

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Ольшанский В.П., докт. физ.-мат. наук, Ольшанский С.В., инженер
(Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства имени Петра Василенко)

Вследствие упрощения дифференциального оператора в уравнении движения кольцевого слоя, получено в элементарных функциях решение задачи об установившихся колебаниях скорости потока зерновой смеси, вызванных осевыми вертикальными вибрациями цилиндрического решета. Показано, что найденное приближенное решение не приводит к большим погрешностям в этом классе задач, т.е. вполне приемлемо для инженерных расчетов кинетики зерновой смеси в производственных условиях сепарирования

Постановка проблемы. Используя вибрации, в решетном сепарировании интенсифицируют разделение фракций зерновой смеси. Для повышения эффективности этого способа разделения зерновых материалов нужно знать закономерности распространения колебаний в сыпучей среде, движущейся по виброрешету. Один из возможных способов описания зависимости поля скоростей от времени, вследствие вибраций решета, основан на применении уравнений течения вязкой ньютоновской жидкости к моделированию движения виброоживленной сыпучей среды. Такая модель положена в основу данной работы, в предположении, что цилиндрическое виброрешето загружено изнутри слоем зернового материала.

Анализ последних исследований и публикаций. Установившиеся колебания скорости зерновой смеси, как вязкой жидкости, рассматривались на плоском виброрешете в [1], а в вертикальном цилиндрическом – [2,3,4]. В [2,3] при решении динамических краевых задач пренебрегали слагаемым, пропорциональным r^{-1} в операторе Лапласа, записанном в полярной системе координат. При учете этого слагаемого в [4,5] колебания вертикальной проекции скорости потока зерновой смеси описаны с помощью функций Кельвина. Отмечено, что, ввиду больших значений аргументов, цилиндрические функции удобно вычислять по асимптотическим формулам. Но, учитывая специфику рассматриваемой задачи, связанную с малым изменением множителя r^{-1} , можно приближенно заменить его постоянным средним значением. Тогда решение упрощенного дифференциального уравнения представится в элементарных функциях, что стало мотивом к этой работе.

Целью работы является построение и обоснование практической значимости приближенных формул для расчета колебаний вертикальной проекции скорости потока зерновой смеси, вызванных вертикальными вибрациями ци-

цилиндрического решета.

Изложение основного материала. Движение виброоживленного зернового слоя описываем уравнениями гидродинамики. Следуя работе [4], определение вертикальной проекции скорости потока u_z , в установившемся режиме движения, сводим к решению дифференциального уравнения:

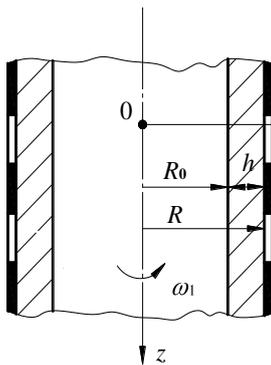
$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$u_z(R, t) = A^* \omega \cos(\omega, t); \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0. \quad (2)$$

В выражениях (1), (2): r – радиальная координата цилиндрической системы координат $r\theta z$; v – кинематическая вязкость смеси; g – ускорение свободного падения; R – радиус цилиндрического решета; $R_0 = R - h$ – внутренний радиус кольцевого слоя смеси толщиной h ; A^* , ω – амплитуда и частота вертикальных вибраций решета.

Расчетная схема решета представлена на рис. 1.



Обычно в задачах сепарирования толщина слоя h мала по сравнению с R , т.е. r^{-1} изменяется в узком промежутке $r^{-1} \in [1/R; 1/R_0]$. Например, при $R = 0,3075$ м и $h = 0,02$ м: $r^{-1} \in [2,55; 3,478]$ м. Поэтому далее множитель r^{-1} в (1) заменим постоянным средним значением

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r_*} = \frac{2}{R + R_0}$$

и будем вместо (1) решать упрощенное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (3)$$

при граничных условиях (2).

