

УДК 631.362.2

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ИЗМЕЛЬЧЕНИЮ ЗЕРНА

**Нанка А.В., профессор**

*(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка)*

*Приведено аналитическое решение второй краевой задачи упругости применительно к измельчению фуражного зерна роторной дробилкой. Получены математические зависимости интенсивности касательных напряжений, которые образуются в процессе резания зерна и мощности необходимой для резания зерна и ее зависимости от предельного усилия зуба фрезы на зерно и числа оборотов ротора дробилки.*

Данная статья является продолжением решения задачи упругого деформирования фуражного зерна при измельчении [1].

В теории упругости часто используется замена разыскиваемых переменных, позволяющая упростить решение задачи. Одной из таких замен является представление Папковича-Нейбера [2, 3]. Вводятся одна скалярная  $\Phi$  и одна векторная  $\vec{\psi}$  величины, связанные с вектором перемещений соотношением:

$$\vec{u} = \nabla(\Phi + \vec{R} \cdot \vec{\psi}) - 4(1-\nu)\vec{\psi} \quad (1)$$

и в случае отсутствия массовых сил удовлетворяющих уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\vec{\psi} = 0 \quad (2)$$

Так как, соотношение (1) связывает между собой три компоненты вектора перемещений с четырьмя величинами  $\Phi, \vec{\psi}$ , то в выборе последних имеется некоторый произвол. Воспользуемся этим произволом и положим третью компоненту вектора  $\vec{\psi}$  равной нулю  $\psi_z = 0$ .

Данный метод позволяет перейти от сложной системы уравнений равновесия (34)-(36) [1] к более простым и достаточно изученным уравнениям Лапласа. Запишем их в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial z^2} - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial z^2} - \frac{\psi_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

Соотношение (1) в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r} (\Phi + r\psi_r) - 4(1-\nu)\psi_r \\ u_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Phi + r\psi_r) - 4(1-\nu)\psi_\phi \\ u_z &= \frac{\partial}{\partial z} (\Phi + r\psi_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Применим соотношения, выражающие компоненты тензора деформаций через вектор перемещений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4(1-\nu)\psi_r \right) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{r \partial \phi} \left( 4\psi_r \nu + \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4\psi_r \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{r \partial \phi} (r\psi_r + \Phi) - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (r\psi_r + \Phi) - \frac{4(1-\nu)\psi_\phi}{r} \right) \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4(1-\nu)\psi_r \right) \right] \\ \varepsilon_{22} &= \left( \frac{\partial}{r \partial \phi} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{r \partial \phi} - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_r + \Phi) - 4(1-\nu)\psi_r \right) \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{r \partial \phi} (r\psi_r + \Phi) - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) + \frac{\partial^2}{r \partial \phi \partial z} (r\psi_r + \Phi) \right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Тогда компоненты тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \\ &= 2\mu \left[ \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial}{r \partial \phi} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{r \partial \phi} - 4(1-\nu)\psi_r \right) + \right. \\ &+ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( 4\psi_r \nu + \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4\psi_r \right) + \\ &\left. + \frac{\left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} \right) \nu}{r(1-2\nu)} + \frac{\nu \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial z^2}}{1-2\nu} - 4 \frac{(1-\nu)\nu \psi_r}{(1-2\nu)r} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{r\partial\phi} - 4(1-\nu) \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{r\partial\phi} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4(1-\nu)\psi_r \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial\phi} - 4(1-\nu) \frac{\psi_\phi}{r} \right] \\
\sigma_{1,3} &= \mu \left[ \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial r\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( 4\psi_r\nu + \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_r + \Phi) - 4\psi_r \right) \right] \\
\sigma_{22} &= \\
&= 2\mu \left[ \frac{1-\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial}{r\partial\phi} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{r\partial\phi} - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) - \right. \\
&- \left. \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4(1-\nu)\psi_r \right) + \right. \\
&+ \left. 2 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - \frac{\nu}{-1+2\nu} \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial z^2} + 4 \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} \frac{\psi_r}{r} \right] \\
\sigma_{23} &= \mu \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{r\partial\phi} (r\psi_r + \Phi) - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) + \frac{\partial^2}{r\partial\phi\partial z} (r\psi_r + \Phi) \right] \\
\sigma_{33} &= \\
&= 2\mu \left[ \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 (r\psi_r + \Phi)}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4(1-\nu)\psi_r \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial}{r\partial\phi} \left( \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{r\partial\phi} - 4(1-\nu)\psi_\phi \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\nu}{(1-2\nu)r} \frac{\partial (r\psi_r + \Phi)}{\partial r} - 4 \frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)} \frac{\psi_r}{r} \right]
\end{aligned}$$

Представление поверхностных сил  $\vec{p}_n$  в виде (33) [1] с учетом разложения в ряд (41) [1] и линейности краевой задачи (принцип суперпозиции в механике) позволяет разыскивать решение задач (3), (5) в виде рядов:

$$\Phi(r, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(r, \phi) \omega_m(z), \quad \vec{\psi}(r, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \vec{\psi}_m(r, \phi) \omega_m(z), \quad (7)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими уравнениям

$$\frac{\partial^2 \Phi_m(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_m(r, \phi)}{\partial \phi^2} - \lambda_m^2 \Phi_m(r, \phi) = 0$$

$$\left( \lambda_m^2 = \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right)$$
(8)

$$\frac{\partial^2 \psi_{mr}(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{mr}(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_{mr}(r, \phi)}{\partial \phi^2} -$$

$$- \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) \psi_{mr}(r, \phi) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_{m\phi}(r, \phi) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{m\phi}(r, \phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{m\phi}(r, \phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_{m\phi}(r, \phi)}{\partial \phi^2} -$$

$$- \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) \psi_{m\phi}(r, \phi) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{mr}(r, \phi)}{\partial \phi} = 0$$
(9)

