УДК 621.901

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ФАЗОВОГО СОСТАВА СТАЛИ

Скобло Т. С., д.т.н., профессор, Белкин Е. Л., инженер,
Романюк С. П., аспирант
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко)

Разработана методика оценки фазового состава различных зон режущего инструмента с помощью математических методов, которая позволяет установить особенности исходных и формируемых в процессе эксплуатации структур ножей из инструментальной и нержавеющей сталей.

Постановка проблемы. Состав исходной основной структуры стали и ее стабильность, могут меняться в зависимости от условий и длительности эксплуатации. При этом возможно как растворение карбидной фазы под действием деформации и температуры, так и их выделений, которые могут иметь отличающийся стехиометрический состав. Одновременно с изменениями в составе карбидной фазы меняется и концентрация компонентов в феррите, а также происходит распад остаточного аустенита. Карбиды присутствуют в сталях в виде неоднородно распределенных включений. В процессе эксплуатации происходит не только изменение их состава, но и перераспределение фаз.

Математическое описание структуры проводили для установления особенностей ее формирования при изготовлении ножей для переработки орехов в кондитерском производстве [1] и их эксплуатации. При этом анализировали изделия, изготовленные из двух холоднокатаных марок сталей инструментальной 65Г и нержавеющей 20Х13.

Цель работы. Разработка методики для качественного и количественного анализа структуры различных зон ножей: режущей кромки, основания и средней части.

Анализ исследований и публикаций. Анализ изображений, полученных с помощью электронного микроскопа, позволяет получить информацию о структуре стали, определить долю фаз, плотность распределения и осуществить классификацию фаз. Исследования в этом направлении представляют научный и практический интерес, поскольку позволяют установить стабильность структурных составляющих при эксплуатации, их деградацию и правильно выбрать эффективный материал и способ его упрочнения дл повышения эксплуатационной стойкости изделия. В конце прошлого века описание структурообразования проводили с помощью прибора для машинного автоматизированного анализа - Квантиметра, выпускаемого английской фирмой Metals Research Ltd в Кэмбридже [2]. В устройствах этого типа прибора изображения считывались путем сканирования с помощью видикода или пламбикона. Ответный сигнал подавался на детектор. Детектор отбирал для подсчета элементы изображения в зависимости от интенсивности почернения или сигнал подавался на измеритель яркости изображения, который оценивал оптическую плотность в каждой точке изображения и подсчитывал интегральную яркость. Сигнал от детектора использовался для отбраковки элементов изображения с недостаточной яркостью. Прибор позволял оценить долю формируемых фаз, но не определял их локального распределения.

Исследование изображений для получения качественного и количественного анализа структуры стали и в наше время также не утратили актуальности. Только сейчас описание структур можно решить с помощью компьютерного анализа методами математической статистики [3,4].

Изложение основного материала. В данной работе исследования базируются на идеях, приведенных в работах [3,4], но имеют некоторые дополнения. Базис имеет другой смысл, чем в работе [3]. Здесь рассмотрены фрагменты на фотографиях, с помощью которых можно благодаря специально разработанному методу выразить процентное содержание цветов на фотографиях и выявить их распределение в поле шлифа. Назовем базис из работы [3] - первого рода, а введенный здесь – базисом второго рода. Но для сокращения в дальнейшем базис второго рода будем характеризовать просто базисом, т.к. в данном исследовании базис первого рода не используется.

Нейтральность в настоящей работе имеет похожий смысл, что и в [3], но формально описывается с помощью другой зависимости. В той и этой работах нейтральность основывалась на том, что алгебраическая сумма дивергенций и лапласианов на достаточно большом числе точек всегда будет равна нулю. Но в той работе нейтральность подсчитывалась на малых фрагментах 6 на 6 пикселей, а в этой – на самих рассматриваемых точках, входящих в формулы нейтральности, что связано с большой дисперсностью тонколистовой холоднокатаной стали, из которой изготавливают ножи. Согласно предложенной методике, все пиксели исследуемых фотографий последовательно просматриваются компьютером. (Нужно помнить, что каждый пиксель имеет числовую характеристику от 0 до 255; 0 – самая темная точка, 255 – самая яркая). Вокруг каждого пикселя, или точки, имеется еще много окружающих ее точек. В работе рассматривали 24 точки вокруг средней. Это выбрано для того, чтобы можно было вычислять, конечно - разностные производные до 4-го порядка включительно. Рассматривали равномерную прямоугольную сетку точек, на которой заданы значения функций (в данном случае это цвета или оттенки этих точек). Точки называются пикселями. Они имеют малый, но конечный размер. Схема расположения точек вокруг средней - с номерами строки i и столбца j показана на рис. 1.