Решение представляем суммой двух слагаемых

$$u_z(r, t) = u_1(r) + u_2(r, t). \quad (4)$$

Используя (2) и (3), определение слагаемых сводим к решению двух краевых задач:

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r_*} \frac{du_1}{dr} = -\frac{g}{v}; \quad (5)$$

$$u_1(R) = 0; \quad \left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=R_0} = 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r_*} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0; \quad (6)$$

$$u_2(R, t) = A^* \omega \cos(\omega, t); \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0.$$

Первую краевую задачу решаем методом понижения порядка дифференциального уравнения, преобразуя (5) в линейное уравнение первого порядка. С учетом граничных условий находим:

$$u_1(r) = \frac{gr_*}{v} \left\{ R - r + r_* \left[\exp\left(\frac{R_0 - R}{r_*}\right) - \exp\left(\frac{R_0 - r}{r_*}\right) \right] \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что без введенного упрощения функция $u_1(r)$ также представляется компактным выражением [4]:

$$u_1(r) = \frac{g}{4v} \left(R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (8)$$

Решение второй краевой задачи ищем в виде

$$u_2(r, t) = \operatorname{Re} w(r) \cos(\omega t) - \operatorname{Im} w(r) \sin(\omega t).$$

Комплексная функция вещественного аргумента $w(r)$ согласно (6) должна быть решением уравнения

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r_*} \frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{v} w = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (9)$$

$$\text{при } \operatorname{Re} w(R) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(R) = 0; \quad \operatorname{Re} \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R_0} = 0; \quad \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R_0} = 0. \quad (10)$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \frac{1}{r_*} \lambda - \frac{i\omega}{v} = 0,$$

соответствующее (9), имеет комплексные корни:

$$\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2} \pm i\beta,$$

$$\text{где } \alpha_{1,2} = -\frac{1}{2r_*} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16r_*^4} + \frac{\omega^2}{v^2}} + \frac{1}{4r_*^2}}; \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{16r_*^4} + \frac{\omega^2}{v^2}} - \frac{1}{4r_*^2}}.$$

Учитывая их, записываем общее решение (9)

$$w(r) = c_1 + ic_2 \exp[\alpha_1 + i\beta \xi] + c_3 + ic_4 \exp[\alpha_2 - i\beta \xi]. \quad (11)$$

Здесь $\xi = r - R_0$; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные постоянные.

Подставив (11) в (10), получаем систему четырех уравнений, из которой находим:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\beta^2 - \alpha_1 \alpha_2}{\beta^2 + \alpha_2^2}; & a_2 &= \frac{\beta(\alpha_1 + \alpha_2)}{\beta^2 + \alpha_2^2}; \\ b_1 &= \sin \Theta h \exp[\alpha_2 - \alpha_1 h]; & b_2 &= \sin \Theta h + a_2 \cos \Theta h; \end{aligned}$$

$$b_2 = \cos \alpha_1 h + \exp \alpha_2 h - \alpha_1 h - \alpha_1 \cos \alpha_1 h - a_2 \sin \alpha_1 h;$$

$$c_1 = \frac{b_2 A^* \omega}{b_1^2 + b_2^2} \cdot \exp(-\alpha_1 h); \quad c_2 = -\frac{b_1 A^* \omega}{b_1^2 + b_2^2} \cdot \exp(-\alpha_1 h);$$

$$c_3 = a_1 c_1 + a_2 c_2; \quad c_4 = -a_2 c_1 + a_1 c_2.$$

Используя выделенные в (11) вещественную и мнимую части, с учетом найденных c_j , $j = \overline{1;4}$ и выражений (4), (7), получаем формулу скорости движения слоя:

$$u_z(\xi, t) = \frac{gr_*^2}{v} \left[\frac{h-\xi}{r_*} + \exp\left(\frac{-h}{r_*}\right) - \exp\left(-\frac{\xi}{r_*}\right) \right] +$$

$$+ A_1(\xi) \cos(\omega t) - A_2(\xi) \sin(\omega t), \quad (12)$$

в которой

$$A_1(\xi) = \exp \alpha_1 \xi - \alpha_1 \cos \alpha_1 \xi - c_2 \sin \alpha_1 \xi + \exp \alpha_2 \xi - \alpha_2 \cos \alpha_2 \xi + c_4 \sin \alpha_2 \xi;$$

$$A_2(\xi) = \exp \alpha_1 \xi - \alpha_1 \sin \alpha_1 \xi + c_2 \cos \alpha_1 \xi + \exp \alpha_2 \xi - \alpha_2 \cos \alpha_2 \xi - c_3 \sin \alpha_2 \xi.$$

Если выделить в (12) амплитуду и фазу колебаний, то

$$u_z(\xi, t) = \frac{gr_*^2}{v} \left[\frac{h-\xi}{r_*} + \exp\left(\frac{-h}{r_*}\right) - \exp\left(-\frac{\xi}{r_*}\right) \right] + A(\xi) \cos(\omega t + \varphi),$$

где $A(\xi) = \sqrt{A_1^2(\xi) + A_2^2(\xi)}$; $\varphi = \text{arctg} \frac{A_2(\xi)}{A_1(\xi)}$.

