

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРОНТА ОРГАНИЧЕСКИХ УДОБРЕНИЙ, НАХОДЯЩИХСЯ В СТВОРЕ ВАЛКОВАТЕЛЯ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ ВАЛКА

Мельник В.И., д.т.н., проф., Романащенко А.А., доц.

*Харьковский национальный технический университет  
сельского хозяйства имени Петра Василенко*

*На основе теорий пластичности и предельного равновесия сплошных неупругих сред решается задача построения свободной поверхности органических удобрений, которые скапливаются впереди валкователя в процессе формирования валка.*

**Актуальность.** С одной стороны применение органических удобрений является мощнейшим фактором получения высоких и стабильных урожаев и, что важнее, восстановления природного плодородия почвы, а с другой — при некачественном внесении и, соответственно, не полной заделке, могут стать источником загрязнения окружающей среды. Кроме того, передозировки органики могут сказаться и на качестве сельхозпродукции. Из этого следует, что совершенствование технологий внесения органических удобрений является важной хозяйственной задачей.

**Состояние вопроса.** Органические удобрения следует распределять равномерно и заделывать немедленно. Чем лучше распределены удобрения, тем легче их заделать в почву. Наилучшие показатели равномерности, особенно если нормы внесения превышают 60 т на гектар, имеют валкообразователи-разбрасыватели [1]. Их технологический процесс предполагает формирование валка из куч удобрений и последующее разбрасывание. Чем равномернее валок, тем выше показатели качества разбрасывания. Математическое моделирование процессов, которые возникают в объеме удобрений, захваченных валкообразователем, это главный инструмент для обоснования параметров конструкции валкователя, обеспечивающего высокую равномерность плотности валка.

**Целью настоящих исследований** является математическое моделирование одного из элементов процесса формирования валка органических удобрений, а именно, описание фронта удобрений, находящихся в створе валкователя.

**Постановка задачи.** Условимся, что органические удобрения удовлетворяют модели пластической среды [2-7, 9], которая характеризуется пластической постоянной (коэффициентом пластичности)  $k$  и удельным весом  $\gamma$ .

В таком случае объемное напряженное состояние среды описывается представленным в декартовой системы координат  $Oxyz$  ортогональным тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , ( $i, j = x, y, z$ ), где парные индексы  $xx$ ,  $yy$  и  $zz$  обозначают нормальные напряжения действующие вдоль оси абсцисс, ординат

и аппликат.  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ ,  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  — касательные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , действующие на взаимно перпендикулярных площадках.

Условимся считать положительными сжимающие напряжения и главные нормальные напряжения  $\sigma_i$ , ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ), ранжировать в порядке возрастания индексов, когда  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$  [8-10].

В случае плоской задачи, которая решается в двумерной декартовой системе координат  $Oxy$  касательные напряжения  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$  и  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  равны нулю, а нормальные напряжения  $\sigma_{zz}$  не учитывают. Мы предполагаем именно плоскую задачу. Ориентацию системы координат  $Oxy$  зададим углом  $\alpha$  между направлением действия весовых сил и положительным направлением оси ординат. В нашем случае  $\alpha = 0$ , а, значит, ось  $Oy$  ориентирована вертикально вниз, а ось  $Ox$  — слева направо.

Воспользовавшись законом подобия [10], изучая общие закономерности (качественную сторону вопроса) все задачи решаем в безразмерных единицах.

С учетом принятого, система дифференциальных уравнений плоского пластического состояния среды (в работе [8] — система уравнений предельного равновесия) выглядит так [5, 7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial x} - 2k \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial s}{\partial y} + 2k \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \gamma \cos \alpha, \end{cases} \quad (1)$$

где:  $s = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)$  — полусумма наибольшего  $\sigma_3$  и наименьшего  $\sigma_1$  главных нормальных напряжений;  $\varphi$  — угол между линией действия  $\sigma_3$  и осью абсцисс  $Ox$ .

С учетом принятого условия пластичности Сен-Венана  $\max\{\sigma_{xy}\} = k$  [8], компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  определяются так:

$$\sigma_{xx} = s + k \cos 2\varphi, \quad \sigma_{yy} = s - k \cos 2\varphi, \quad \sigma_{xy} = k \sin 2\varphi. \quad (2)$$

Для системы (1) известно характеристическое решение. Опираясь на него любую практическую задачу можно свести к известным краевым задачам Коши, Римана, Гурса или к смешанным задачам, представляющим произвольную комбинацию первых трех [8]. Обычно такие задачи решаются методом конечных разностей или конечных элементов. Проблему составляют граничные условия, которые в большинстве случаев получить крайне сложно. В конечном итоге именно они определяют адекватность получаемых таким образом решений. Природа этой проблемы состоит в том, что в большинстве случаев до решения задачи положение и форма характеристик не известны.

Обойти упомянутую проблему можно, воспользовавшись соотношениями, полученными для системы (1) в работе [8]. Подобно соотношениям на характеристиках они выполняются вдоль линий параллельных осям декартовой системы координат и называются соотношениями на декартовых координатах. Их принципиальное отличие последних состоит, в том, что они выполняются вдоль прямых, положение и, разумеется, форма которых известна заранее.

Применительно к нашей задаче, когда  $\alpha = 0$ , упомянутые соотношения принимают следующий вид.

