponding of differential equations of mathematical physics. In this article object of research is related of Riemann-Hilbert-Privalov type, from the theory of analytic functions, a boundary problem with rational coefficients. Corresponding to boundary condition:

$$A(x)X^{+}(x)+Y_{-}(x)=B(x);\ \ x\in\{-\infty;\infty\}, \tag{*}$$

special solutions of the problem and arising at continuing (*) equation

$$A(z)X^{+}(z)+Y_{-}(z)=B(z);\;\; z\in C \qquad (**)$$

are introduced and studied. And namely, such solutions through which we can express solutions corresponding to an arbitrary right parts from very wide class of functions. Coefficient $A(z)$ and the right part $B(z)$, $z\in C$, of the equation, is assumed to belong, to the considered ring $\Re_r$ of rational functions Unknown $X^{+}(z)$ and $Y_{-}(z)$ are found in the corresponding their subrings $\Re_r^+,\Re_r^-$, which form factorization pair $\Re_r$. The ring $\Re_r$ contains all rational functions of the complex variable, in general, whose poles are finite and not real. All the poles of the functions from the subrings $\Re_r^+,\Re_r^-$ are located respectively inside the lower and upper half - planes, when there is. Two special solutions of an abstract equation (**), which is generated by the boundary condition (*) of the problem, are proposed. They are special solutions of the problem under consideration. The formulas, connecting these solutions for the unique solvability are given:

$$X^{+}_{A*}(z)=1-X^{+}_{e}(z)A^{0};\quad Y_{A*-}(z)=-Y_{e-}(z)A^{0}.$$

The formulas for their calculations are also given with correctly factorable coefficient.

The illustrative examples of constructing two special solutions are examined.

Procedure is free from the theory of Cauchy and Fourier integrals, Holder requirements and index.

Conclusions. The proposed provisions confirm the constructiveness and prospects of the approach used to equations of the type considered. The installed applications and formulas are applicable in particular in specific calculations and in the future development of the theory the consideration of the problem.

Keywords: the Riemann problem, equation, factorization, ring, projector, factorization pair.

Постановка проблемы

Напоминая используемые далее положения [1, 2], отметим важность теории уравнений, в частности, выражающих краевые условия задачи Римана для аналитических функций. Эта задача возникает или используется в теоретических и прикладных разделах математики, механики, их приложений. В том числе, в теории упругости, задачах о кручении. Возникает в теории некоторых видов дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свёртки, при изучении соответствующих дифференциальных уравнений математической физики [1–20]. Из указанных обстоятельств вытекает актуальность поиска общих фактов об их разрешимости. В частности, условий разрешимости, формул решений и их взаимосвязи. В том числе, актуальность исследований таких вопросов для задачи нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейным уравнениям с рациональными коэффициентами.

Анализ последних исследований и публикаций

Этой статьёй продолжены работы [1, 2], Существующие точные методы исследования задачи Римана-Гильберта восходят, в частности, к исследованиям И.И. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.И. Черского, М.Г. Крейна и другим. На связь теории интегральных уравнений на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, и этой задачей, впервые, обратил внимание И.М. Рапопорт (1948). В силу отмеченного в [4, С. 114), со ссылкой на книгу Н.И. Мусхелишвили (1945), можно заключить, что, обычно, эту задачу решали в предположении выполнения дополнительного условия Гёльдера на контуре для соответствующих функций. Часто применялся аппарат теории интеграла типа Коши, понятие индекса. Такие подходы могут приводить к необходимости преодоления значительных аналитических трудностей. Не всегда оправданных. Новые идеи и результаты других возможных путей исследования в иных предположениях и без требования гёльдеровости функций, появились в [4]. Среди работ, связанных с задачей Римана-Гильберта, но посвящённых абстрактным уравнениям в ассоциативных кольцах со специальной парой подколец, а также реализациям их в конкретных кольцах, укажем [10–17, 19, 20]. Публикации, в том числе [8], подтверждают сохранение интереса к использованию задачи Римана. Наряду с другими, важен случай, когда в такого типа задаче Римана-Гильберта-Привалова коэффициенты являются рациональными функциями [3–6, 18]. В [18], например, этот случай возникает в связи с исследованием дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами на оси. В рассматриваемой ситуации, от задачи Римана-Гильберта-Привалова можно перейти к родственной задаче, поставленной ниже. Считая, при этом, коэффициенты и искомые функции, принадлежащими соответствующим подмножествам рациональных функций. Поэтому, поиски общих элементов исследования рассматриваемой в статье ниже абстрактной родственной задачи, как и соответствующих ей уравнений и конкретных примеров, актуальны.

