

УДК 514.18

С.Ф. ПИЛИПАКА

Національний університет біоресурсів і природокористування України

М.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанський агротехнічний інститут НУБіП України

Т.А. КРЕСАН

Ніжинський агротехнічний інститут НУБіП України

РУХ ЧАСТИНКИ ПО ГВИНТОВОМУ КОНОЇДУ, ОБМЕЖЕНОМУ ВЕРТИКАЛЬНИМ ШОРСТКИМ ЦИЛІНДРОМ

Розглянуто рух матеріальної частинки по поверхні гвинтового коноїда із вертикальною віссю під дією сили власної ваги. Складено диференціальні рівняння руху для двох випадків: поверхня не має обмежень і поверхня обмежена співвісним циліндром. В першому випадку диференціальні рівняння розв'язано чисельними методами, в другому отримано аналітичний розв'язок у кінцевому вигляді. Знайдено кінематичні параметри руху, наведено графіки кінематичних характеристик у функції часу. Для першого випадку побудовано траєкторії руху частинки по поверхні коноїда для різних вихідних умов. Траєкторією руху частинки у другому випадку є гвинтова лінія – лінія перетину коноїда із співвісним циліндром.

Ключові слова: гвинтовий коноїд, частинка, траєкторія руху, обмежувальний циліндр, диференціальні рівняння, кінематичні параметри.

С.Ф. ПИЛИПАКА

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Н.Б. КЛЕНДИЙ

Бережанский агротехнический институт НУБіП Украины

Т.А. КРЕСАН

Нежинский агротехнический институт НУБіП Украины

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ВИНТОВОМУ КОНОИДУ, ОГРАНИЧЕННОМУ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ШЕРОХОВАТЫМ ЦИЛИНДРОМ

Рассмотрено движение материальной частицы по поверхности винтового коноида с вертикальной осью под действием силы собственного веса. Составлены дифференциальные уравнения движения для двух случаев: поверхность не имеет ограничений и поверхность ограничена соосным цилиндром. В первом случае дифференциальные уравнения решено численными методами, во втором получено аналитическое решение в конечном виде. Найденны кинематические параметры движения, приведены графики кинематических характеристик у функции времени. Для первого случая построены траектории движения частицы по поверхности коноида для различных исходных данных. Траекторией движения частицы во втором случае является винтовая линия – линия пересечения коноида с соосным цилиндром.

Ключевые слова: винтовой коноид, частица, траектория движения, ограничивающий цилиндр, дифференциальные уравнения, кинематические параметры.

S.F. PYLYPAKA

National university of life and environmental sciences of Ukraine

M.B. KLENDIY

IS NULES of Ukraine "Berezhany Agrotechnical Institute"

T.A. KRESAN

IS NULES of Ukraine "Nizhyn Agrotechnical Institute"

PARTICLE MOVEMENT BY A SCREW CONOID WHICH IS LIMITED TO A VERTICAL RETURN CYLINDER

Screw surfaces are used in gravity transport devices, which include screw slopes. In the mining industry, they are used to enrich the ore. The profile of the gutter along which the material moves may be straight or curved. If the straight line forming the profile is inclined to the axis of the helical surface, then such a surface is an oblique helicoid. If the straight line is perpendicular to the axis, the resulting surface is a helical conoid. When a particle moves along an oblique helicoid, its velocity eventually stabilizes and becomes constant, and the trajectory of motion is a helical line. When moving along a helical conoid, the particle stops with time, because by centrifugal force it moves away from the axis of the conoid to such a distance that the angle of

inclination of the surface becomes less than the angle of friction. To prevent this, the surface of the screw conoid must be limited to a coaxial vertical cylinder. The aim of the work is to study the motion of material particles under the action of the force of their own weight on a helical conoid with a vertical axis without limiting its surface and with the restriction of a coaxial cylinder.

The motion of a material particle along the surface of a helical conoid with a vertical axis under the action of its own weight is considered. Differential equations of motion are constructed for two cases: the surface has no restrictions and the surface is bounded by a coaxial cylinder. In the first case, the differential equations were solved by numerical methods, in the second, an analytical solution was obtained in a finite form. The kinematic motion parameters are found, the kinematic characteristics of the time function are given. For the first case, trajectories of particle motion along the surface of the conoid are constructed for different initial data. The trajectory of particle motion in the second case is the helix - the line of intersection of the conoid with the coaxial cylinder. The obtained dependences make it possible to calculate the design of the screw descent for a given maximum speed of movement of the cargo accepted for the material point.

Keywords: helical conoid, particle, trajectory of motion, bounding cylinder, differential equations, kinematic parameters.

Постановка проблеми

Гвинтові поверхні можуть використовуватися в гравітаційних транспортних пристроях, до яких відносяться гвинтові спуски. Гвинтова поверхня може бути утворена поворотом твірної лінії навколо вертикальної осі з одночасним переміщенням вздовж цієї осі. Такою твірною може бути як пряма лінія, так і крива. Відповідно профіль спірального лотка може бути прямий, похилий, криволінійний, зокрема у вигляді кола [1]. У горнорудній промисловості гвинтові поверхні застосовуються для збагачення руд [2].

Характер руху частинки по гвинтовій поверхні залежить від форми цієї поверхні. Наприклад, при русі частинки по косому і розгортному гелікоїдах її швидкість з часом стабілізується і стає сталою, а траєкторією руху на поверхні є гвинтова лінія. При русі по гвинтовому коноїду частинка із часом зупиняється. Для вивчення режимів руху частинки в залежності від конструктивних параметрів поверхні важливо мати аналітичні залежності, які описують цей рух.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Певні результати руху частинки по гвинтових поверхнях висвітлено в монографії [3]. Наведені аналітичні залежності стосуються гвинтових поверхонь, які автор називає косими. Рух матеріальної частинки по косому (нерозгортному) гелікоїду досить ґрунтовно розглянуто в працях проф. М.І.Акімова [3] і проф. П.М.Заїки [4]. М.І.Сисоєв дав узагальнене розв'язання задачі руху частинки по гравітаційній гвинтовій поверхні сталого кроку, осьовим перерізом якої є довільна крива [5]. Свої дослідження він проводив стосовно гвинтових сепараторів для сільськогосподарських матеріалів. Як окремий випадок ним було розглянуто рух частинки по розгортному гелікоїду, а також по косому гелікоїду (коли осьовим перерізом поверхні є пряма, нахилена під певним кутом до горизонтальної площини). Всі перераховані задачі розв'язані в циліндричній системі координат. В праці [6] досліджено рух частинки по розгортному гелікоїду, а в праці [7] – по косому гелікоїду. В обох випадках складання диференціальних рівнянь руху велося в проекціях на орти тригранника Френе, який є супровідним для траєкторії.