Расчет производительности решета $Q(t)$ также сводится к вычислению элементарных функций, поскольку

$$Q(t) \approx 2\pi r_* \int_0^h u_z(\xi, t) d\xi = \frac{2\pi gr_*^3}{v} \left[\frac{h^2}{2r_*} + h \exp\left(-\frac{h}{r_*}\right) - r_* \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{h}{r_*}\right)\right) \right] +$$

$$+ 2\pi r_* \left[\alpha_1 S_1 - c_2 T_1 + c_3 S_2 + c_4 T_2 \right] \cos(\omega t) - \left[\alpha_1 T_1 + c_2 S_1 + c_4 S_2 - c_3 T_2 \right] \sin(\omega t).$$

Здесь

$$S_j = \frac{1}{\alpha_j^2 + \beta^2} \left[\exp \alpha_j h - \alpha_j \cos \alpha_j h + \beta \sin \alpha_j h - \alpha_j \right];$$

$$T_j = \frac{1}{\alpha_j^2 + \beta^2} \left[\exp \alpha_j h - \alpha_j \sin \alpha_j h - \beta \cos \alpha_j h + \beta \right]; \quad j = \overline{1;2}.$$

Их получили с помощью табличных интегралов [7].

Анализ численных результатов и выводы. Для проведения расчетов, следуя [5], задавали: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,007 \text{ м}$; $\rho\nu = 0,66 \text{ Па}\cdot\text{с}$; $R = 0,3075 \text{ м}$; $A^* = 0,006 \text{ м}$; $\omega_1 = 96,9 \text{ с}^{-1}$.

Вычисленные значения $u_1(r)$ по приближенной формуле (7) и точной (8), для разных $\bar{r} = \left(1 - \frac{R_0}{R}\right)^{-1}$, записаны в табл. 1.

Таблица 1

Значения $u_1(r)$ в м/с, вычисленные двумя способами

\bar{r}	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$10u_1(r)$, по (7)	2,710346	2,601275	2,274701	1,731628	0,973069
$10u_1(r)$, по (8)	2,710349	2,601272	2,274710	1,731648	0,973091

Расчеты подтверждают, что для принятых исходных данных погрешности формулы (7) незначительны. Результаты вычисления $u_z(r, t)$ при разных r и t по формуле (12) указаны в табл. 2.

Таблица 2

Значения $u_z(r, t)$ при разных t и \bar{r}

$\frac{\omega t}{\pi}$	$10u_z(\bar{r}, t)$, м/с				
	$\bar{r} = 0$	$\bar{r} = 0,25$	$\bar{r} = 0,5$	$\bar{r} = 0,75$	$\bar{r} = 1$
0,00	2,538	2,763	3,440	4,529	5,814
0,25	4,249	4,371	4,644	4,759	4,111
0,50	5,059	4,906	4,317	2,895	0,000
0,75	4,493	4,055	2,650	0,028	-4,111
1,00	2,883	2,317	0,620	-2,163	-5,814
1,25	1,172	0,709	-0,584	-2,394	-4,111
1,50	0,362	0,174	-0,257	-0,529	0,000
1,75	0,928	1,025	1,410	2,338	4,111
2,00	2,538	2,763	3,440	4,529	5,814

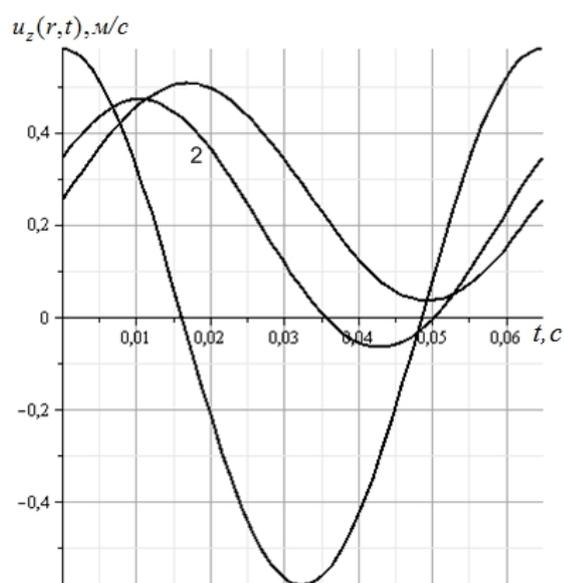


Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси от времени для различных \bar{r} : 1, 2, 3 – $\bar{r} = 0; 0,5; 1$