В общем случае все цвета могут быть разными. Для сокращения дальнейших записей присвоили указанным текущим точкам соответствующие номера. Так что точке с индексами ij присвоен номер 1, точке с индексами $ij-1$ присвоен номер 2, и так далее, как показано на рис.2.

$$\begin{array}{ccccc}
c_{i-2j-2} & c_{i-2j-1} & c_{i-2j} & c_{i-2j+1} & c_{i-2j+2} \\
c_{i-1j-2} & c_{i-1j-1} & c_{i-1j} & c_{i-1j+1} & c_{i-1j+2} \\
c_{ij-2} & c_{ij-1} & c_{ij} & c_{ij+1} & c_{ij+2} \\
c_{i+1j-2} & c_{i+1j-1} & c_{i+1j} & c_{i+1j+1} & c_{i+1j+2} \\
c_{i+2j-2} & c_{i+2j-1} & c_{i+2j} & c_{i+2j+1} & c_{i+2j+2}
\end{array}$$

Рисунок 1 - Схема расположения точек вокруг средней точки с номером строки i и номером столбца j. c_{ij} - цвет точки в формате bmp 256 цветов

$$\begin{array}{ccccc}
c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
c_{11} & c_{3} & c_{4} & c_{5} & c_{17} \\
c_{10} & c_{2} & c_{1} & c_{6} & c_{18} \\
c_{25} & c_{9} & c_{8} & c_{7} & c_{19} \\
c_{24} & c_{23} & c_{22} & c_{21} & c_{20}
\end{array}$$

Рисунок 2 - Схема нумерации точек вокруг - средней

Первая производная приближенно равна (1) (в отличии от математического анализа, в котором первая производная есть предел написанного ниже отношения при Δ, стремящемуся к нулю):

$$\frac{c_1 - c_2}{\Delta} \tag{1}$$

Δ - шаг сетки в заданном направлении x или y. Принято, что в любом из этих направлений шаг сетки одинаков, поэтому не приписываем ему индекса. Разность значений функций, стоящих в числителе также зависит от направления по x или y. Вторая производная по определению есть производная от - первой. В конечно разностном виде это выражается так (2):

$$\frac{\dfrac{c_1 - c_2}{\Delta} - \dfrac{c_2 - c_3}{\Delta}}{\Delta} = \frac{c_1 - 2c_2 + c_3}{\Delta^2} \tag{2}$$

Третья производная это производная от второй, что в конечно разностном виде выглядит так (3):

$$\frac{\dfrac{c_1 - 2c_2 + c_3}{\Delta^2} - \dfrac{c_2 - 2c_3 + c_4}{\Delta^2}}{\Delta} = \frac{c_1 - 3c_2 + 3c_3 - c_4}{\Delta^3} \tag{3}$$

Четвертая производная это производная от третьей, что в конечно разностном виде выглядит так (4):

$$\frac{\dfrac{c_1 - 3c_2 + 3c_3 - c_4}{\Delta^3} - \dfrac{c_2 - 3c_3 + 3c_4 - c_5}{\Delta^3}}{\Delta} = \frac{c_1 - 4c_2 + 6c_3 - 4c_4 + c_5}{\Delta^4} \tag{4}$$

Во всех приведенных формулах можно принять $\Delta = 1$, если рассматриваются производные только в направлении x и y. Но если одновременно с ними рассматриваются производные в направлении 45 градусов к этим осям, то нужно учитывать, что шаг Δ будет в $\sqrt{2}$ раза больше, чем в направлении осей x и y.

В приводимых ниже формулах будут встречаться термины дивергенция, лапласиан, третий лапласиан, четвертый лапласиан.

Дивергенция записывается так (5):

$$\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y} \tag{5}$$

Значок ∂ обозначает частную производную в направлении x или y. Поэтому ввели нумерацию точек на сетке, как приведено на рис 2. Следует учитывать, что в тех обозначениях номера точки не совпадают с абстрактными номерами, приведенными выше в формулах. Это потому, что средняя точка имеет номер 1, а в формулах точки идут как бы подряд. Для первой производной в обозначении на схеме формула будет не c_1-c_2, а c_2-c_1. Для второй производной в направлении x с учетом обозначений на схеме будет не $c_1-2c_2+c_3$ или $c_2-2c_3+c_4$ (с учетом сдвига на одну точку вправо), а $c_2-2c_1+c_6$. С учетом обозначений на рис 2 и то, что $\Delta=1$, дивергенция записывается в конечно разностной формуле (6) как:

$$c_2-c_1+c_4-c_1=c_2+c_4-2c_1 \tag{6}$$

Лапласиан записывается так (7):

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \tag{7}$$

С учетом обозначений рис. 2 и то, что $\Delta=1$, лапласиан записывается в конечно разностной формуле как (8)

$$c_2-2c_1+c_6+c_4-2c_1+c_8=c_2+c_4+c_6+c_8-4c_1 \tag{8}$$

Третий лапласиан записывается как (9)

$$\frac{\partial^3 c}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 c}{\partial y^3} \tag{9}$$

С учетом обозначений рис. 2 и то, что $\Delta=1$, третий лапласиан записывается в конечно разностной формуле (10) так

$$c_{10}-3c_2+3c_1-c_6+c_{14}-3c_4+3c_1-c_8=c_{10}+c_{14}-3c_2+6c_1-3c_4-c_6-c_8 \tag{10}$$

Четвертый лапласиан записывается (11) так:

$$\frac{\partial^4 c}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 c}{\partial y^4} \tag{11}$$

С учетом обозначений рис. 2 и то, что $\Delta=1$, четвертый лапласиан записывается в конечно разностной формуле (12) так

$$c_{10}-4c_2+6c_1-4c_6+c_{18}+c_{14}-4c_4+6c_1-4c_8+c_{22}=c_{10}+c_{14}+c_{18}+c_{22}+12c_1-4c_2-4c_4-4c_6-4c_8$$

(12)

Ранее было замечено [3,4], что чем более сложная произведена термообработка металла, тем большие значения принимают абсолютные уровни введенных функций (дивергенции, лапласиана и т.д.). Поэтому в большинстве будем учитывать именно абсолютные значения. Что касается алгебраических значений введенных функций, то они сильно связаны с цветом пикселя. Сумма алгебраических значений, введенных функций на достаточно большом количестве соседних точек равна нулю. Поэтому введенные значения напоминают действие плазмы [5].