Формулювання мети досліджень

Дослідити закономірності руху матеріальних частинок під дією сили власної ваги по гвинтовому коноїду із вертикальною віссю без обмеження його поверхні та з обмеженням у вигляді співвісного шорсткого циліндра.

Викладення основного матеріалу досліджень

Поверхня гвинтового коноїда утворюється гвинтовим рухом прямолінійної твірної яка весь час залишається паралельною до горизонтальної площини (рис. 1,а). Всі твірні перетинають вісь коноїда. Його параметричні рівняння мають вигляд:

$$X = u \cos \alpha; \quad Y = u \sin \alpha; \quad Z = b\alpha, \quad (1)$$

де α , u – незалежні змінні поверхні, α – кут повороту точки коноїда навколо його осі; u – довжина прямолінійної твірної коноїда;

b – гвинтовий параметр – стала величина, через яку визначається крок H поверхні: $H=2\pi b$.

Поверхня одиничного кроку (один виток) показана на рис. 1,а. Положення частинки на ньому визначається координатами u і α (рис. 1,а,б). Будемо вважати ці параметри є функціями часу t . Тоді залежності $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$ будуть внутрішніми рівняннями траєкторії руху частинки по поверхні гвинтового коноїда. Їх підстановка в рівняння (1) дасть параметричні рівняння траєкторії в проекції на осі координат $OXYZ$. Ці залежності є невідомими і ми їх будемо знаходити в результаті розв'язку рівнянь руху частинки. Частинка із стану спокою може почати рух по поверхні гвинтового коноїда, або ж залишатиметься нерухомою. Це залежить від положення частинки на поверхні. Частинка із стану спокою намагатиметься рухатися по лінії найбільшого нахилу. Такими лініями для гвинтового коноїда є

гвинтові. Отже в початковий момент часу напрям руху частинки буде збігатися із напрямом дотичної, проведеної до відповідної гвинтової лінії (рис. 1,в). Однак під дією відцентрової сили траєкторія руху частинки буде змінюватися, віддаляючися від осі коноїда.

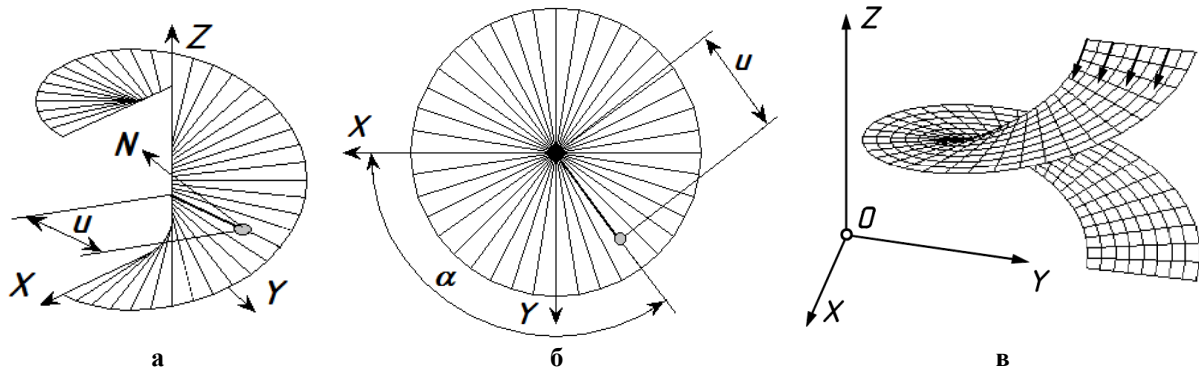


Рис. 1. Графічні ілюстрації до опису руху частинки по поверхні гвинтового коноїда:
 а) один виток гвинтового коноїда;
 б) вигляд зверху із позначенням внутрішніх координат частинки;
 в) позначення напрямку руху частинки із стану спокою

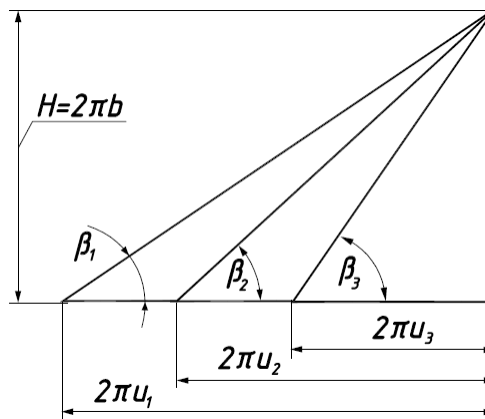


Рис. 2. Гвинтові лінії однакового кроку на розгортці циліндрів різного радіуса

Кожна гвинтова лінія поверхні коноїда має сталий кут підйому β . Його величина залежить від відстані u від до осі коноїда. Відомо, що гвинтова лінія на циліндрі перетворюється на пряму на розгортці бічної поверхні. Звідси можна просто визначити величину кута β . Всі гвинтові лінії витка поверхні мають однакову висоту (рис. 1,в), тобто вони розташовані на циліндрах однакової висоти H , але різних радіусів u . Отже на розгортці циліндрів вони перетворюються на прямі, зображені на рис. 2. Звідси знаходимо вираз для кута β :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{u}. \tag{2}$$

Якщо відстань u від осі коноїда буде такою, що кут β буде менший кута тертя, то частинка не розпочне рух із стану спокою.

Складемо рівняння руху у вигляді $m\bar{a} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{a} – вектор прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), реакція N поверхні коноїда, спрямована вздовж нормалі до поверхні (рис. 1,а) та сила тертя $F_f=fN$ (f – коефіцієнт тертя). Всі сили потрібно спроекціювати на осі системи координат $OXYZ$.