Цель исследования

Целью статьи является предложение формул двух из обнаруженных вторым автором специальных решений абстрактных уравнений, к которым приводит рассматриваемая ниже задача. А, именно, задача о нахождении двух рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по линейному функциональному уравнению с рациональными коэффициентами на сомкнутой вещественной оси:

$$A(x)X^{+}(x)+Y_{-}(x)=B(x);\;\; x\in\{-\infty;\infty\}. \tag{1}$$

Эти специальные решения важны, в частности, для построений решений, соответствующих произвольным функциям в правой части уравнения (1) из подмножества рациональных. В качестве контура в (1) выступает сомкнутая вещественная ось [4]. Цель достигается посредством использования соответствующих общих положений и теорем с формулами решений, установленных, например, в [1, 2].

Изложение основного материала исследования

1. Ниже будем использовать основные положения, обозначения и определения из [1, 2, 10–17, 19, 20]. Далее, $A^{-1}(x)=\left[A(x)\right]^{-1};\; x\in(-\infty;+\infty);\;\; A^{-1}(z)=\left[A(z)\right]^{-1};\; z\in C.$

1.1. Через $\boldsymbol{R}$ обозначим произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей $\boldsymbol{e}$. Пусть p^{+},p^{-} – коммутирующие проекторы, т.е. аддитивные и идемпотентные отображения $R\to R$. Положим: $p^{0}:=p^{+}p^{-}(=p^{-}p^{+})$; $p_{\mp}:=p^{\mp}-p^{0}$; $p_{*}:=p_{+}-p_{-}$. Для любого подмножества $B\subseteq R$ обозначим $B^{\mp,0}:=p^{\mp,0}B, B_{\mp}:=p_{\mp}B, B^{*}=B^{+}+B^{-}, B_{*}=B_{+}+B_{-}$. Для любого элемента $x\in R$ полагаем $x^{\mp,0}:=p^{\mp,0}x, x_{\mp}:=p_{\mp}x, x_{*}:=p_{*}x.$ Обратный в R для обратимого в R элемента $x\in R$ будем обозначать через x', снабженный, при необходимости, дополнительными символами. Для произвольных подмножеств $A,B\subseteq R$ определим множество [12] $inv(A,B):=\{x\in A: x'$ существует и принадлежит $B\}$. Положим $inv(A,A):=invA.$ Элемент u^{+} [– элемент v^{0}, – элемент w^{-}] назовем правильным, если $u^{+}\in invR^{+}$ $[v^{0}\in invR^{0}, w^{-}\in invR^{-}]$.

Определение 1. Пару подколец $\left(R^{+},R^{-}\right)$ кольца $\boldsymbol{R}$ с единицей $\boldsymbol{e}$ будем называть его факторизационной парой (ФП), если она порождена действующими в $\boldsymbol{R}$ коммутирующими проекторами p^{+},p^{-}: $R^{\mp}=p^{\mp}(R)$, и выполняются следующие аксиомы [12]:

$$e\in R^{0}\left(=R^{\mp}\bigcap R^{\pm}\right); \tag{*}$$

$$p^{0}(=p^{\mp}p^{\pm}))\ \text{– кольцевой гомоморфизм}\ \ R^{+}\text{и}\ \ R^{-}\ \text{в}\ R^{0}; \tag{**}$$

$$R^{+}R^{-},R^{-}R^{+}\subseteq R^{+}+R^{-}\quad\left(:=R^{*}\right). \tag{***}$$

Определение 2. Всякое кольцо $\boldsymbol{R}$ с единицей $\boldsymbol{e}$, рассматриваемое вместе с фиксированной факторизационной парой подколец $\left(R^{+},R^{-}\right)$ $[\equiv\left(R^{-},R^{+}\right)]$, т.е. подколец, обладающих определёнными, аксиоматически заданными свойствами, будем называть "кольцом с факторизационной парой". Кратко, кольцом с ФП.