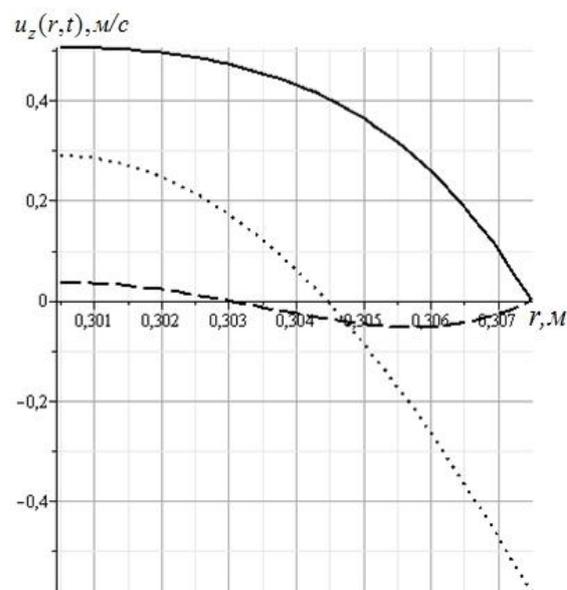


Рис.3. Профили скорости при разных t :
 — $\frac{\omega t}{\pi} = 0,5$; ... $\frac{\omega t}{\pi} = 1$; --- $\frac{\omega t}{\pi} = 1,5$

Графики на рис. 2 представляют точное решение рассматриваемой задачи в функциях Кельвина [5].

Указанные в табл. 2 значения $u_z(r, t)$ при $\bar{r} = 0; 0,5; 1$ попадают как точки на соответствующие кривые на рис. 2, т.е. приближенная теория хорошо согласуется с точным решением.

Профили скорости, к которым приводит формула (12), при $\omega t \pi^{-1} = 0,5; 1; 1,5$, представлены на рис. 3. Они соответствуют тем, что построены с помощью точного решения в работе [5].

Профили существенно меняются с течением времени, вследствие осевых колебаний решета.

Выводы

Таким образом, изложенная приближенная теория вполне пригодна к расчету вибрационного поля скоростей в кольцевом слое зерновой смеси при его движении внутри цилиндрического виброрешета.

Список литературы

1. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харків: Міськдрук, 2011. – 280 с.
2. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л.Н. Тищенко, Д.И. Мазоренко, М.В. Пивень, С.А. Харченко, В.В. Бредихин, А.В. Мандрыка. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 360 с.
3. Тищенко Л.Н. О колебаниях скорости потока зерна на решете виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Механізація сільськогосподарського виробництва та переробки сільськогосподарської продукції: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2010. – Вип. 103. – С. 95-104.
4. Ольшанский В.П. Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Динаміка і міцність машин: Вісник НТУ «ХП». – Харків: НТУ, 2010. – Вип. 69. – С. 100-108.
5. Тищенко Л.Н. Кинетика сепарируемых зерновых смесей в вертикальных цилиндрических виброрешетах / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях. – 2011. – № 1(61). – С. 177-181.
6. Тищенко Л.Н. О решениях упрощенных уравнений Навье-Стокса в гидродинамической модели движения зерновой смеси / Л.Н. Тищенко, Ф.М. Абдуева, В.П. Ольшанский // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 75. Том 1. – С. 217-223.
7. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

Анотація

Наближений розрахунок коливань зернової суміші в циліндричному віброрешеті

Внаслідок спрощення диференціального оператора в рівнянні руху кільцевого шару одержано в елементарних функціях розв'язок задачі про усталені коливання швидкості потоку зернової суміші, спричинені осьовими вертикальними вібраціями циліндричного решета. Показано, що знайдений наближений розв'язок не приводить до великих похибок в цьому класі задач, тобто повністю придатний для інженерних розрахунків кінетики зернової суміші в виробничих умовах сепарації

Abstract

The approximate calculation of vibrations of a grain mix in cylindrical vibrosieve

Owing to simplification of the differential operator in the equation of motion of a ring layer, the solution of a problem on the established fluctuations of velocity of a flow of a grain mix caused by axial vertical vibrations of a cylindrical sieve is received in elementary functions. It is shown, that the found approached solution does not result in the large errors in this class of problems, i.e. is quite acceptable to engineering accounts of a kinetics grain mix under production conditions separating