Сила ваги спрямована вниз, отже напрям її дії визначається напрямним вектором:

$$\{0; \quad 0; \quad -1\}. \tag{3}$$

Реакція N поверхні циліндра спрямована по нормалі до нього і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній коноїда. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (1):

$$\begin{aligned} X_u &= \cos \alpha; & Y_u &= \sin \alpha; & Z_u &= 0; \\ X_\alpha &= -u \sin \alpha; & Y_\alpha &= u \cos \alpha; & Z_\alpha &= b. \end{aligned} \quad (4)$$

Знаходимо векторний добуток векторів (4):

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = \{b \sin \alpha; \quad -b \cos \alpha; \quad u\}. \quad (5)$$

Приводимо вектор (5) до одиничного і отримуємо проекції одиничного вектора нормалі до поверхні коноїда:

$$\left\{ \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{u^2 + b^2}}; \quad -\frac{b \cos \alpha}{\sqrt{u^2 + b^2}}; \quad \frac{u}{\sqrt{u^2 + b^2}} \right\}. \quad (6)$$

Зважаючи на те, що змінні поверхні $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$ є функціями часу t , рівняння (1) перетворюються у рівняння кривої на поверхні – розшукуваної траєкторії руху частинки. Оскільки рівняння поверхні і рівняння траєкторії мають однаковий вигляд, то в рівняннях траєкторії символи “ x ”, “ y ”, “ z ” зліва будемо позначати строчними літерами. Їх похідні по часу t дадуть проекції швидкості частинки:

$$x' = u' \cos \alpha - \alpha' u \sin \alpha; \quad y' = u' \sin \alpha + \alpha' u \cos \alpha; \quad z' = \alpha' b. \quad (7)$$

Диференціюванням залежностей (7) отримаємо проекції вектора прискорення частинки:

$$\begin{aligned} x'' &= (u'' - u \alpha'^2) \cos \alpha - (\alpha'' u + 2 \alpha' u') \sin \alpha; \\ y'' &= (u'' - u \alpha'^2) \sin \alpha + (\alpha'' u + 2 \alpha' u') \cos \alpha; \\ z'' &= \alpha'' b. \end{aligned} \quad (8)$$

Величину швидкості частинки знайдемо, як векторну суму її складових (8) на осі координат:

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}. \quad (9)$$

Довжина пройденого частинкою шляху s визначається інтегруванням швидкості (9) по часу t :

$$s = \int \sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2} dt. \quad (10)$$

Сила тертя F_f спрямована по дотичній до траєкторії в сторону, протилежну вектору швидкості. Проекції одиничного вектора дотичної знайдемо діленням проекцій швидкості (7) на її величину (9) і візьмемо із протилежним знаком:

$$\left\{ -\frac{u' \cos \alpha - \alpha' u \sin \alpha}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}}; \quad -\frac{u' \sin \alpha + \alpha' u \cos \alpha}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}}; \quad -\frac{\alpha' b}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}} \right\}. \quad (11)$$

Запишемо векторне рівняння $m \bar{a} = \bar{F}$ в проекціях на осі координат. Напрямок дії сили ваги визначається вектором (3), напрям дії реакції N поверхні коноїда – вектором (6), напрям дії сили тертя – вектором (11). Із урахуванням цього отримуємо:

$$\begin{aligned}
 mx'' &= N \left(-f \frac{u' \cos \alpha - \alpha' u \sin \alpha}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}} + \frac{b \sin \alpha}{\sqrt{u^2 + b^2}} \right); \\
 my'' &= N \left(-f \frac{u' \sin \alpha + \alpha' u \cos \alpha}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}} - \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{u^2 + b^2}} \right); \\
 mz'' &= N \left(-f \frac{\alpha' b}{\sqrt{\alpha'^2 (u^2 + b^2) + u'^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + b^2}} \right) - mg.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Підставимо у (12) другі похідні із (8) і розв'яжемо отриману систему відносно $\alpha'' = \alpha''(t)$, $u'' = u''(t)$ і $N=N(t)$:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' &= -\alpha' \left[\frac{f(gu - 2b\alpha'u')}{\sqrt{(u^2 + b^2)[\alpha'^2(u^2 + b^2) + u'^2]} + \frac{2uu'}{u^2 + b^2}} \right] - \frac{bg}{u^2 + b^2}; \\
 u'' &= u\alpha'^2 - u'f \frac{gu - 2b\alpha'u'}{\sqrt{(u^2 + b^2)[\alpha'^2(u^2 + b^2) + u'^2]}}; \\
 R &= m \frac{gu - 2b\alpha'u'}{\sqrt{u^2 + b^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Перші два рівняння (13) утворюють систему з двома невідомими функціями $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$. Її розв'язок чисельними методами дає можливість побудувати траєкторію руху частинки по поверхні гвинтового коноїда під дією сили власної ваги. Залежність $N=N(t)$ дозволяє визначити реакцію поверхні вздовж траєкторії у функції часу t .

На рис. 3 побудовані траєкторії руху частинки з коефіцієнтом тертя $f=0,3$ по гвинтовому коноїду з гвинтовим параметром $b=0,5$. Початкова точка руху знаходиться на відстані 1 м від осі коноїда. Цифрами позначені траєкторії: 1 – початкова швидкість дорівнює нулю; 2 – початкова швидкість дорівнює 2 м/с і спрямована вздовж прямолінійної твірної до осі; 3 – початкова швидкість дорівнює 2 м/с і спрямована вздовж прямолінійної твірної від осі. Траєкторії зображені до моменту зупинки частинки. Найбільший шлях долає частинка, у якій початкова швидкість спрямована до осі, тому що в цьому напрямі кут найбільшого нахилу зростає (позначено цифрою 2). Проте при подальшому русі під дією відцентрової сили частинка віддаляється від осі на таку відстань, коли рух стає неможливий із-за недостатньої величини кута найбільшого нахилу.