1.2. Будем говорить, что элемент $a\in R$ допускает в коммутативном кольце $\boldsymbol{R}$ факторизацию по факторизационной паре $\left(R^{+},R^{-}\right)$ (– по ФП $\left(R^{+},R^{-}\right)$, если существуют элементы $r^{+}\in R^{+},\ s^{0}\in R^{0},\ t^{-}\in R^{-}$ такие, что: $a=r^{+}s^{0}t^{-}$. Эта факторизация называется: правильной факторизацией (п.ф.), если $r^{+}\in R^{+},\ s^{0}\in R^{0},\ t^{-}\in R^{-}$ – обратимы в своих подкольцах; – нормированной факторизацией (н.ф.), если $r^{0}=t^{0}=e$; – нормированной правильной факторизацией (н.п.ф.), если она является (п.ф.) и $r^{0}=t^{0}=e$.

Известно, что правильную факторизацию элемента из R по ФП $\left(R^{+},R^{-}\right)$ можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

1.3. Обозначим через $\Re_{r}$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z\in C$, все полюсы которых, при существовании, конечны и невещественны. Пределы функций из $\Re_{r}$ на бесконечности существуют и конечны. Пусть $\Re_{r}^{+}$ ($\Re_{r}^{-}$) – совокупности функций из $\Re_{r}$, все полюсы которых, при существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости Π_{+} (Π_{-}), соответственно (Ср. [4], С. 13–14). Проверяется, что $\Re_{r}$ – кольцо с мультипликативной единицей $e=f(z)=1, z\in C$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а

$\Re_r^+, \Re_r^-$ – его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца: $\Re_r \to \Re_r^{\mp}$ обозначим $p^{\mp}$, соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор p^+ (проектор p^-) каждой функции из $\Re_r$ ставит в соответствие часть её, оставшуюся после удаления из разложения этой функции в сумму константы и простейших дробей первого и второго типов всех слагаемых с полюсами из Π_+ (- из Π_-), соответственно. Полагаем: $p^0 = p^+p^- = p^-p^+$, $p_+ = p^+ - p^0$, $p_- = p^- - p^0$, $\Re_r^{\mp,0} = p^{\mp,0}(\Re_r)$, где $\Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^-$. Можно показать, что $\Re_r$ является кольцом с ФП $\left(\Re_r^+, \Re_r^-\right)$. Для любой функции $A(z) \in \Re_r$ справедливо разложение: $$A(z) := A^0 + A_+(z) + A_-(z).$$

2. Будем изучать вопрос о специальных решениях уравнений (2) в $\Re_r$, охватывающих уравнения вида (1), которые выражают краевые условия следующей Задачи. Они оказываются специальными решениями и самой Задачи.

Задача. Для заданных рациональных функций – коэффициентов $A(x), B(x)$, $-\infty < x < \infty$ найти пару рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй – в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению (1), где все известные функции определены на сомкнутой вещественной оси, причём, при $x = +\infty$ и при $x = -\infty$ каждая из них имеет совпадающие между собой конечные значения, равные соответствующим пределам.