Конечно, аналогия с плазмой довольно далекая, потому что изображение имеет свои особенности, но то, что введенные функции обладают свойством нейтральности – это твердо установленный факт. Рассмотрим, например, сумму лапласианов (13):

$$D(M,N)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}(c_{ij-1}+c_{i-1j}+c_{ij+1}+c_{i+1j}-4c_{ij}) \qquad (13)$$

Здесь индексы i, j в лапласиане поставлены согласно рис. 1. Потому что важно подчеркнуть суммирование по этим индексам. При достаточно больших значениях M, N эта сумма будет равна нулю, что говорит о нейтральности, как в плазме. Наименьшие значения $M = N$, при которых $D(N,N)$ заметно отличается от нуля, естественно можно назвать аналогом радиуса Дебая для плазмы. Но здесь $D(N,N)$ зависит от температуры очень косвенно в отличии от формулы радиуса Дебая от плазмы.

В работе рассматривали различные модификации понятия радиуса Дебая.

Например, в работе [3] рассматривали показатель нейтральности (15), который рассчитывали так:

$$D^{+}(M,N)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left|(c_{ij-1}+c_{i-1j}+c_{ij+1}+c_{i+1j}-4c_{ij})\right| \qquad (14)$$

А показатель нейтральности рассчитывали как

$$\left|\frac{D(N,N)}{D^{+}(N,N)}\right| \qquad (15)$$

Очевидно, что он находится в пределах от 0 до 1.

В этой работе в качестве аналога показателя нейтральности рассматривается следующий принцип:

$$0\le\left|\frac{\sum_{i=1}^{N}a_i}{\sum_{i=1}^{N}|a_i|}\right|\le 1 \qquad (16)$$

$$0\le\left|\frac{c_1-c_2}{|c_1-c_2|}\right|\le 1 \qquad (17)$$

$$0\le\left|\frac{c_2-2c_1+c_4}{|c_1-c_2|+|c_2-c_4|}\right|=\left|\frac{c_2-c_1+c_4-c_1}{|c_1-c_2|+|c_1-c_4|}\right|\le 1 \qquad (18)$$

$$0\le\left|\frac{c_2+c_4+c_6+c_8-4c_1}{|c_1-c_2|+|c_1-c_4|+|c_1-c_6|+|c_1-c_8|}\right|=\left|\frac{c_2-c_1+c_4-c_1+c_6-c_1+c_8-c_1}{|c_1-c_2|+|c_1-c_4|+|c_1-c_6|+|c_1-c_8|}\right|\le 1 \qquad (19)$$

$$0 \le \left| \frac{c_{10} - 3c_2 + 3c_1 - c_6 + c_{14} - 3c_4 + 3c_1 - c_8}{|c_{10} - c_2| + 2|c_2 - c_1| + |c_1 - c_6| + |c_{14} - c_4| + 2|c_1 - c_4| + |c_1 - c_8|} \right| \le 1 \qquad (20)$$

Аналогично

$$0 \le |(\frac{c_{10} + c_{14} + c_{18} + c_{22} + 12c_1 - 4c_2 - 4c_4 - 4c_6 - 4c_8}{|c_{10} - c_2| + 3|c_2 - c_1| + 3|c_1 - c_6| + |c_6 - c_{18}| + |c_{14} - c_4| + 3|c_4 - c_1| + 3|c_1 - c_8| + |c_8 - c_{22}|})| \le 1$$

(21)

В знаменателе (16) - (21) множители стоят согласно количеству одинаковых по абсолютной величине разностей, входящих в конечно - разностные производные.

Показатели нейтральности не полностью определяют аналог плазмы. В результате многолетних обработок фотографий было обнаружено, что отрицательные аналоги вихрей (название вихрь идет от гидродинамики, так названы лапласианы от полей скоростей, здесь не только лапласианы, но также третьего и четвертого порядков и даже дивергенция, в гидродинамике, характеризующая плотность) заметно больше положительных. И в то же время среднее количество точек (цвета) с отрицательным значением лапласиана заметно меньше, чем для положительных.

Есть еще несколько отличительных особенностей от плазмы, которые будут рассмотрены при описании результатов математической обработки. Показатели, характеризующие нейтральность и другие свойства цифрового изображения, будут также рассмотрены при описании расчетов.

Вводятся следующие 14 показателей (22)-(37), характеризующих локальные дифференциальные соотношения между цветами (на основе конечных разностей).

Приведенные ниже формулы используются, как для построения гистограмм, преобразованных по этим зависимостям изображений, так и для построения разных фильтров и определения нормативных характеристик и сравнения их с эталонами.

$$r_1 = \frac{|c_2 + c_4 + c_6 + c_8 - 4c_1|}{|c_2 - c_1| + |c_4 - c_1| + |c_6 - c_1| + |c_8 - c_1|} \qquad (22)$$

Этот показатель назовем нейтральностью, потому что, в среднем, величина числителя без абсолютного значения равна нулю.