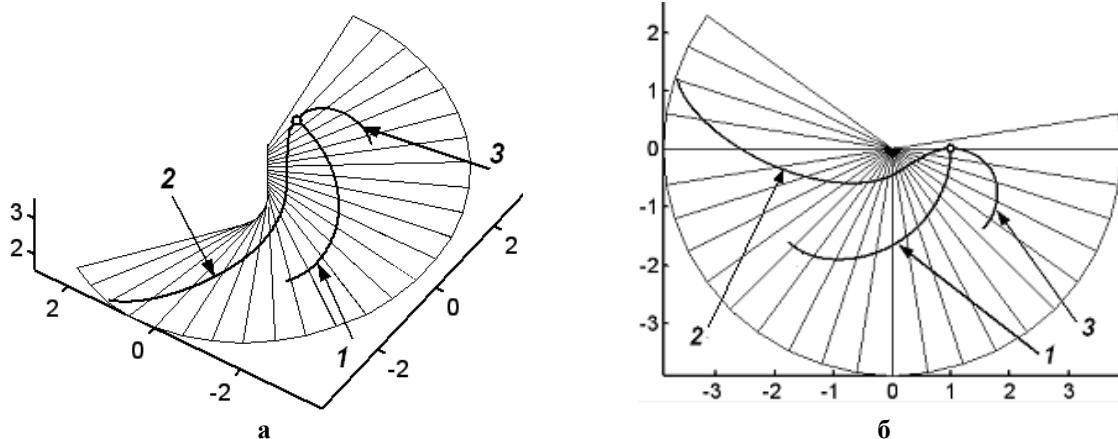


Рис. 3. Траєкторії руху частинки по поверхні гвинтового коноїда:
 а) аксонометрія; б) вигляд зверху

У випадку, коли початкова швидкість дорівнює нулю, рух починається перпендикулярно прямолінійній твірній, тобто по лінії найбільшого нахилу (гвинтовій лінії). За формулою (2) можна

знайти величину кута нахилу гвинтової лінії в точці, з якої починає рух частинка (позначено цифрою 1 на рис. 3). При $b=0,5$ м і $u=1$ м $\text{tg}\beta=0,5$, тобто $\beta=26,6^\circ$. Отже, кут найбільшого нахилу поверхні коноїда із заданим гвинтовим параметром на відстані 1 м від осі більший від кута тертя, який для коефіцієнта тертя $f=0,3$ рівний $16,7^\circ$. Якщо поверхню гвинтового коноїда використовувати як гвинтовий спуск, то його потрібно обмежувати, наприклад, співвісним циліндром. При відомому коефіцієнті тертя можна знайти критичне значення відстані u , при якій рух із стану спокою ще буде можливий. Коефіцієнт тертя f чисельно рівний тангенсу кута тертя β_f : $f=\text{tg}\beta_f$. За формулою (2) знаходимо: $u < b/\text{tg}\beta_f$ або $u < b/f$. Для нашого випадку при $b=0,5$ і $f=0,3$ маємо: $u < 1,67$ м.

На рис. 4,а зображені графіки зміни швидкості руху частинки. З нього видно, що найбільший час до зупинки у частинки, яка починає рух із стану спокою (позначено цифрою 1) – біля 4 с.

На рис. 4,б зображені графіки зміни реакції поверхні, яка діє на частинку масою 1 кг. Після зупинки частинки сила реакції близька до значення 9,81 Н. Це те значення, до якого прямує частинка при її необмеженому віддаленні від осі коноїда.

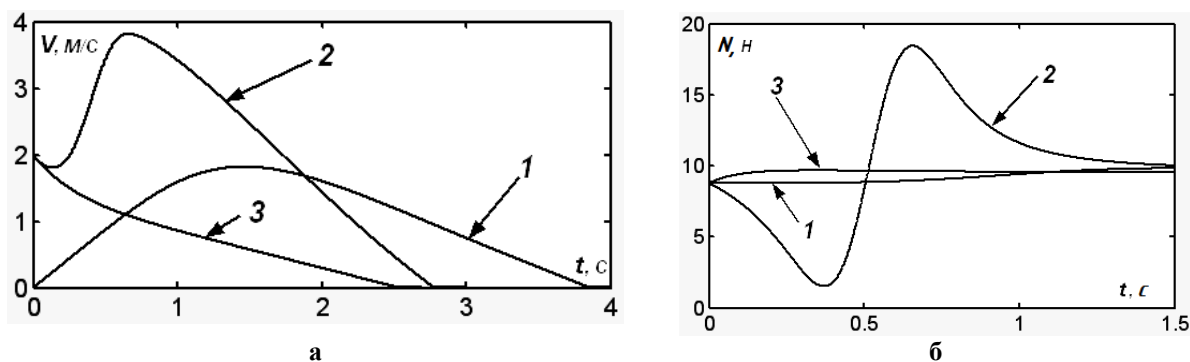


Рис. 4. Графіки, що характеризують рух частинки по траєкторіях, зображених на рис. 3:
 а) графіки зміни швидкості V ;
 б) графіки зміни реакції поверхні N

На рис. 5, побудовані траєкторії при однаковій початковій швидкості $V_0=3,5$ м/с руху частинки. В одному випадку вектор початкової швидкості спрямований вздовж лінії найбільшого нахилу вгору (позначено цифрою 1), а в другому – у протилежну сторону, тобто вниз (позначено цифрою 2). Із графіка зміни швидкості (рис. 5,б) видно, що більш тривалий час в русі до повної зупинки перебуває частинка, яка починає свій рух вгору по лінії найбільшого нахилу (приблизно 7 с).

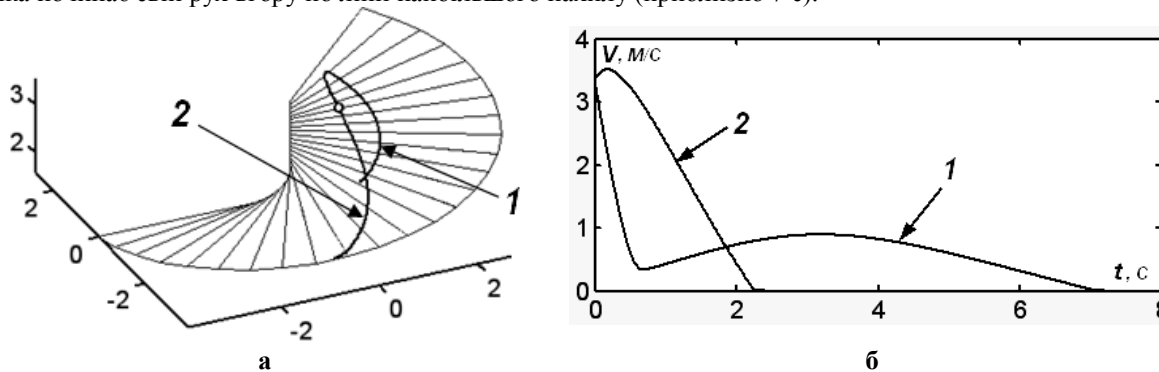


Рис. 5. Графічні ілюстрації до руху частинки з рівними початковими швидкостями, спрямованими у протилежні сторони вздовж лінії найбільшого нахилу:
 а) траєкторії руху по поверхні;
 б) графіки зміни швидкості V