Соотношения на абсциссе:

$$x|_{y=\text{const}} = 2k \exp \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \text{ctg} \varphi + C_y^*, \quad (3)$$

$$s|_{y=\text{const}} = k \ln(\sin^2 \varphi) + C_y^+, \quad (4)$$

где:

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (5)$$

$$C_y^+ = \tilde{C}_y + k \ln(2(C^v)^2), \quad (6)$$

$\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$  и масштабирующий множитель  $C^v$  — постоянные величины.

Соотношения на ординате:

$$y|_{x=\text{const}} = (-1)^r 2k \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \text{tg} \varphi + C_x^*, \quad (7)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \ln(\cos^2 \varphi) + \gamma y + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (8)$$

$$s|_{x=\text{const}} = k \left[ \ln(\cos^2 \varphi) + (-1)^r 2\gamma \exp \frac{-\tilde{C}_x}{2k} \text{tg} \varphi \right] + C_x^+, \quad (9)$$

где

$$\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[, \quad \varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi, \quad (10)$$

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \varphi_{x_0}, \\ 2 & \text{при } \varphi < \varphi_{x_0}, \end{cases} \quad (11)$$

$$C_x^+ = \gamma C_x^* + k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (12)$$

$\tilde{C}_x, C_x^*$  — постоянные величины.

Масштабирующий множитель  $C^v$  остается постоянным для всей области пластичности, в то время, как постоянные  $\tilde{C}_y, C_y^*, C_y^+$  или  $\tilde{C}_x, C_x^*, C_x^+$  — изменяются всякий раз, когда меняется положение прямой параллельной оси системы координат, для которой применяются соотношения ((3) — (6)) или ((7) — (12)). Таким образом, решение любой прикладной задачи состоит в формулировке граничных условий и разработке алгоритма расчета, по сути бесконечного множества комплектов постоянных  $\tilde{C}_y, C_y^*, C_y^+$  и  $\tilde{C}_x, C_x^*, C_x^+$ .

Теперь об условии решаемой задачи. На рис. 1А изображен агрегат для внесения органических удобрений путем формирования валка из куч и последующего разбрасывания валка. Он состоит из трактора 1, валкователя 2 авторской конструкции [1] и барабанного разбрасывателя 3 [12]. На рис. 1В изображена схема валкователя, основу которого составляют левый 4 и правый 5 формирующие щиты, между которыми располагается окно для прохода валка, сформированного из предварительно отделенного от кучи массива  $L^uUR^uR^dL^d$  органических удобрений 6.

На рис. 1В ориентация оси ординат противоположна направлению движения валкователя. Окно для прохода валка  $L^dR^d$  симметрично относительно оси симметрии трактора, в то время как формирующие валок щиты  $L^uL^d$  и  $R^uR^d$  асимметричны. Последнее связано с необходимостью отделения части кучи от общего массива и дальнейшего формирования валка из отделенной части. Далее речь идет о процессе формировании валка и предполагается, что необходимый объем органических удобрений уже  $L^uUR^uR^dL^d$  попал в валкообразователь, но, все же, сбоку, т.е. асимметрично. Верхнюю границу удобрений, в общем случае выпуклую кривую, аппроксимирует ломаная линия  $L^uUR^u$ . В дальнейшем нам надлежит восстановить  $L^uUR^u$  теоретическим путем.

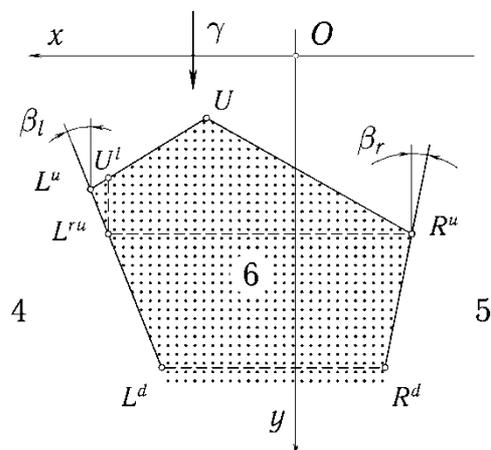
В реальности вся объемная конструкция валкователя располагается горизонтально. Но, чтобы в дальнейшем свести задачу к плоской постановке, условимся мысленно представлять, что вся эта конструкция располагается вертикально, а органические удобрения как бы засыпаны сверху внутрь валкователя. На рис. 1 ориентацию исследуемой системы задает вектор весовых сил  $\gamma$ , который по направлению совпадает с ориентацией оси ординат.

Принятое представление позволяет заменить силы трения, которые возникают между массивом удобрений и почвой, и по своему значению пропорциональны толщине слоя удобрений, на силы веса. Такая возможность обусловлена тем, что и силы трения в реальном случае увеличиваются по мере перехода от линии  $L^uR^u$  к линии  $L^dR^d$ , и внутренне давление среды обусловленное ее весом  $\gamma$  изменяется по тому же закону, если мыслить, что объем  $L^uR^uL^dR^d$  ориентирован вертикально. И силы трения о почву в реальности, и силы веса среды в модельном представлении одинаково

способствуют продвижению среды между щитами валкователя в направлении оси  $Oy$ . В конечном итоге получаем возможность применить уже описанные выше двумерные математические модели.