Этот показатель всегда не больше 1.

$$r_2 = c_1, \text{ где} \qquad (23)$$

c_1 цвет средней точки

$$r_3 = \frac{|c_3 + c_5 + c_7 + c_9 - 4c_1|}{|c_3 - c_1| + |c_5 - c_1| + |c_7 - c_1| + |c_9 - c_1|} \qquad (24)$$

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_4 + c_6 + c_8}{5} \qquad (25)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(c_1 - \bar{c})^2 + (c_2 - \bar{c})^2 + (c_4 - \bar{c})^2 + (c_6 - \bar{c})^2 + (c_8 - \bar{c})^2}{5}} \qquad (26)$$

$$r_4 = \sigma \text{, где} \tag{27}$$

σ- среднеквадратическое отклонение

$$r_5 = \frac{(c_3c_4 + c_2c_1 + c_9c_8 + c_4c_5 + c_1c_6 + c_8c_7)^2}{(c_3^2 + c_2^2 + c_9^2 + c_4^2 + c_1^2 + c_8^2)(c_4^2 + c_1^2 + c_8^2 + c_5^2 + c_6^2 + c_7^2)} \tag{28}$$

$$r_6 = \frac{(c_3c_2 + c_4c_1 + c_5c_6 + c_2c_9 + c_1c_8 + c_6c_7)^2}{(c_3^2 + c_4^2 + c_5^2 + c_2^2 + c_1^2 + c_6^2)(c_2^2 + c_1^2 + c_6^2 + c_9^2 + c_8^2 + c_7^2)} \tag{29}$$

Зависимости (28 и 29) отнесем к показателю однородности, потому что при одинаковых значениях цветов, входящих в формулы точек, они равны 1. При неодинаковых - они меньше единицы. Это формула косинусов.

$$r_7 = \frac{|c_2 - c_1| + |c_4 - c_1| + |c_6 - c_1| + |c_8 - c_1|}{4} \tag{30}$$

Зависимость (30) – назовем обобщенным (усредненным) градиентом по абсолютной величине.

$$r_8 = |c_2 + c_4 + c_6 + c_8 - 4c_1| \tag{31}$$

Зависимость (31) – абсолютная величина конечно - разностного лапласиана.

$$r_9 = |c_{10} + c_{14} - 3c_2 + 6c_1 - 3c_4 - c_6 - c_8| \tag{32}$$

$$r_{10} = |c_{10} + c_{14} + c_{18} + c_{22} + 12c_1 - 4c_2 - 4c_6 - 4c_4 - 4c_8| \tag{33}$$

$$r_{11} = \frac{r_9}{|c_{10} - c_2| + 2|c_2 - c_1| + |c_1 - c_6| + |c_{14} - c_4| + 2|c_4 - c_1| + |c_1 - c_8|} \tag{34}$$

$$r_{12} = \frac{r_{10}}{|c_{10} - c_2| + 3|c_2 - c_1| + 3|c_1 - c_6| + |c_6 - c_{18}| + |c_{14} - c_4| + 3|c_4 - c_1| + 3|c_1 - c_8| + |c_8 - c_{22}|} \tag{35}$$

$$r_{13} = |c_2 + c_4 - 2c_1| \tag{36}$$

$$r_{14} = \frac{r_{13}}{|c_2 - c_1| + |c_4 - c_1|} \tag{37}$$

Формулы (34), (35) и (37) имеют тот же смысл, что и (22). Это тоже показатели нейтральности выражений (32), (33) и (36).

Зависимости (31), (32), (33) и (36) являются конечно - разностным аналогом формул

$$\left|\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right| \tag{38}$$

$$\left|\frac{\partial^3 c}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^3}\right| \tag{39}$$

$$\left|\frac{\partial^4 c}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 c}{\partial y^4}\right| \tag{40}$$

$$\left|\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y}\right| \tag{41}$$

Эти зависимости применяют в гидродинамике и во многих других прикладных дисциплинах [6]. Первую, можно назвать абсолютной величиной лапласиана (в гидродинамике можно считать аналогом абсолютной величины вихря). Вторую и третью назовем третьим и четвертым лапласианом. Для r_{13} в гидродинамике также имеется аналог, который здесь имеет значение абсолютной величины дивергенции.

Значения (31), (32), (33), (36) будут совпадающими с (38), (38), (40), (41) если для них $\partial x = 1$ и $\partial y = 1$.

Известно, что для трехмерных задач гидродинамики, если они не связаны со взрывами и течением со скоростью большей - звука, в большинстве случаев имеет место условие несжимаемости:

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \tag{42}$$

В точках, где не выполняется это условие, все равно выполняются - другие, связанные с законом сохранения массы, но они не входят в тему этого исследования, так как условия сохранения массы зависят от времени. В нашем случае рассматривается снимок мгновенно. В точках, где не выполняется условие несжимаемости, имеют место зоны уплотнения и разряжения.

Рассматриваемые фотографии являются двумерными. Тем не менее, во многих случаях имеет место:

$$\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \tag{43}$$

Такие условия возникают, когда область состоит из одного цвета (или почти одного цвета).

По аналогии можно считать, что введенная двумерная функция r_{13} связана с уплотнением и разрежением структуры металла, что играет большую роль в прогнозировании ее составляющих.