Розглянемо рух частинки по коноїду, обмеженому співвісним циліндром (рис. 6,а). Частинка при русі по поверхні коноїда, віддаляючись від його осі, зустрінеться із обмежуючим циліндром і далі змушена рухатися по гвинтовій лінії. Кут підйому гвинтової лінії сталий і залежить від відстані u (рис. 2). Нехай $u=R$, де R – радіус обмежуючого циліндра. Згідно формули (2) знаходимо:

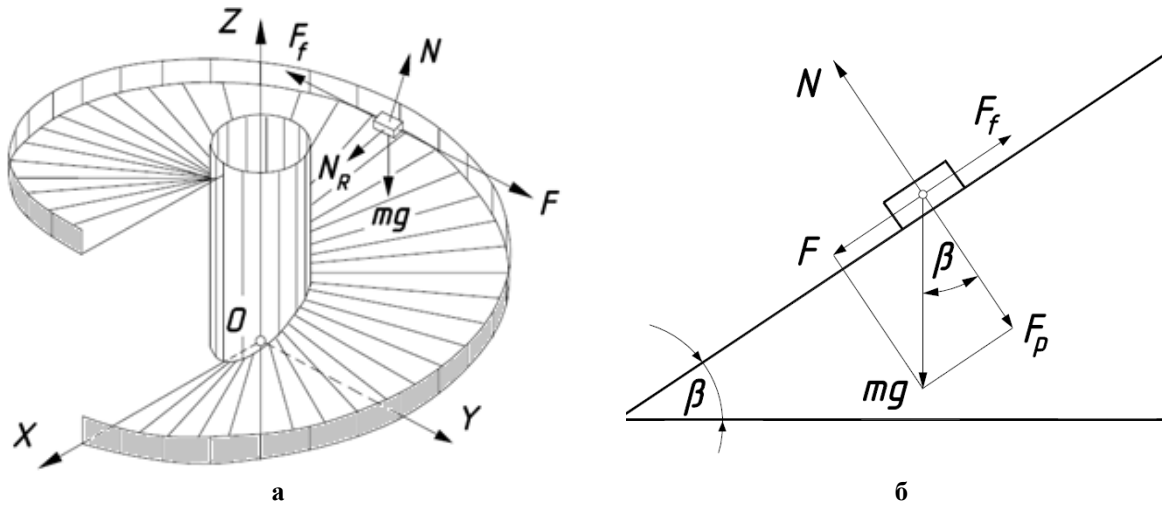


Рис. 6. Прикладені до частинки сили, яка рухається по лінії найбільшого нахилу:
 а) рух частинки по гвинтовій лінії; б) рух частинки по прямій лінії

$$\beta = \text{Arctg}(b/R). \tag{14}$$

Оскільки кут β є сталий, то рух частинки по гвинтовій лінії певним чином буде подібний до прямолінійного руху по похилій площині (рис. 6,б). В обох випадках прикладеними силами до частинки є: сила ваги mg , сила реакції поверхні N , сила тертя F_f . В обох випадках сила ваги розкладається на дві складові: рушійну силу $F = mg \sin \beta$ і силу тиску частинки на поверхню $F_p = mg \cos \beta$. Остання спричинює рівну по величині реакцію поверхні N , яка спрямована по нормалі до неї в протилежну сторону. Сила тертя F_f спрямована в протилежну сторону від напрямку руху частинки і залежить від величини реакції N : $F_f = fN$, де f – коефіцієнт тертя. Отже, $F_f = fmg \cos \beta$. Таким чином, ми можемо записати векторне рівняння $ma = F$ в проекції на пряму лінію, вздовж якої рухається частинка (рис. 6,б):

$$ma = mg \sin \beta - fmg \cos \beta. \tag{15}$$

Прискорення a є другою похідною шляху s частинки по часу t : $a = s''$. Диференціальне рівняння (15) є класичним прикладом для аналітичного опису прямолінійного руху частинки по похилій площині. Певною мірою воно справедливе і для гвинтової лінії. Диференціальне рівняння будемо складати в проекціях на дотичну пряму до гвинтової лінії, яка є рухомою при незмінному кутові β . Довжина шляху s , яка є гіпотенузою прямокутного трикутника для одного витка (рис. 2), визначиться через кут β : $s = 2\pi u / \cos \beta$. Для неповного витка замість кута 2π буде поточне значення, тобто кут α , а замість u – радіус R обмежуючого циліндра. Отже, вираз довжини шляху запишеться: $s = R\alpha / \cos \beta$. Послідовним диференціюванням цього виразу знайдемо швидкість V і прискорення a частинки, маючи на увазі, що $\alpha = \alpha(t)$:

$$V = s' = R\alpha' / \cos \beta; \quad a = V' = R\alpha'' / \cos \beta. \tag{16}$$

При русі частинки по гвинтовій лінії виникає додаткова сила тертя внаслідок ковзання частинки по внутрішній поверхні обмежуючого циліндра. Її величина визначається із виразу $F_{fR} = f_R N_R$, де f_R – коефіцієнт тертя частинки при ковзанні її по поверхні циліндра; N_R – сила реакції циліндра, яка спрямована перпендикулярно до його поверхні, тобто до осі циліндра (рис. 6,а). Вона рівна по величині відцентровій силі F_c , яка спрямована в протилежну сторону. Відцентрова сила виникає при русі частинки по криволінійній траєкторії і її величина залежить від швидкості руху V частинки та кривини k траєкторії: $F_c = mV^2 k$. Кривина гвинтової лінії є сталою. Її можна знайти за відомою формулою: $k = (\cos^2 \beta) / R$. Підставимо вираз швидкості V із (16) і вираз кривини k і після спрощень отримаємо величину відцентровій сили: $F_c = mR\alpha'^2$. Таким чином, величина сили тертя частинки при її ковзанні по поверхні циліндра запишеться: $F_{fR} = mf_R R\alpha'^2$. Підставимо у рівняння (15) вираз прискорення із (16) і додаткову силу тертя $F_{fR} = mf_R R\alpha'^2$, після скорочення на масу m частинки отримаємо диференціальне рівняння її руху вздовж гвинтової лінії:

$$\alpha'' = \frac{g \cos \beta}{R} (\sin \beta - f \cos \beta) - f_R \alpha'^2 \cos \beta. \quad (17)$$