А



В

Рис.1 — Агрегат для внесения органических удобрений путем формирования валка из куч и его последующего разбрасывания: А) общий вид агрегата, состоящего из трактора 1, валкователя 2 и разбрасывателя 3; В) схема валкователя, где: 4, 5 — формирующие щиты; 6 — органические удобрения;  $P$  — растягивающая нагрузка, порождаемая истекающей средой;  $\gamma$  — весовые силы;  $\beta_l$  и  $\beta_r$  — углы ориентации ограждающих щитов по отношению к оси абсцисс системы координат  $Oxy$ ;  $L^d R^d$  — уровень нижнего обреза направляющих щитов;  $L^u R^u$  — горизонтальная линия, исходящая из точки  $R^u$ ;  $L^u U R^u$  — верхний (передний) уровень пластической среды, проходящей между формирующими щитами;  $L^u U^l$  — вертикаль, исходящая из точки  $L^u$

**Решение задачи. Для формирования граничных условий** обратимся к рис. 2, где ограничивающие щиты (две заштрихованные прямоугольные трапеции, которые соответствуют позициям 4 и 5 на рис. 1), для удобства изображены отодвинутыми от массива среды  $L^u U R^u R^d L^d$ . В образовавшихся зазорах показаны векторы касательных напряжений  $\sigma_{it}$  и реактивные по своей сути напряжения  $\sigma_{iv}$ . Ориентация и тех и других понятна исходя из физической сути решаемой задачи. Кроме того на рисунке показаны элементарные прямоугольные треугольники с катетами  $dx$  и  $dy$ . Знаки и направления действия напряжений проанализируем в процессе формирования граничных условий. В общем случае углы  $\theta_l$  и  $\theta_r$  не являются постоянными. Считаем, что ось ординат  $Oy$  проходит через вершину  $U$ , положение которой до решения задачи не определено, а, значит, координаты точек  $L^u$ ,  $U$ ,  $R^u$ ,  $R^d$  и  $L^d$  изначально неизвестны.

В отношении верхней свободной границы  $L^u U R^u$  можно однозначно утверждать, что на ней касательные напряжения отсутствуют и, следовательно, она полностью состоит из главных площадок, а значит:

$$\sigma_1 |_{L^uUR^u} = 0, \quad \sigma_3 |_{L^uUR^u} = 2k, \quad s |_{L^uUR^u} = k. \quad (13)$$

Кроме этого, пользуясь определением  $\varphi$ , как угла между линией действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_3$  и осью  $Ox$  системы координат, а также тем обстоятельством, что линия  $L^uUR^u$  полностью лежит на главных площадках, записываем:

$$\theta_l = \varphi |_{L^uU}, \quad \theta_r = \varphi |_{UR^u}. \quad (14)$$

Такой же вывод можно получить и пользуясь определением  $\varphi$ , как угла между линией действия большего из главных нормальных напряжений  $\sigma_{yx}$  и осью  $Ox$  системы координат, а также тем обстоятельством, что линия  $L^uUR^u$  полностью лежит на главных площадках.

Дополнительные ограничения, действующие на левой  $L^uL^d$  и правой  $R^uR^d$  границах сформулируем, прибегнув к анализу действующих на них условий внешнего трения (рис. 2). Определим предельные значения величин удельного трения  $\tau_l$  и  $\tau_r$ , действующих на левой и правой границах области пластичности:

$$\tau_i = f_i \sigma_{iv}, \quad i \in \{l, r\}. \quad (15)$$

где:  $f_i$  и  $\sigma_{iv}$  — коэффициенты внешнего трения и нормальные напряжения действующие на левой  $L^uL^d$  ( $i=l$ ) и правой  $R^uR^d$  ( $i=r$ ) границах области  $L^uUR^uR^dL^d$  (на левом и правом щитах валкователя).

Поскольку трение  $\tau_i$  уравновешивается касательными напряжениями  $\sigma_{i\tau}$ , ( $i \in \{l, r\}$ ), действующими вдоль границ  $L^uL^d$  и  $R^uR^d$ , то это значит, что  $\tau_i$  не всегда реализуется полностью, а значит справедливо неравенство

$$|\sigma_{i\tau}| \leq \tau_i = f_i \sigma_{iv}, \quad i \in \{l, r\}, \quad (16)$$

где знак модуль в левой части  $|\sigma_{i\tau}|$  обусловлен тем, что касательные напряжения  $\sigma_{i\tau}$  могут быть, как положительными так и отрицательными, в то время как, внешнее трение возможно только в случае сжимающих (положительных) нормальных напряжений, когда  $\sigma_{iv} > 0$ , а, значит, и удельное трение всегда положительное и  $\tau_i > 0$ .

Для того, что бы граничные условия (16) можно было использовать в дальнейшем необходимо касательную  $\sigma_{i\tau}$  и нормальную  $\sigma_{iv}$  компоненты

полного напряжения  $\sigma_i$ , действующего вдоль границ  $L^u L^d$  ( $i=l$ ) и  $R^u R^d$  ( $i=r$ ) выразить через компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (2).

С целью вычисления напряжений  $\sigma_{i\nu}$  и  $\sigma_{i\tau}$ , ( $i \in \{l, r\}$ ) используем элементарные прямоугольные треугольники, располагающиеся вдоль границ  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$ . На рис. 2 они выделены затемнением. Длина их катетов равна  $dx$  и  $dy$ . Ориентация нормальных составляющих напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$ , опять таки понятна исходя из физической сути задачи. А для того, что бы определиться с тем, как ориентированы касательные напряжения  $\sigma_{xy}$ , следует задействовать правило парности [8, 9, 13]. Строго говоря, оно формулируется применительно к поверхностям, пересекающимся под прямым углом, но, тем не менее, в случае плоского напряженного состояния справедливо следующее: *чем ближе к прямому величина угла треугольника, ограничивающего элементарный объем среды, тем справедливее положения упомянутого правила*. Опираясь на это замечание можно утверждать, что у вершины среднего по величине угла треугольника векторы  $\sigma_{xy}$  должны ориентироваться навстречу векторам  $\sigma_{i\tau}$ , а у вершины прямого угла векторы  $\sigma_{xy}$  должны быть попарно равны по модулю и направлены в противоположные стороны.