К изучению рассматриваемых ниже вопросов о Задаче применяется общие положения теории колец, в том числе справедливые для колец с факторизационными парами и решение нелинейной задачи факторизации по подкольцам. Под специальными решениями будем понимать такие решения указанной Задачи и соответствующих ей уравнений (1), (2):

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z); \quad z \in C, \tag{2}$$

через которые можно находить решения при их произвольных правых частях из весьма щирокого подмножества рациональных функций. В частности, это могут быть решения в $\Re_r$ для Задачи и уравнения (2), соответствующие некоторой специального вида правой части этого уравнения. Например, решения Задачи, соответствующие каждой из правой части вида: $B(x) = 1;\ B(x) = A_*(x) := A_+(x) + A_-(x).$

3. Главный результат

3.1. При решении рассматриваемого вопроса в $\Re_r$, когда коэффициенты порождаются функциями из $\Re_r$, будем исходить из возможности продолжения каждой функции в (1) и, следовательно, соотношения (1) полностью на всю комплексную плоскость, заменой в (1) вещественного переменного x комплексной переменной z , не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Так из (1) возникает уравнение (2), где, по предположению, $A(z), B(z) \in \Re_r; z \in C$, – известные функции; $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$ – искомые; C – расширенная комплексная плоскость.

3.2. В силу возможности реализовать в кольце $R = \Re_r$ с ФП $\left(\Re_r^+, \Re_r^-\right)$ результаты и подходы из [10, 11, 14, 15] , а также из [1, 13], непосредственно, можно получить такое утверждение.

Теорема. Пусть функция $A(z) \in \Re_r$ не имеет вещественных нулей и $\lim_{z\to\infty} A(z) = const \neq 0$.

Если, при этом, $A^{-1}(z) \in \Re_r$ допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре $\left(\Re_r^+, \Re_r^-\right)$):

$$A^{-1}(z) = \Gamma^+(z)S^0(z)T^-(z); \; z \in C, \tag{3}$$

тогда уравнение (2) и Задача в $\Re_r$ относительно неизвестных $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$ при любой правой части $B(z) \in \Re_r$ имеют единственное решение в $\Re_r$.

Это решение $(X^+(z), Y_-(z)$, $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$, можно найти по формулам:

$$X^+(z)=\Gamma^+(z)S^0p^+[T^-(z)B^+(z)],\ Y_-(z)=B_-(z)+(T^-(z))^{-1}\cdot p_-[T^-(z)B^+(z)]. \tag{4}$$

где $S^0:=S^0(z)=const.$

3.3. Предположим, что Задача, а стало быть, и соответствующее ей уравнение (2) имеют единственное решение в $\Re_r$, $X^+(z)\in\Re_r^+, Y_-(z)\in\Re_{r-}$, при любой правой части $B(z)\in\Re_r$. Рассмотрим два уравнения вида (2) при $B(z)=1;\ B(z)=A_*(z):=A_+(z)+A_-(z)$:

$$A(z)X_e^+(z)+Y_{e-}(z)=1;\ \ z\in C, \tag{5}$$

$$A(z)X_{A_*}^+(z)+Y_{A_*-}(z)=A_*(z);\ \ z\in C. \tag{6}$$

где $A^0\neq 0$, а обозначения неизвестных в (5), (6) содержат индексы, соответствующие их правым частям. Следствием общих положений, линейности, свойств алгебраических операций и проекторов в кольце $\Re_r$ с ФП $\left(\Re_r^+,\Re_r^-\right)$) и предположений, являются формулы:

$$X_e^+(z)A^0+X_{A_*}^+(z)=1,\ Y_{e-}(z)A^0+Y_{A_*-}(z)=0\,, \tag{7}$$

где $A^0:=[A(z)]^0$;

$$X_e^+(z)=(1-X_{A_*}^+(z))(A^0)^{-1},\ Y_{e-}(z)=-Y_{A_*-}(z)(A^0)^{-1}, \tag{8}$$

$$X_{A_*}^+(z)=1-X_e^+(z)A^0,\ \ Y_{A_*-}(z)=-Y_{e-}(z)A^0. \tag{9}$$

3.4. При выполнении условий теоремы, в силу формул (4), устанавливаем также:

$$X_e^+(z)=\Gamma^+(z)S^0,\ \ Y_{e-}(z)=1-(T^-(z))^{-1}. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&X_{A_*}^+(z)=\Gamma^+(z)S^0\left[T^-(z)A_+(z)\right]^+(=X_e^+(z)p^+\left[T^-(z)A_+(z)\right]),\\ &Y_{A_*-}(z)=A_-(z)+((T^-(z))^{-1}p_-\left[T^-(z)A_+(z)\right]\end{aligned}\ . \tag{11}$$