В дальнейшем также будет рассмотрен конечно - разностный аналог формулы

$$\left|\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}\right|, \tag{44}$$

который при $\partial x = 1$ и $\partial y = 1$ имеет вид:

$$\left|c_1 + c_3 - c_2 - c_4\right| \tag{45}$$

Аналог кинетической энергии в гидродинамике также можно рассматривать и для анализа фотографий. Выражение кинетической энергии имеет вид

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)^2 \tag{46}$$

В конечно разностной форме предыдущее выражение при $\partial x = 1$ и $\partial y = 1$ имеет вид

$$(c_2 - c_1)^2 + (c_4 - c_1)^2 \tag{47}$$

Представленными зависимостями далеко не исчерпывается класс возможных функций. Как будет видно из дальнейшего, рассматривали разные вариации формул (27), (28), (29). Например, в представленных на рис.3 значениях среднеквадратического отклонения и однородности рассчитываются по следующим формулам:

Среднеквадратичное отклонение (49) (аналог функции (4))

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_4}{3} \qquad (48)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(c_1 - \bar{c})^2 + (c_2 - \bar{c})^2 + (c_4 - \bar{c})^2}{3}} \qquad (49)$$

Аналог функции однородности для этих трех точек будет выглядеть так

$$r_5 = \frac{(c_2 c_1 + c_4 c_1)^2}{(c_2^2 + c_1^2)(c_4^2 + c_1^2)} \qquad (50)$$

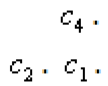

Рисунок 3 - Часть схемы рис. 2 (нумерации трех точек вокруг средней точки)

Гистограмма распределения для (50) в отличие от структуры в наплавленных слоях (сварных швов) не совпадает с гистограммой для (28).

Подобных формул для схем из сочетания точек существует большое количество. Все они не приводятся, однако входят в программы обработки изображений.

В процессе компьютерной обработки фотографий обнаружилось, что подавляющее большинство значений (31), (32), (33), (40), (42) расположено в отдельных точках, которые можно представить в виде спектра. И это свойство не зависит, от структуры металла. Как будет показано ниже, для рассматриваемых сталей спектр указанных функций в точности кратен числу 17.

Большое значение при термообработке играют показатели, приведенных функций при значениях больше или равно 255. Места на фотографиях, соответствующие этим значениям в работе относятся к бейниту и мартенситу. В этой работе выделены отдельной группой средние значения таких структур. Также отдельной группой выделены средние значения, согласно формул (30), (31), (32), (33), (36).

Методика получения гистограмм распределения сочетаний одинаковых цветов на фотографии (гистограммы Бозе).

Сочетания цветов на фотографии определенным образом связаны со структурой металла. Цвета не разбросаны по полю хаотично, а подчиняются определенным правилам, которые соответствуют законам физики. Специально выполнены сравнительные расчеты регрессионных зависимостей между процентом содержания цветов для случайных их соотношений и цветов в реальных структурах. Расчеты показали, что в первом случае никакой зависимости нет, а для структур имеется тесная корреляционная связь. Хотя известно, что пластинки цементита чередуются с пластинками феррита (то есть, установлено, что существуют какие-то сочетания цветов). Однако все гораздо сложнее. Требуется систематическое исследование сочетаний цветов.

Задача возникла из практической невозможности определить гистограммы распределения сочетаний всех цветов между собой. Это будет необозримое многомерное биномиальное распределение.

Как известно, в статистической физике для преодоления такого рода трудностей используется распределение Бозе-Эйнштейна.

Само распределение предложил Бозе (индийский математик).

На его идее в настоящей работе разработан способ получения гистограмм. Рассматривается n точек (пикселей). Каждая точка может принимать m значений цветов. В терминах задачи Бозе цвета можно рассматривать как ячейки, в которых располагаются точки. Интересовать будет задача распределения одинаковых и разных цветов среди n точек. То есть, в рассматриваемой задаче количество ячеек неизвестно. Для примера рассмотрим распределение 4 точек по разным и одинаковым цветам. Сначала опишем возможные варианты такого распределения. Может оказаться, что все 4 точки одинакового цвета. Второй вариант – 3 точки одинакового цвета, одна - не совпадающего с ними. Третий вариант: 2 точки цвета номер 1, 2 точки цвета номер 2. Четвертый вариант: 2 точки цвета номер 1; 1 точка цвета номер 2; 1 точка цвета номер 3. И, наконец, пятый вариант: все точки разного цвета. В приведенном описании были: цвет номер один, два, три и четыре. Это понимаем как абстракцию. Цветов может быть очень большое число, главное, нужно знать, что не важен сам цвет, а то, что он отличается от других трех цветов, входящих в группу из четырех точек. Для четырех точек не может быть больше такого же количества разных цветов. Ниже приведена табл. 1, являющаяся числовым выражением пояснений.

Таблица 1 - Распределение 4 точек по разным и одинаковым цветам, согласно гистограммам Бозе

Номер варианта	Количество разных цветов в варианте	Матрица возможных случаев			
1	1	4			
2	2	3	1		
3	2	2	2		
4	3	2	1	1	
5	4	1	1	1	1

В матрице, как и в распределении Бозе, сумма элементов всегда равна 4. На самом деле мы имеем дело с двумя распределениями: одно по количеству строк в матрице (оно соответствует второму столбцу этой таблицы), другое – по количеству точек, то есть, соответствует столбцам с 3-го по 6-й. Отметим, что и в распределении Бозе также две гистограммы. Но они имеют другой смысл, чем здесь. Отметим, что нельзя рассматривать только распределения по строкам или только по столбцам. Наиболее правдоподобные результаты дают сравнения описанных гистограмм по методу Колмогорова [7] между строками и столбцами с последующим перемножением вероятностей совпадения.