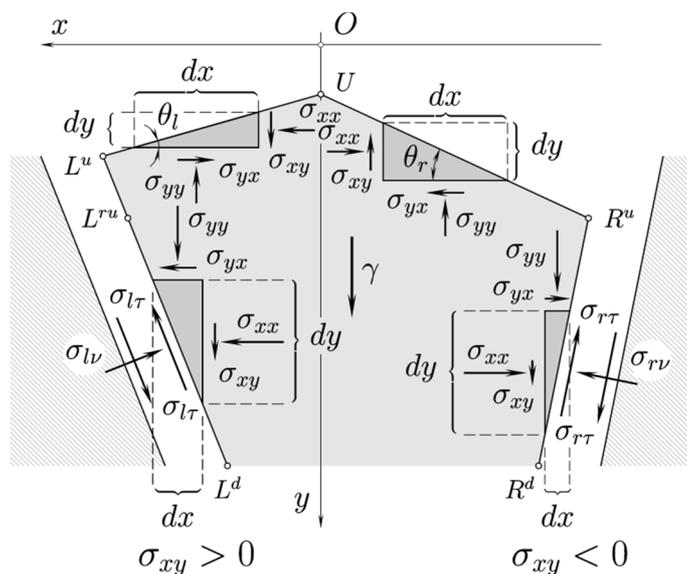


Рис. 2 — Иллюстрация граничных условий, действующих вдоль боковых линий контакта  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  среды с ограничивающими поверхностями

В отношении знаков касательных напряжений, воспользовавшись правилом из работы [8], можно сказать, что вблизи левой границы  $L^u L^d$   $\sigma_{xy} > 0$ , а вблизи правой  $R^u R^d$   $\sigma_{xy} < 0$ . Таким образом, при переходе слева направо через область  $L^u U R^u R^d L^d$  касательные напряжения  $\sigma_{xy}$  изменяют свой знак «+»

» на «–». Это согласуется с интервалами  $\varphi \in ]\varphi_{x_0} - \frac{1}{2}\pi, \varphi_{x_0} + \frac{1}{2}\pi[$ ,  $\varphi_{x_0} = \pm \frac{1}{2}\pi$ , (5) и выражением для  $\sigma_{xy}$  (2).

В дальнейшем, используя известный опыт, по обоснованию возможных интервалов значений угла  $\varphi$  [8], примем, что в условии (5)  $\varphi_{x_0} = \frac{1}{2}\pi$ , а, значит,

$$\varphi \in ]0, \pi[. \quad (17)$$

Для вычисления  $\sigma_{iv}$  запишем векторные уравнения силового баланса, состоящие из составляющих напряжений и весовых сил  $\frac{1}{2}\bar{\gamma}dxdy$ , действующих на элементарные треугольники в направлении нормали к их гипотенузам

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \overleftarrow{\sigma}_{iv} = \overleftarrow{\sigma}_{yy} dx + \overleftarrow{\sigma}_{xx} dy + \overleftarrow{\sigma}_{xy} dx + \overleftarrow{\sigma}_{xy} dy + \frac{1}{2} \overleftarrow{\gamma} dxdy, \quad i \in \{l, r\}, \quad (18)$$

где дифференциалы  $dx$ ,  $dy$  связаны соотношением  $dx:dy = \operatorname{tg} \beta_i = \operatorname{const}$  и являются бесконечно малыми величинами одного порядка. В случае предельного перехода, когда  $(dx, dy) \rightarrow 0$ , произведение  $dx \cdot dy$  дает бесконечно малую величину более высокого порядка, чем сами множители  $dx$  и  $dy$ . Таким образом, применив предельную теорему [8] и определения  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (2) переписываем выражения (18) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sin \beta_i} \sigma_{iv} &= \sigma_{yy} dx \sin \beta_i + \sigma_{xx} dy \cos \beta_i + \zeta (\sigma_{xy} dx \cos \beta_i + \sigma_{xy} dy \sin \beta_i); \\ \zeta &= \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

После преобразования они дают:

$$\sigma_{iv} = s_i + k \cos 2(\varphi - \zeta \beta_i); \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[. \end{cases} \quad (20)$$

Для вычисления  $\sigma_{ir}$  поступим аналогично выкладкам ((18) — (20)) и запишем векторные уравнения силового баланса, состоящие из составляющих напряжений и весовых сил  $\frac{1}{2}\bar{\gamma}dxdy$ , действующих на элементарные треугольники в направлении их гипотенуз

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \overleftarrow{\sigma}_{ir} = \overleftarrow{\sigma}_{yy} dx + \overleftarrow{\sigma}_{xx} dy + \overleftarrow{\sigma}_{xy} dx + \overleftarrow{\sigma}_{xy} dy + \frac{1}{2} \overleftarrow{\gamma} dxdy, \quad i \in \{l, r\}. \quad (21)$$

или в скалярном виде, с учетом определений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  (2) и предельной теоремы [8]

$$\frac{dx}{\sin \beta_i} \sigma_{i\tau} = \sigma_{yy} dx \cos \beta_i - \sigma_{xx} dy \sin \beta_i - \zeta (\sigma_{xy} dx \sin \beta_i - \sigma_{xy} dy \cos \beta_i), \quad (22)$$

где:  $i, \zeta$  — соответствует (19).