3.5. Иллюстративные примеры

1. Решим уравнение (2), соответствующее Задаче при $A(x)=\dfrac{11x^2+275}{7x^2+63}; B(x)=1.$ Оно совпадает с уравнением (5). Тогда

$$A^{-1}(x)=\frac{7x^2+63}{11x^2+275}$$

и имеет место нормированная правильная факторизация:

$$A^{-1}(z)=\frac{z+3i}{z+5i}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{z-3i}{z-5i}.$$

Отсюда,

$$S^0=\frac{7}{11},\ \ \Gamma^+(z)=\frac{z+3i}{z+5i},\ \ T^-(z)=\frac{z-3i}{z-5i},\ \ (T^-(z))^{-1}=\frac{z-5i}{z-3i}.$$

Очевидно: $B^+(z)=p^+(1)=1,\ B_-(z)=p_-(1)=0.$ Непосредственно, по формулам (4) или (10) находим решение уравнения (5) и Задачи:

$$X_e^+(z)=\frac{7z+21i}{11z+55i},\ Y_{e-}(z)=\frac{2i}{z-3i}.$$

Подстановкой в (5) проверяется, что это действительно его решение при $A(z)=\dfrac{11z^2+275}{7z^2+63};B(z)=1,$ а, стало быть, решение уравнения (2) и Задачи при $A(x)=\dfrac{11x^2+275}{7x^2+63};B(x)=1.$

2. Решим уравнение (2) при

$$A(z)=\frac{11z^2+275}{7z^2+63};B(z)=A_*(z)=\frac{176}{7z^2+63}.$$

Тогда,

$$A_*(z)=A_+(z)+A_-(z)=\frac{88i}{21(z+3i)}-\frac{88i}{21(z-3i)}=B(z);\ B^+(z)=B_+(z)=\frac{88i}{21(z+3i)},$$

$$B_-(z)=-\frac{88i}{21(z-3i)};\ A^{-1}(z)=\frac{z+3i}{z+5i}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{z-3i}{z-5i};\ S^0=\frac{7}{11},\ \Gamma^+(z)=\frac{z+3i}{z+5i},$$

$$T^-(z)=\frac{z-3i}{z-5i},\ (T^-(z))^{-1}=\frac{z-5i}{z-3i};\ T^-(z)B^+(z)=\frac{z-3i}{z-5i}\cdot\frac{88i}{21(z+3i)}=\frac{22i}{21}\cdot\left[\frac{1}{z-5i}+\frac{3}{z+3i}\right],$$

$$[T^-(z)B^+(z)]^+=\frac{22i}{7(z+3i)},[T^-(z)B^+(z)]_-=\frac{22i}{21(z-5i)}.$$

Теперь, по формулам (4) находим искомое решение уравнения (2), а также и Задачи при

$$A(x)=\frac{11x^2+275}{7x^2+63};B(x)=A_*(x)=\frac{176}{7x^2+63}\ :$$

$$X_{A_*}^+(z)=\frac{z+3i}{z+5i}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{22i}{7(z+3i)}=\frac{2i}{z+5i},$$

$$Y_{A_*-}(z)=-\frac{88i}{21(z-3i)}+\frac{z-5i}{z-3i}\cdot\frac{22i}{21(z-5i)}=-\frac{22i}{7(z-3i)}.$$

Такой же результат можно получить, используя формулы (9) или (11).

Выводы

При сделанных предположениях установлены формулы (7)–(9), связывающие решения уравнения (2), а стало быть, и Задачи с правыми частями, соответствующими уравнениям (5), (6). В силу этих формул, а также выводов, которые вытекают из [10], решения уравнений (5), (6) являются специальными. Формулы (10), (11), в частности, применимы при вычислениях соответствующих специальных решений в конкретных примерах при сделанных предположениях. Элементы статьи: п.п. 1–3.4, выводы, подготовлены вторым, а остальные, – при участии всех соавторов.