Алгоритм построения гистограмм

Сначала рассмотрим алгоритм, когда задана таблица из n точек. Пробегая все точки на фотографии, для каждой из них выделяется еще $n-1$ точка по условленному правилу. Например, для точки с индексами ij (i - номер строки, j - номер столбца) можно рассматривать еще три точки по правилу $ij+1$, $i+1j$, $i+1j+1$, а можно и по правилу $ij-1$, $i-1j$, $ij+1$, $i+1j$. Согласно рис. 2, в первом случае это будут точки с цветами

$$\begin{array}{c} c_1 \,..\, c_6 \\ c_8 \,..\, c_7 \end{array}$$, а

во втором случае это

$$\begin{array}{ccc} & c_4 \cdot & \\ c_2 \cdot & & \cdot c_6 \\ & c_8 \cdot & \end{array}$$

Для случая 5 точек это могут быть точки с цветами, как показано на следующей схеме

$$\begin{array}{ccc} & c_4 \cdot & \\ c_2 \cdot & c_1 \cdot & \cdot c_6 \\ & c_8 \cdot & \end{array}$$

Случай 9 точек можно представить в точности рис. 2, что не исключает и других правил.

В работе использовано следующее расположение 12 точек

$$\begin{array}{l} c_{ij} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{ij+3} \\ c_{i+1j} \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{i+1j+3} \\ c_{i+2j} \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{i+2j+3} \end{array}$$

Для сокращения указаны не все индексы, а только крайние в каждом ряду. Для двух средних нужно только поменять номер столбцов. Например, в первом ряду все индексы выглядят так: $c_{ij}, c_{ij+1}, c_{ij+2}, c_{ij+3}$.

Для 16 точек можно использовать следующую схему

$$\begin{array}{l} c_{ij} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{ij+3} \\ c_{i+1j} \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{i+1j+3} \\ c_{i+2j} \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{i+2j+3} \\ c_{i+3j} \cdot\cdot\cdot\cdot \, c_{i+3j+3} \end{array}$$

и так далее.

Но как бы не располагались точки на фотографии, для построения гистограмм цвета они расположены подряд в одном одномерном массиве длиной n: $c_1, c_2, ..., c_n$.

Первый этап алгоритма состоит в том, что происходит сравнение цветов между собой, начиная с первого. То есть, нужно создать массив точек одинакового цвета. Если первая точка исходного массива $c_1, c_2, ..., c_n$ не имеет одинаковых цветов с - остальными, то в новом массиве на первом месте будет 1. А на месте первого цвета в исходном массиве ставится какое-нибудь отрицательное число, например, минус 1. Если имеют одинаковые цвета, то в новом массиве на первом месте будет стоять количество совпадений. Следующий этап – поиск первого положительного цвета в исходном массиве цветов. Если такой цвет найдется, то начинается подсчет одинаковых цветов с заменой подсчитанных минус единицей. И так далее, пока все цвета исходного массива не станут равными минус единице. В результате получится требуемый массив количества одинаковых цветов. Его длина может быть равна любому числу от 1 (все цвета одинаковы) до n (все цвета разные). В этом новом массиве число совпадений цветов в общем случае неупорядочено, согласно приведенным матрицам совпадений.

Поэтому второй этап алгоритма – это упорядочивание массива числа совпадений цветов. Проще всего его упорядочить методом сортировки путем постепенной перестановки чисел этого массива. Но сортировка – долгая операция, которая будучи умноженной на число точек на фотографии займет длительное время расчетов. Поэтому вместо сортировки применили другой прием: создаем третий массив из последовательного поиска максимального во втором массиве с заменой его минус единицей. В результате получили упорядоченный массив, соответствующий исходной матрице сочетаний одинаковых цветов. Если поэлементно сравнивать полученный массив с табличными данными, то всегда найдется номер такого элемента, который будет соответствовать сочетанию одинаковых цветов. Требуемые гистограммы формируются накоплением единицы к элементу с полученным в результате работы алгоритма номера строки таблицы сочетаний цветов.

Рассматриваемый массив можно сократить в несколько раз, если перебирать только элементы таблицы, соответствующие максимальному числу совпадающих цветов. Этот прием основывается на том, что имея таблицу сочетаний одинаковых цветов, легко можно составить вспомогательную таблицу номеров строк начала и конца максимального количества совпадающих цветов (3-й столбец). Например, для подробно рассмотренной выше таблицы из четырех точек вспомогательный массив будет иметь вид:

1	4	1	1
2	3	2	2
3	2	3	4
4	1	5	5

Эта таблица имеет 4 столбца: первый – номера по порядку; второй – максимальное количество одинаковых цветов, начиная с наибольшего; третий – номер строки начала максимального количества одинаковых цветов в таблице из четырех точек; четвертый – номер строки конца максимального количества одинаковых цветов в таблице из четырех точек.

Видно, что только при максимальном количестве одинаковых цветов, равном двум, номер строки начала не совпадает с номером строки конца в таблице одинаковых цветов. С ростом числа точек растет и число несовпадений номеров начала и конца максимального количества одинаковых цветов.