После преобразования они дают:

$$\sigma_{i\tau} = k \sin 2(\varphi - \zeta \beta_i); \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (23)$$

Далее подставляем значения  $\sigma_{iv}$  (20) и  $\sigma_{i\tau}$  (23) в условие (16). После введения замены  $s = s_i$ , где  $s_i$  значения величины  $s$  вдоль  $i$ -той границы ( $i \in \{l, r\}$ ), получаем искомую форму граничных условий (условий трения), которые действуют вдоль отрезков прямых  $L^u L^d$  ( $i = l$ ) и  $R^u R^d$  ( $i = r$ ):

$$\frac{k |\sin 2(\varphi - \zeta \beta_i)|}{s_i + k \cos 2(\varphi - \zeta \beta_i)} \leq f_i; \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (24)$$

Решив (24) относительно  $s_i$  получаем:

$$s_i \geq k \left[ \frac{|\sin 2(\varphi - \zeta \beta_i)|}{f_i} - \cos 2(\varphi - \zeta \beta_i) \right]; \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (25)$$

В отношении угловых точек  $L^u$  и  $R^u$  уточним, что в них должны выполняться как ограничение (13) так и условия трения (24). Следовательно выполнив подстановку  $s_i = s = k$  (13) в (24) и введя замену  $\varphi = \varphi^{iu}$  находим:

$$|\operatorname{tg}(\varphi^{iu} - \zeta \beta_i)| \leq f_i; \quad \zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi^{iu} \in ]0, \frac{1}{2} \pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi^{iu} \in ]\frac{1}{2} \pi, \pi[. \end{cases} \quad (26)$$

где:  $\varphi^{iu} \in \{\varphi^{lu}, \varphi^{ru}\}$  — значения угла  $\varphi$  в точках  $L^u$  ( $i=l$ ) и  $R^u$  ( $i=r$ ). Решив последнее относительно  $\varphi^{iu}$ , с учетом того, что  $0 \leq \beta_i < \frac{1}{2}\pi$ , находим:

$$\max\{0, (\beta_l - \arctg f_l)\} \leq \varphi^{lu} \leq \min\left\{(\beta_l + \arctg f_l), \frac{1}{2}\pi\right\}; \quad (27)$$

$$\max\left\{\frac{1}{2}\pi, (\pi - \beta_r - \arctg f_r)\right\} \leq \varphi^{ru} \leq \min\{(\pi - \beta_r + \arctg f_r), \pi\}. \quad (28)$$

На этом формулировка граничных условий заканчивается.

Минимально возможное (начальное) значение постоянной  $C_y^+$ , определяется условием пересечения кривых (25) и (4) на уровне  $s = s_i = k$ .

Перепишем условие (26) в виде равенства, применительно к правой границе  $R^u R^d$ , т.е. положив, что  $i=r$ :

$$|\operatorname{tg}(\varphi^{ru} + \beta_r)| = f_r. \quad (29)$$

В таком случае интересующее решение (29) будет таким:

$$\varphi^{ru} = \pi - \beta_r - \arctg f_r. \quad (30)$$

Решив соотношение на абсциссе (4) относительно постоянной интегрирования  $C_y^+$  и выполнив подстановку  $s = k$  и  $\varphi = \varphi^{ru}$  (30) получаем:

$$C_y^+ = k\{1 - \ln[\sin^2(\pi - \beta_r - \arctg f_r)]\}. \quad (31)$$

— минимальное значение постоянной  $C_y^+$ .

**Описание алгоритма** для расчета напряженного состояния среды, которое складывается вдоль взаимно перпендикулярных линий  $L^{ru}U^l$  и  $L^{ru}R^u$ .

**А.** Определяемся с положением системы координат  $Oxy$  по высоте, а также с расстоянием между формирующими щитами  $L^u L^d$  и  $R^u R^d$  валкователя и степенью заполнения его удобрениями.

- 1) Назначаем величину ординаты  $y^{ru} = y|_{L^{ru}R^u}$  горизонтали  $L^{ru}R^u$ .
- 2) Назначаем разность абсцисс  $x|_{L^{ru}} - x|_{R^u}$  точек  $L^{ru}$  и  $R^u$ , соответственно.
- 3) Вычисляем абсциссу  $x^{lru} = x|_{L^{ru}}$  точки  $L^{ru}$ :

$$x^{lru} = \frac{1}{2}(x|_{L^{ru}} - x|_{R^u}). \quad (32)$$

4) Вычисляем абсциссу  $x^{ru} = x|_{R^u}$  точки  $R^u$ :

$$x^{ru} = -x^{lru}. \quad (33)$$

• Теперь условие задачи уточнено.

**В.** Рассматриваем линию  $L^{ru}R^u$  (рис. 1В).

5) Используя (30) вычисляем  $\min\{\varphi^{ru}\}$ .

6) Используя (31) вычисляем  $\min\{C_y^+|_{L^{ru}R^u}\}$ .

• Теперь соотношение (4), выполняющееся вдоль  $L^{ru}R^u$  определено.