Диференціальне рівняння (17) має аналітичний розв'язок. Проте і без його розв'язку ми можемо зробити деякі важливі висновки на основі його якісного аналізу. Якщо припустити, що бічна поверхня обмежуючого циліндра абсолютно гладенька, тобто $f_R=0$, то права частина рівняння (17) буде сталою величиною. Це означає, що рух частинки буде або рівноприскореним (при $\beta > \beta_f$), або рівносповільненим (при $\beta < \beta_f$). Якщо кут β буде рівний куту тертя β_f , то вираз у круглих дужках буде рівний нулеві і ми отримуємо $\alpha''=0$, тобто $\alpha'=\omega \cdot \text{const}$. Це означає, що частинка буде рухатися із сталою кутовою швидкістю обертання ω , звідки можна знайти і лінійну швидкість із (16), яка теж буде сталою. Величина цієї швидкості буде рівна початковій, включаючи і $V=0$. Якщо $\beta=\beta_f$, але $f_R \neq 0$, то частинка буде гальмуватися внаслідок дії сили тертя частинки по поверхні циліндра. В загальному випадку, коли $\beta > \beta_f$ і $f_R \neq 0$ може виникнути ситуація, коли рушійна сила і сила тертя зрівноважаться між собою і кутова швидкість обертання частинки стане сталою. Тоді $\alpha''=0$, і ми з рівняння (17) знаходимо величину кутової швидкості обертання частинки:

$$\omega = \alpha' = \sqrt{\frac{g}{R f_R} (\sin \beta - f \cos \beta)}. \quad (18)$$

Якщо частинка попадає на поверхню гвинтового коноїда і починає розганятися (при умові, що обмежуючий циліндр вибраний такого радіуса, що частинка не попаде в зону гальмування), то при зіткненні із шорсткою поверхнею циліндра її рух із часом стабілізується і швидкість стає сталою.

Для описання перехідного процесу знаходимо розв'язок диференціального рівняння (17):

$$\alpha = \frac{1}{f_R \cos \beta} \ln \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{f_R g}{R} (\sin \beta - f \cos \beta)} (Rc - t \cos \beta) \right) \right], \quad (19)$$

де c – постійна інтегрування. Щоб знайти її вираз, диференціюємо (19):

$$\omega = \alpha' = -\sqrt{\frac{g}{R f_R} (\sin \beta - f \cos \beta)} \tanh \left(\sqrt{\frac{f_R g}{R} (\sin \beta - f \cos \beta)} (Rc - t \cos \beta) \right). \quad (20)$$

Нехай при $t=0$ значення початкової кутової швидкості обертання α' частинки буде $\alpha'=\omega_0$. Підставивши ці значення у (20), розв'язуємо рівняння відносно c і отримуємо:

$$c = -\frac{1}{\sqrt{R f_R g (\sin \beta - f \cos \beta)}} \text{Arc tanh} \left(\sqrt{\frac{f_R R}{g (\sin \beta - f \cos \beta)}} \omega_0 \right). \quad (21)$$

Якщо початкова швидкість обертання частинки $\omega_0=0$, то $c=0$.

Розглянемо приклади. Нехай коноїд при $b=0,5$ і $f=f_R=0,3$ обмежено циліндром $R=1,2$ м (раніше ми знайшли, що $R < 1,67$ м). Початкова кутова швидкість опускання частинки $\omega_0=0$, початкова точка опускання - на відстані 1,2 м від осі коноїда (на спільній гвинтовій лінії перетину циліндра і коноїда). Знайти закономірність опускання частинки в залежності від часу t .

Побудуємо за формулою (20) графік зміни кутової швидкості обертання частинки. Оскільки $\omega_0=0$, то і $c=0$. За формулою (14) знаходимо величину кута β : $\beta=0,395$ рад ($\beta=22,6^\circ$). За відомими конструктивними та технологічними параметрами будуємо графік $\omega=\omega(t)$, який зображено на рис. 7,а. Як видно із нього, частинка спочатку розганяється, а потім її кутова швидкість ω зменшується, наближаючись до сталої величини. Після 5 с руху вона становить приблизно $1,7$ с⁻¹. Штриховою лінією показано цю ж саму залежність при $f_R=0,2$. За формулою (18) знаходимо точне значення кутової швидкості обертання частинки після стабілізації руху: $\omega=1,71$ с⁻¹ (при $f_R=0,2$ $\omega=2,1$ с⁻¹).

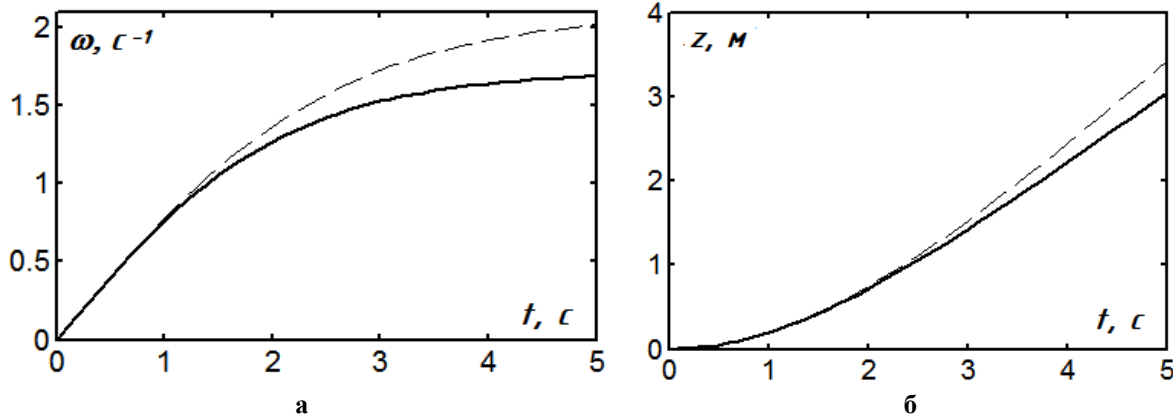


Рис. 7. Графіки зміни кінематичних параметрів руху частинки в залежності від часу t :
а) кутової швидкості обертання; б) висоти опускання