Рассмотрен алгоритм получения гистограмм распределения одинаковых цветов для случая, когда таблица одинаковых цветов задана. Если она не задана, то все этапы алгоритма, кроме последнего остаются в силе. По мере сканирования точек на фотографии происходит накопление таблицы одинаковых цветов, но чтобы узнать для новой порции точек, к какой строке таблицы относятся их сочетания, или нужно добавить в таблицу это новое сочетание, следует сделать проверку по всем накопленным в нем элементам. Обычно даже на одной (редко двух) фотографии получается вся таблица сочетаний цветов для рассматриваемого типа структур. Полученная таблица потом должна быть отсортирована сначала по второму, а потом по третьему столбцу описанных сочетаний одинаковых цветов. Расчет остальных фотографий структур следует проводить по первому алгоритму.

Разработанный алгоритм применен в настоящей работе для анализа сочетаний одинаковых цветов в фотографиях для выявления однородных фаз.

Выполненная работа по модификации этого алгоритма направлена для анализа более сложных случаев, необходимых для практического использования.

Методика разложения гистограмм по базисным фрагментам

Методика предусматривает разложение гистограммы цветов по базисным фрагментам. Для анализа использовали фрагменты 10 на 10 пикселей. По виду они зрительно мало отличаются. Базисные фрагменты назначаются для каждого из 16 цветов по принципу наибольшего содержания цвета.

Рассмотрим пример. Пусть требуется определить из всех фрагментов для цвета 153 только тот, на котором наибольший процент этой структурной составляющей.

Затем каждая гистограмма фрагмента, не принадлежащая базису, раскладывается на 3 дополнительных базиса.

Написанного условия еще недостаточно для разложения гистограммы выбранного фрагмента по трем базисам. Это связано с тем, что их сочетаний из 16 по три представляется довольно большим -560. Поэтому минимум находили с помощью перебора всех сочетаний базисов по три.

Следует заметить, что использовали стандартную задачу минимизации с помощью метода Лагранжа.

Обозначим:

m - число интервалов гистограммы (16)

a_i, b_i, c_i -составляющие по интервалам первого, второго и третьего базиса

d_i -составляющие по интервалам раскладываемой гистограммы

В расчетах должны выполняться условия:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 1, \sum_{i=1}^{m} b_i = 1, \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, \sum_{i=1}^{m} d_i = 1 \quad (51)$$

Такие условия (51) не противоречат тому, что базисы могут быть единичными. Это часто имеет место.

К разложению гистограммы d методом Лагранжа подходят, как правило, путем минимизации квадратичного функционала вида (52):

$$F = \sum_{i=1}^{m} [(a_i - xd_i)^2 + (b_i - yd_i)^2 + (c_i - zd_i)^2] + \lambda(x + y + z - 1) = \min \quad (52)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\sum_{i=1}^{m} (a_i - xd_i)d_i + \lambda = 0 \quad (53)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2\sum_{i=1}^{m} (b_i - yd_i)d_i + \lambda = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2\sum_{i=1}^{m} (c_i - zd_i)d_i + \lambda = 0 \quad (55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 1 = 0 \quad (56)$$

Вычитаем из первого равенства нулю (53) второе равенство нулю (54)

$$\sum_{i=1}^{m} [(a_i - xd_i)d_i - (b_i - yd_i)d_i] = (x + y)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)d_i = 0 \quad (57)$$

Вычитаем из первого равенства нулю (53) третье равенство нулю (55)

$$\sum_{i=1}^{m} [(a_i - xd_i)d_i - (c_i - zd_i)d_i] = (x + z)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i = 0 \quad (58)$$

Заменяем в нем z на $1 - x - y$

$$[x + (1 - x - y)]\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i = (1 - y)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i = 0 \quad (59)$$

откуда

$$y = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} \quad (60)$$

Находим x

$$[x + 1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2}]\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum (a_i - b_i)d_i = 0 \quad (61)$$

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{m} (a_i - c_i)d_i - \sum_{i=1}^{m} (a_i - b_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} (b_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} - 1 \quad (62)$$

$$z = 1 - x - y = 1 - 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i - c_i)d_i - \sum_{i=1}^{m}(b_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} + 1 = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} \qquad (63)$$

Затем вычислили $F_{\min}$

$$F = \sum_{i=1}^{m}[(a_i - xd_i)^2 + (b_i - yd_i)^2 + (c_i - zd_i)^2] + \lambda(x + y + z - 1) = \min \qquad (64)$$

$$\sum_{i=1}^{m}[(a_i - b_i)d_i + (b_i - c_i)d_i + (c_i - a_i)d_i] = 0 \qquad (65)$$

$$a_i - [\frac{\sum_{i=1}^{m}(b_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} - 1]d_i = \frac{(a_i + d_i)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 - \sum_{i=1}^{m}(b_i - c_i)d_i^2}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} \qquad (66)$$

$$b_i - [1 - \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i - c_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2}]d_i = \frac{(b_i - d_i)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 + \sum_{i=1}^{m}(a_i - c_i)d_i^2}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} \qquad (67)$$

$$c_i - [1 + \frac{\sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)d_i}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2}]d_i = \frac{(c_i - d_i)\sum_{i=1}^{m} d_i^2 - \sum_{i=1}^{m}(a_i - b_i)d_i^2}{\sum_{i=1}^{m} d_i^2} \qquad (68)$$