7) Вычисляем минимально возможное значение угла  $\varphi^{lru} = \varphi|_{L^{ru}}$ , как величину  $\varphi$  в точке пересечения соотношения (4) с условием трения (25), если в последнем принят знак равенства. Т.е. численно решаем уравнение

$$k \ln(\sin^2 \varphi) + C_y^+ = k \left[ \frac{|\sin 2(\varphi - \zeta\beta_i)|}{f_i} - \cos 2(\varphi - \zeta\beta_i) \right]; \quad (34)$$

$$\zeta = \begin{cases} +1, & \text{при } i = l, \varphi \in ]0, \frac{1}{2}\pi[; \\ -1, & \text{при } i = r, \varphi \in ]\frac{1}{2}\pi, \pi[; \end{cases}$$

относительно  $\varphi$  и полученное значение присваиваем  $\varphi^{lru}$ . Тут  $i=l$  и, соответственно,  $\zeta = +1$ . В дальнейшем значение  $\varphi^{lru}$  может быть увеличено до  $\frac{1}{2}\pi$ .

8) Воспользовавшись соотношением (3) получаем формулу

$$\tilde{C}_y = \gamma y + 2k \ln \left[ \frac{2k(\text{ctg } \varphi^{lru} - \text{ctg } \varphi^{ru})}{x^{lru} - x^{ru}} \right], \quad (35)$$

и вычисляем постоянную  $\tilde{C}_y|_{L^{ru}R^u}$ .

9) Из (3) по формуле

$$C_y^* = \begin{pmatrix} x^{lru} \\ x^{ru} \end{pmatrix} - 2k \exp \left( \frac{\gamma y - \tilde{C}_y}{2k} \right) \text{ctg} \begin{pmatrix} \varphi^{lru} \\ \varphi^{ru} \end{pmatrix} \quad (36)$$

вычисляем постоянную  $C_y^*|_{L^{ru}R^u}$ .

• Теперь соотношение (3), выполняющееся вдоль  $L^{ru}R^u$  определено.

10) Из (6) по формуле

$$C^v = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{C_y^+ - \tilde{C}_y}{2k}\right), \quad (37)$$

вычисляем постоянную  $C^v$ . Ее значение справедливо для всей области пластичности.

- Теперь напряженное состояние модельной среды полностью определено вдоль горизонтали  $L^{ru}R^u$ .

**С.** Рассматриваем линию  $L^{ru}U^l$  (рис. 1В).

11) Воспользовавшись соотношением (4) вычисляем полусумму напряжений  $s|_{L^{ru}}$ , действующих в точке  $L^{ru}$ .

12) Воспользовавшись решением (8) относительно постоянной  $\tilde{C}_x$

$$\tilde{C}_x = s - k \ln(\cos^2 \varphi) - \gamma y - k \ln(2(C^v)^2), \quad (38)$$

и выполнив соответствующие подстановки находим значение  $\tilde{C}_x|_{L^{ru}U^l}$ .

13) Решив соотношение (7) относительно постоянной  $C_x^*$

$$C_x^* = y - (-1)^r 2k \exp\left(\frac{-\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{tg} \varphi\right), \quad r = \begin{cases} 1 & \text{при } \varphi > \frac{1}{2}\pi, \\ 2 & \text{при } \varphi < \frac{1}{2}\pi, \end{cases} \quad (39)$$

и выполнив соответствующие подстановки находим значение  $C_x^*|_{L^{ru}U^l}$ .

14) Воспользовавшись выражением (12) вычисляем постоянную  $C_x^+|_{L^{ru}U^l}$ .

- Теперь напряженное состояние модельной среды полностью определено вдоль вертикали  $L^{ru}U^l$ .

**Д.** Для определения угла  $\varphi^{ul} = \varphi|_{U^l}$ , согласно требованию (13), рассматриваем условия достижения равенства  $s|_{U^l} = k$ .

15) Назначаем возможный интервал значение угла  $\varphi^{ul}$ :

$$\varphi^{ul} = \varphi|_{U^l} \in ]0, \varphi^{lru}]. \quad (40)$$

16) В пределах интервала (40), методом деления отрезка пополам, находим такое значение угла  $\varphi|_{U^l}$  при котором достигается равенство  $s|_{U^l} = k$ .

17) Воспользовавшись соотношениями (7) вычисляем значение ординаты  $y|_{U^l}$  точки  $U^l$  кривой верхней свободной границы  $L^uUR^u$ .

- Теперь напряженное состояние модельной среды полностью согласовано вдоль двух взаимно перпендикулярных сечений определяемых линиями  $L^{ru}R^u$  и  $L^{ru}U^l$ .

Е. Построение следующей точки на кривой верхней свободной границы  $L^uUR^u$  удобрений. При этом точка  $L^{ru}$  по горизонтали перемещается вправо, а верхняя точка  $U^l$ , находясь на вертикали  $L^{ru}U^l$  обозначает фрагмент  $U^lUR^u$  свободной границы  $L^uUR^u$ .

18) Определяемся с элементарным приращением  $\Delta_\varphi$  угла  $\varphi^{lu} = \varphi|_{L^{ru}}$ .

19) Увеличиваем значение  $\varphi^{lu} = \varphi|_{L^{ru}}$  на величину  $\Delta_\varphi$ .

20) Повторяем пункты 8) ... 16).