Список использованной литературы

1. Войтик Т.Г. Родственные типу Римана-Гильберта-Привалова задачи со взаимно обратными рациональными правильно факторизуемыми коэффициентами / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Вестник ХНТУ. – 2017. – 3(62), Т. 1. – С. 43-50.
2. Войтик Т.Г. Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // НАУКОВІ НОТАТКИ. – Луцьк, 2016. – Вип. 54. – С. 65-70.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 640 с.

4. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / М.Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13. – Вып. 5(83). – С. 3-120.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
6. Гахов Ф.Д. Уравнения типа свертки / Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
7. Мхитарян С.М. О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учётом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях / С.М. Мхитарян // Изв. АН Армянской ССР. Серия: Механика. – 1968. – Т. XXI. – №5–6. – С. 3-20.
8. Акопян В.Н. Замкнутые решения некоторых смешанных задач для ортотропной плоскости с разрезом / В.Н. Акопян, Л.Л. Даштоян // Современные проблемы механики деформируемого твердого тела, дифференциальных и интегральных уравнений: Тезисы докладов международной научной конференции (г. Одесса, 23-26 августа 2013 г.). – Одесса: ОНУ, 2013. – С. 12.
9. Черский Ю.И. Керекеша Д.П. Метод сопряжения аналитических функций с приложениями / Ю.И. Черский, П.В. Керекеша, Д.П. Керекеша. – Одесса: Астропринт, 2010. – 552 с.
10. Полетаев Г.С. Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев. – Киев, 1988. – 20 с. – (Препринт / АН УССР. Институт математики: 88.31).
11. Полетаев Г.С. Об однопроекторных второго порядка уравнениях с правильно факторизуемыми коэффициентами в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Вестник ХГТУ. – 2000. – № 2 (8). – С. 191-195.
12. McNabb A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples / A. McNabb, A. Schumitzky // J. Functional Analysis. – 1972. – Vol. 9. – № 3. – P. 262-295.
13. Полетаев Г.С. Нахождение двух рациональных функций с полюсами из полуплоскостей по линейному уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом / Г.С. Полетаев, Т.Г. Войтик, С.А. Яценко // Глушковські читання: Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (Київ,10-13 вересня 2013 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2013. – С. 74-77.
14. Полетаев Г.С. Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коєффициентом в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation": Abstracts of conference reports (Kiev, Ukraine. May 27-29, 2015). - К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 46.
15. Полетаев Г.С. Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары / Г.С. Полетаев // Математика в сучасному технічному університеті: Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції (м. Київ, 24-25 грудня 2015 р.). – К.: НТУУ "КПІ", 2015. – С. 85-88.
16. Войтик Т.Г. Проекторный поход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей / Т.Г. Войтик, Г.С. Полетаев, С.А. Яценко // Необратимые процессы в природе и технике: Труды 8-ой Всероссийской конференции. Часть II. (Москва, 27-29 января 2015 г.). – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – С. 125-129.
17. Полетаев Г.С. Общее свойство решений родственных Римана-Гильберта-Привалова задач с взаимно обратными рациональными коэффициентами / Г.С. Полетаев // НАУКОВІ НОТАТКИ.– Луцьк, 2016. – Вип. 56. – С. 187-192.
18. Попов Г.Я. Метод факторизации и его численная реализация / Г.Я. Попов, П.В. Керекеша, В.Е. Круглов; под ред. проф. Г.Я. Попов. – Одесса: Одесский госуниверситет, 1976. – 82 с.
19. Полетаев Г.С. Абстрактный аналог парного уравнения типа свертки в кольце с факторизационной парой / Г.С. Полетаев // Украинский математический журнал. – 1991. – Т. 43. – № 9. – С. 1201-1213.
20. Полетаев Г.С. Некоторые результаты о парных уравнениях в кольцах с факторизационными парами / Г.С. Полетаев // Вісник Харківського національного ун-ту. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2002. – Вип.52. – № 582.– С. 143-149.