За останнім рівнянням (1) $z=ba$ можемо знайти висоту, на яку опускається частинка за час t підстановкою в нього залежності (19). На рис. 7,б побудовано графік залежності $z=z(t)$, із якого видно, що частинка за 5 с (на момент стабілізації руху) опускається на висоту 3 м (при $f_R=0,2$ – на 3,45 м). В праці [8] сказано, що з метою запобігання надмірного подрібнення вантажу при спуску його швидкість в кінці не рекомендується приймати більшою 2...2,5 м/с. За першою формулою (16) знаходимо: $V=R\omega/\cos\beta=1,2\cdot1,71/\cos0,395=2,22$ м/с (при $f_R=0,2$ – 2,73 м/с). Таким чином, для $f=f_R=0,3$ конструкція гвинтового спуску є прийнятною, а для $f=0,3$ і $f_R=0,2$ - ні. Збільшенням радіуса обмежуючого циліндра можна зменшувати величину максимальної швидкості після стабілізації руху частинки і навпаки. Це можна робити також зміною гвинтового параметра b , при збільшенні якого зростає кут підйому гвинтових ліній коноїда. В зв'язку із цим потрібно зменшувати радіус обмежуючого циліндра, щоб швидкість руху частинки після стабілізації не перевищувала задану межу. Однак при цьому слід мати на увазі, що розмір обмежуючого циліндра повинен бути достатнім для розміщення вантажу. Крім того, при достатньому радіусі R вантаж можна запускати поближче до осі коноїда. В такому випадку він швидше розганятиметься на поверхні коноїда і після зустрічі із циліндром почнеться стабілізація його руху. Розглянемо рух частинки, коли вона починає свій спуск не біля обмежуючого циліндра, а на відстані 0,7 м від неї. Задавши цю початкову умову, чисельним інтегруванням знаходимо залежність $u=u(t)$. Із рис. 8,а видно, що через 1,05 с відстань $u=1,2$ м,

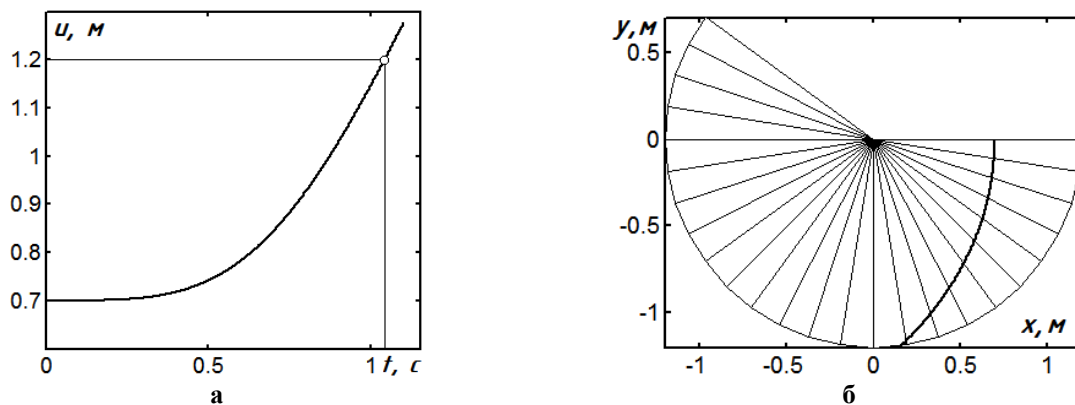


Рис. 8. Графічні ілюстрації до руху частинки, яка починає ковзати по поверхні коноїда на відстані 0,7 м від його осі:
а) графік залежності $u=u(t)$; б) траєкторія руху на вигляд зверху

тобто частинка при русі по поверхні коноїда за цей час досягає циліндричного кожуха. На рис. 8,б показано її траєкторію руху (вигляд зверху).

На рис. 9 побудовані графіки залежностей $z=z(t)$ і $\alpha'=\alpha'(t)$ протягом часу $t=0...1,05$ с. З них видно, що до зустрічі із циліндричним кожухом частинка опускається на 0,7 м і її кутова швидкість на цей момент становить $\alpha'=\omega\approx 1,5$ с⁻¹. Подальший рух частинки відбувається за рівнянням (19), у якому стала c визначається із (21) при $\omega_0=1,5$ с⁻¹.

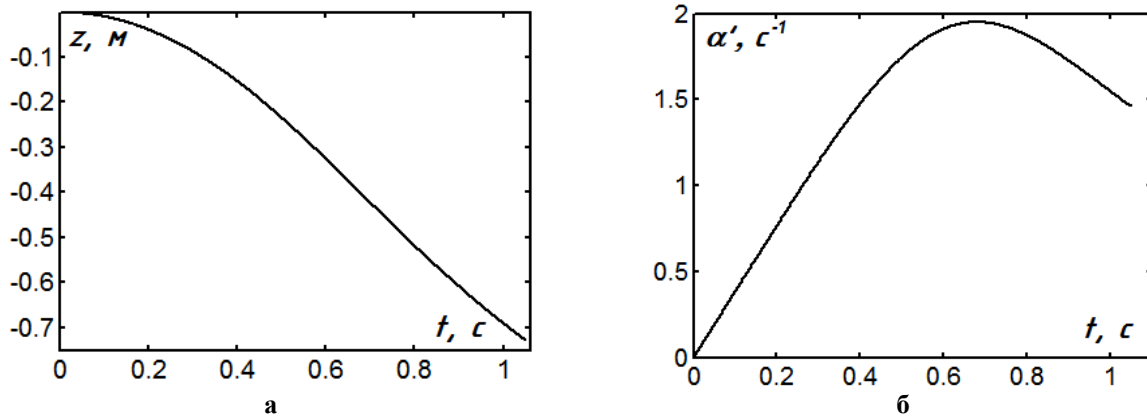


Рис. 9. Графіки кінематичних характеристик руху частинки по поверхні коноїда до зустрічі із циліндричним кожухом:
а) графік залежності $z=z(t)$; б) графік залежності $\alpha'=\alpha'(t)$

Коли частинка розпочинала свій рух на відстані $1,2 \text{ м}$ від осі коноїда, тобто при початковому контакті із циліндричним кожухом, то за час $t=5 \text{ с}$ вона опустилася на висоту 3 м (рис. 7,б). Знайдемо час спуску частинки на цю ж висоту при початку її руху на відстані $0,7 \text{ м}$ від осі коноїда. Оскільки за $1,05 \text{ с}$ вона вже опустилася на $0,7 \text{ м}$ (рис. 9,а), то потрібно знайти час її спуску після контакту із обмежуючим циліндром на висоту $2,3 \text{ м}$.