Далее на рис. 3 представлены расчетные кривые фрагмента  $U^lUR^u$  свободной поверхности  $L^uUR^u$ , полученные путем применения описанного алгоритма с использованием исходных данных табл. 1.

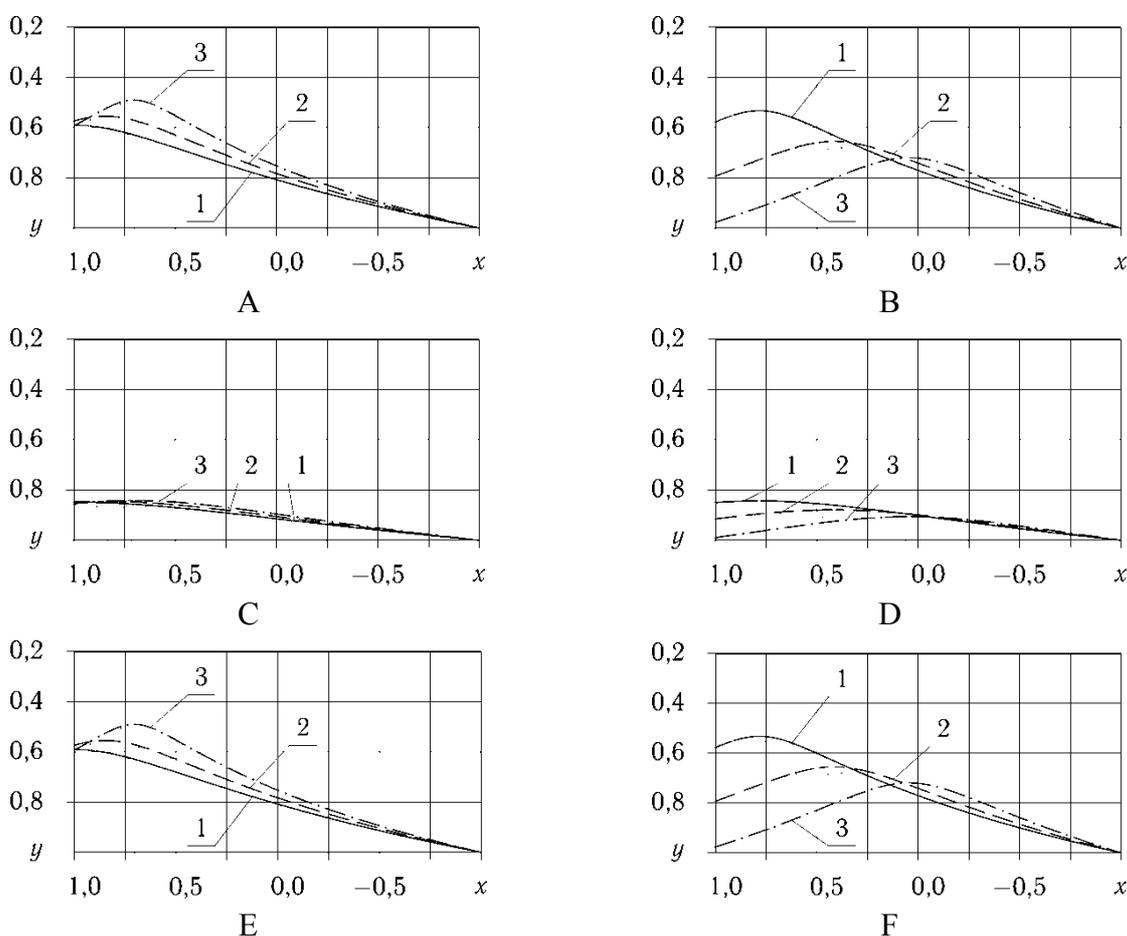


Рис. 3 — Построенные в соответствии с исходными данными из табл. 1 линии фрагмента  $U^lUR^u$  свободной границы  $L^uUR^u$

Из анализа рисунков следуют выводы.

Таблица 1 — Исходные данные для построения рис. 3

Параметры:			Номер:	
название	обозначение	величина	рисунка	линии

Общие данные для всех рисунков и графиков					
1	Ордината горизонтального сечения $L^r R^u$	$y^r$	1,0 — “—	A, C, E B, D, F	1, 2, 3 — “—
2	Разность абсцисс для точек $L^r$ и $R^u$	$(x _{L^r} - x _{R^u})$	2,0 — “—	A, C, E B, D, F	1, 2, 3 — “—
3	Угол наклона правого щита валкователя $R^u R^d$	$\beta_r$	$\pi/12$ — “—	A, C, E B, D, F	1, 2, 3 — “—
Общие данные для рисунков A, C, E					
4	Коэффициент трения для левой границы $L^u L^d$	$f_l$	tg(0,5)	A, C, E	1, 2, 3
5	Коэффициент трения для правой границы $R^u R^d$	$f_r$	tg(0,3)	A, C, E	1, 2, 3
Общие данные для рисунков B, D, F					
6	Угол наклона левого щита валкователя $L^u L^d$	$\beta_l$	$\pi/6$	B, D, F	1, 2, 3
Вариационная часть для рисунков A, C, E и B, D, F					
7	Коэффициент пластичности	$k$	1,0 2,0	A, B, C, D E, F	1, 2, 3 — “—
8	Удельный вес модельной среды	$\gamma$	5,0 10,0	A, B C, D, E, F	1, 2, 3 — “—
Вариационная часть для отдельных графиков					
9	Угол наклона левого щита $L^u L^d$ валкователя	$\beta_l$	$\pi/6$ $\pi/8$ $\pi/10$	A, C, E — “— — “—	1 2 3
10	Коэффициент трения для левой границы $L^u L^d$	$f_l$	tg(0,5) tg(0,4) tg(0,3)	B, D, F — “— — “—	1 2 3
11	Коэффициент трения для правой границы $R^u R^d$	$f_r$	tg(0,3) tg(0,4) tg(0,5)	B, D, F — “— — “—	1 2 3

## Выводы

1. Общий характер кривых свободного контура  $L^*UR^*$  соответствует действительности.