В работе для удобства применяли и другой подход, основанный на минимизации следующего функционала (69).

$$F = \sum_{i=1}^{m}\{(a_i - xd_i)^2 + [b_i - y(1 - x)d_i]^2 + [c_i - (1 - x)(1 - y)d_i]^2\} = \min \qquad (69)$$

Такая на первый взгляд сложная методика для определения x и y основана на тождестве

$d_i \equiv d_i[x + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y)]$, то есть,

$1 \equiv x + y(1 - x) + (1 - x)(1 - y)$ для любых значений x и y, при котором условие Лагранжа выполняется автоматически.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} 2d_i[2xd_i(y^2 - y + 1) - 2y^2 d_i + y(b_i - c_i + 2d_i) - a_i + c_i - d_i] = 0 \qquad (70)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{i=1}^{m} 2d_i[x^2 d_i(2y - 1) + x(b_i - c_i + 2d_i - 4yd_i) + 2yd_i - b_i + c_i - d_i] = 0 \qquad (71)$$

Обозначим

$$a = \sum_{i=1}^{m} d_i^2 \qquad (72)$$

$$b = \sum_{i=1}^{m} d_i(b_i - c_i + 2d_i) \qquad (73)$$

$$c = \sum_{i=1}^{m} d_i(-a_i + c_i - d_i) \quad (74)$$

$$d = \sum_{i=1}^{m} d_i(-b_i + c_i - d_i) \quad (75)$$

Тогда относительно x и y получаем систему нелинейных уравнений

$$2ax(y^2 - y + 1) - 2ay^2 + by + c = 0 \quad (76)$$

$$ax^2(2y - 1) + bx - 4axy + 2ay + d = 0 \quad (77)$$

Из первого уравнения (76) выражаем x через y:

$$x = \frac{2ay^2 - by - c}{2a(y^2 - y + 1)} \quad (78)$$

Из второго условия (77) выражаем y через x:

$$y = \frac{ax + d}{2a(x - 1)} \quad (79)$$

Последние два выражения (78), (79) можно рассматривать, как процесс итерации

$$x_{k+1} = \frac{2ay_k^2 - by_k - c}{2a(y_k^2 - y_k + 1)} \quad (80)$$

$$y_{k+1} = \frac{ax_k + d}{2a(x_k - 1)} \quad (81)$$

Если x_0 и y_0 назначить произвольно в пределах от 0 до 1, то x_k и y_k сводятся к решению приведенной системы уравнений.

Существует еще одно ограничение на эти величины: x и y должны быть не отрицательными и не превосходить 1, иначе какое-то из слагаемого будет отрицательным.

Выводы:

Разработана комплексная методика математического описания, как исходных структур режущего инструмента, так и появление новых после эксплуатации. Она позволяет получить качественную и количественную информацию о распределении фаз.

Разработана методика получения гистограмм распределения сочетаний одинаковых цветов на фотографиях, которые определенным образом связаны между собой.

Разработан алгоритм описания структур в различных зонах режущего инструмента, для анализа сочетаний одинаковых цветов на фотографиях микроструктур при выявлении однотипных фаз.

Разработана методика разложения гистограмм по базисным фрагментам, которая позволяет получить информации о дисперсности структуры в различных областях ножа.

Список литературы:

1. Скобло Т.С. Статистический анализ износа режущего инструмента в перерабатывающей промышленности / Т.С. Скобло, С.П. Романюк // Хранение и переработка сельхозсырья.-2013.-№7. - С.46-48.
2. Смитлз К.Дж. Металлы. - М.: Металлургия, 1980. - 447с.
3. Скобло Т.С. Применение компьютерного анализа металлографических изображений при исследовании структуры высокохромистого чугуна /Т.С.Скобло, О.Ю. Клочко, Е.Л. Белкин //Заводская лаборатория. Диагностика материалов.–2012.-№ 6 (78).-С.35-42.
4. Скобло Т.С. Обоснование применения понятий уравнений гидродинамики Навье-Стокса для анализа металлографических изображений. /Т.С.Скобло, Е.Л.Белкин, О.Ю.Клочко //Materiały VII Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji [Europejska nauka XXI powieką – 2011].- Przemyśl: Nauka i studia, 2011.-V. 21. - C.94-96.
5. http://www.krugosvet.ru/enc/nauka_i_tehnika/fizika/PLAZMA.html
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. - М.: Мир, 1980. – 616с.
7. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006. — 816с.

Анотація

МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОЇ ОЦІНКИ ФАЗОВОГО СКЛАДУ СТАЛІ

Скобло Т. С., Бєлкін Є. Л., Романюк С. П.

Розроблено методику оцінки фазового складу різних зон ріжучого інструменту за допомогою математичних методів, яка дозволяє встановити особливості вихідних і формованих в процесі експлуатації структур ножів з інструментальної і нержавіючої сталей.

Abstract

TECHNIQUE OF MATHEMATICAL ESTIMATION OF THE STEEL PHASE COMPOSITION

Skoblo T.S., Belkin E.L., Romanyuk S.P.

The estimation technique of the phase composition of various zones of the cutting tools using the mathematical methods is developed, which allows to determine the features of the initial knives' structures and generated during the operation the knives' structures made of tool steel and stainless steel.