На момент зустрічі із кожухом кутова швидкість обертання частинки $\omega_0=1,5 \text{ с}^{-1}$. За формулою (21) знаходимо: $c=-2,2$. За рівнянням (20) будемо графік зміни кутової швидкості протягом 3 с (рис. 10,а). За цей час вона зростає від $1,5 \text{ с}^{-1}$ до свого максимального значення, після чого швидкість частинки стабілізується ($V=2,22 \text{ м/с}$). За формулою $z=ba$, де залежність $\alpha=\alpha(t)$ визначається із (19), знаходимо початкове значення z при $t=0$: $z_0=1,31 \text{ м}$. На рис. 10,б побудовано графік залежності $z=ba-z_0$, у якому відлік висоти опускання частинки починається із нуля. Із графіка визначаємо час опускання частинки на висоту $2,3 \text{ м}$: $t=2,8 \text{ с}$.

Таким чином, сумарний час опускання частинки на висоту 3 м при початку її руху на відстані $0,7 \text{ м}$ від осі коноїда становить $1,05+2,8=3,85 \text{ с}$. Отже, за рахунок більш інтенсивного розгону по поверхні коноїда на початковому етапі частинка опускається на $1,15 \text{ с}$ раніше, ніж при опусканні по гвинтовій лінії із одночасним її ковзанням по поверхні коноїда і циліндричного кожуха.

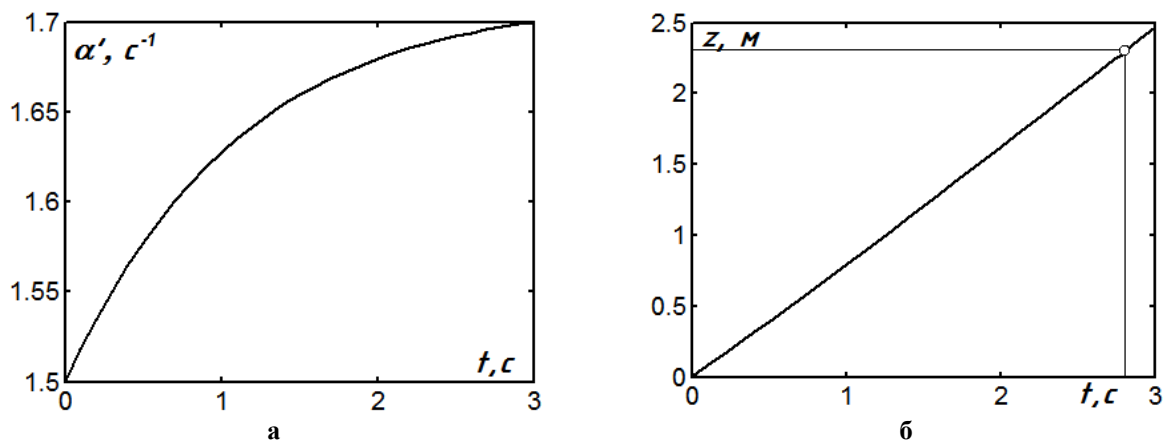


Рис. 10. Графіки кінематичних характеристик руху частинки після зустрічі із циліндричним кожухом:
а) графік залежності $\alpha'=\alpha'(t)$; б) графік залежності $z=z(t)$

Висновки

Рух частинки по поверхні гвинтового коноїда під дією сили власної ваги можливий на обмеженій його ділянці. Для початку руху кут найбільшого нахилу поверхні в точці знаходження частинки повинен бути більший від кута тертя. Під час руху частинка під дією відцентрової сили віддаляється від осі коноїда. Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь руху показує, що з часом

вона зупиняється. Це пояснюється тим, що частинка попадає в зону з недостатнім кутом нахилу і подальший рух стає неможливим. Щоб не відбулося зупинки, поверхню коноїда потрібно обмежувати співвісним вертикальним циліндром. У цьому випадку частинка рухається по гвинтовій лінії і ковзає одночасно по двох поверхнях: коноїда і циліндра. Диференціальне рівняння руху має аналітичний розв'язок, який показує, що з часом відбувається стабілізація руху і частинка рухається із сталою швидкістю. Зменшення коефіцієнта тертя частинки по циліндру приводить до збільшення швидкості її руху після стабілізації. При абсолютно гладенькій поверхні обмежуючого циліндра частинка буде рухатися рівноприскорено. Отримані залежності дають можливість розрахувати конструкцію гвинтового спуску за заданою максимальною швидкістю руху вантажу, прийнятого за частинку.

Список використаної літератури

1. Черненко В.Д. Расчет средств непрерывного транспорта / В.Д. Черненко – СПб: Политехника, 2011. – 386 с.
2. Аникин М.Ф. Винтовые сепараторы для обогащения руд / М.Ф. Аникин, В.Д. Иванов, Л.М. Певзнер. – М.: Недра, 1970. – 184 с.
3. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. - К.: УАСХН, 1960. -283 с.
4. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механики / П.М. Заика. – К.: Изд-во УСХА, 1992. –507 с.
5. Сысоев Н.И. Теоретические основы и расчет сортировки “Змейка” / Н.И. Сысоев // Сельхозмашина. -№ 8, 1949. - С.5 – 8.
6. Войтюк Д.Г. Знаходження траєкторії руху матеріальної точки по гравітаційній розгортній поверхні на прикладі розгортного гелікоїда / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Механізація і енергетика сільського господарства. IV Міжнародна науково-технічна конференція MOTROL-2003. – К.: НАУ, 2003. –Том 6. –С. 113 - 126.
7. Войтюк Д.Г. Дослідження руху матеріальної частинки по поверхні косоного гелікоїда під дією сили власної ваги / Д.Г. Войтюк, М.К. Лінник, С.Ф. Пилипака // Техніка АПК. – 2006. - № 12. – С 17 – 22.
8. Галкин В.И. Транспортные машины / В.И. Галкин, Е.Е.Шешко. – М.: «Горная книга», МГГУ, 2010. – 588 с.