2. Чем меньше угол  $\beta_l$  наклона левого щита валкователя, тем сильнее вправо смещается максимум кривой свободного контура  $L^*UR^*$ .

3. Увеличение удельного веса модельной среды  $\gamma$  при условии, что коэффициент пластичности  $k$  сохраняет свое значение, приводит к «проседанию среды между щитами», т.е. к уменьшению высоты максимума на кривой  $L^*UR^*$  свободной границы.

4. Пропорциональное увеличение коэффициента пластичности  $k$  и удельного веса среды  $\gamma$  в одно и то же количество раз не приводит к изменению характера кривых свободного контура  $L^*UR^*$ .

5. Уменьшение коэффициента внешнего трения на левом щите валкователя  $f_l$  и пропорциональное увеличение коэффициента трения, действующего на правом щите  $f_r$ , приводит к «провалу среды» вдоль щита с меньшим трением и пропорциональному смещению максимума на кривой свободного контура  $L^*UR^*$  в сторону щита с более интенсивным трением.

6. Из предыдущих выводов следует, что увеличение углов наклона щитов валкователя  $\beta_l$  и  $\beta_r$ , а также коэффициентов внешнего трения  $f_l$  и  $f_r$ , действующего на них, приводит к увеличению транспортирующей способности валкователя, т.е. к увеличению высоты максимума на кривой свободного контура  $L^*UR^*$ . При определенных значениях  $\beta_l$ ,  $\beta_r$ ,  $f_l$  и  $f_r$  транспортирующая способность валкователя может стать избыточной.

7. В качественном смысле все перечисленные пункты 1) — 5) полностью согласуются с физическим смыслом решаемой задачи, а, следовательно, они могут быть использованными при обосновании параметров конструкции валкователя органических удобрений.

## Список использованных источников

1. Бондаренко А.М. Механико-технологические основы процессов производства и использования высококачественных органических удобрений [Текст]: монография / А.М. Бондаренко. — Зерноград: ВНИПТИМЭСХ, 2001. — 289 с.
2. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования материалов [Текст] / А.Д. Томленов. — М.: Металлургия, 1972. — 408 с.
3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н.Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1975. — 398 с.
4. Ключников В.Д. Математическая теория пластичности [Текст] / В.Д. Ключников. — М.: Изд.-во Моск. ун-та, 1979. — 208 с.
5. Писаренко Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести [Текст]: Справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. — К.: Наукова думка, 1981. — 496 с.
6. Основы теории упругости и пластичности [Текст]: Учеб. для

- машиностроит. спец. Вузов/В.Г. Зубчанинов.- М.:Высш.шк., 1990. - 368 с.
7. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле [Текст] / Н.С. Можаровский // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: в 2 ч., — К.: Выща школа, 1991. — Ч. 1. — 264с.
  8. Мельник В. И. Предельное равновесие вязных и сыпучих сред [Текст]: монография / В.И.Мельник.— Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, — 357 с.
  9. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов [Текст]: учебник для вузов / А.Е. Саргсян. — М.: Высшая школа, 2000. — 286 с.
  10. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды [Текст]: / В.В. Соколовский.— [4-еизд.].— М.: Наука, 1990.— 272с.
  11. А.с. 1817972 СССР, МПК<sup>4</sup> А 01 С 3/08. Валкообразователь органических удобрений [Текст] / Н.З. Макеев, А.А. Романашенко, А.И. Аникеев, А.Н. Красноруцкий — Заявл. 30.04.1991, № 4932853/30-15, Опубл. в Б.И. 1993, № 20.
  12. А.с. 1459621 СССР, МПК<sup>4</sup> А 01 С 3/06. Разбрасыватель органических удобрений [Текст] / Н.З. Макеев, А.С. Зайцев, А.И. Никитенко, А.А. Немцев А.И. Аникеев, А.Н. Красноруцкий — Заявл. 27.08.1986, № 4109627/30-15, Опубл. в Б.И. 1989, № 7.
  13. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов / В.И.Феодосьев. — 9-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 512 с.

## Анотація

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФРОНТУ ОРГАНІЧНИХ ДОБРІВ, ЯКИЙ ЗНАХОДИТЬСЯ У СТВОРІ ВАЛКУВАЧА В ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ ВАЛКА**

Мельник В., Романашенко О.

*На основі теорії пластичності та граничного рівноважся суцільних непружних середовищ вирішується задача побудови вільної поверні органічних добрив, які скопилися спереду валкувача у процесі формування валка.*

## Abstract

### **MATHEMATICAL MODELING OF FRONT ORGANIC FERTILIZER, WHICH IS IN CREATE SWATH IN THE FORMATION OF THE ROLLS**

V. Melnik, A. Romanashenko

*Based on the theory plasticity and inelastic continuum limit balance environments to solve the problem of building a free Turn Manure that accumulated in front of the swath formation process to roll.*