Граничные условия при  $r = R_0$  в этом случае принимают вид:

$$\frac{2\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \psi_r(r, \phi)}{r \partial \phi^2} + 2 \frac{(1-\nu)}{1-2\nu} r \frac{\partial^2 \psi_r(r, \phi)}{\partial r^2} - 8 \frac{(1-\nu)\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \psi_\phi(r, \phi)}{r \partial \phi} -$$

$$- 2 \frac{(4\nu^2 - 7\nu + 2)}{1-2\nu} \frac{\partial \psi_r(r, \phi)}{\partial r} =$$
(10)

$$\frac{(4\pi^2 m^2 r^2 - 4\pi^2 m r^2 + \pi^2 r^2 - 16l^2 \nu + 12l^2) \nu}{2r l^2 (1-2\nu)} \psi_r(r, \phi) = \frac{1}{\mu} F_m \cos \phi$$

$$\frac{\partial^2 \psi_r(r, \phi)}{\partial r \partial \phi} - 2(1-\nu) \frac{\partial \psi_\phi(r, \phi)}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial \psi_r(r, \phi)}{r \partial \phi} + 2(1-\nu) \frac{\psi_\phi(r, \phi)}{r} = 0$$
(11)

$$r \frac{\partial \psi_r(r, \phi)}{\partial r} - (1-2\nu) \psi_r(r, \phi) = 0$$
(12)

Краевая задача для уравнений (8), (9) с граничными условиями (10)-(12) допускает решение в виде комбинации тригонометрических функций  $\cos \phi$ ,  $\sin \phi$  с коэффициентами, зависящими от переменной  $r$ :

$$\Phi_m(r, \phi) = A(r) \cos \phi + B(r) \sin \phi$$

$$\psi_{mr}(r, \phi) = A_r(r) \cos \phi + B_r(r, \phi) \sin \phi$$

$$\psi_{m\phi}(r, \phi) = A_\phi(r) \cos \phi + B_\phi(r, \phi) \sin \phi$$
(13)

После подстановки этих соотношений в уравнения и граничные условия, выделения слагаемых, содержащих одинаковые тригонометрические функции, приравнивания коэффициентов при этих функциях нулю, получим систему уравнений и граничных условий для  $A, B, A_r, B_r, A_\varphi, B_\varphi$ . Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный вид уравнений, которым удовлетворяют функции  $A(z), B(z)$ .

$$\frac{d^2 A(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA(r)}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) A(r) = 0 \quad (14)$$

и которым удовлетворяют функции  $A_r(r), B_r(r), A_\varphi(r), B_\varphi(r)$

$$\frac{d^2 A_r(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dA_r(r)}{dr} - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) A_r(r) - 2 \frac{2}{r^2} B_\varphi(r) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 B_\varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB_\varphi(r)}{dr} - \frac{2}{r^2} A_r(r) - \left( \frac{2}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) B_\varphi(r) = 0$$

Уравнение (14) имеет два фундаментальных решения в виде модифицированной функции Бесселя  $I_1(\lambda_m r)$  и функции Макдональда  $K_1(\lambda_m r)$  первого порядка [4]. Как известно, функция Макдональда является неограниченной в точке  $r=0$ . Поэтому общее решение уравнения для  $A(r), B(r)$ , ограниченное на интервале  $[0, R_0]$  имеет вид [5]:

$$A(r) = C_1 I_1(\lambda_m r), \quad B(r) = D_1 I_1(\lambda_m r), \quad (16)$$

с произвольными постоянными  $C_1, D_1$ .

Система уравнений (15) может быть сведена к двум независимым уравнениям, содержащим только какую либо одну функцию. Так для суммы  $U = A_r + B_\varphi$  и разности  $V = A_r - B_\varphi$  имеем два следующих уравнения:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} - \left( \frac{4}{r^2} + \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} \right) U(r) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 V(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} - \frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} V(r) = 0 \quad (18)$$

являющиеся уравнениями Бесселя и имеющими фундаментальные решения в виде модифицированной функции Бесселя  $I_2(\lambda_m r)$  и функции Макдональда  $K_2(\lambda_m r)$  для уравнения (17) и нулевого порядка  $I_0(\lambda_m r), K_0(\lambda_m r)$  для уравнения (18). Тогда общее решение, ограниченное в нуле, уравнений (15) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A_r &= C_2 I_2(\lambda_m r) + D_2 I_0(\lambda_m r), & B_r &= C_3 I_2(\lambda_m r) + D_3 I_0(\lambda_m r) \\ A_\varphi &= C_3 I_2(\lambda_m r) - D_3 I_0(\lambda_m r), & B_\varphi &= C_2 I_2(\lambda_m r) - D_2 I_0(\lambda_m r) \end{aligned} \quad (19)$$

куда входят также произвольные постоянные  $C_2, D_2, C_3, D_3$ .

Для нахождения этих постоянных воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_0, \varphi, z) &= F(z) \cos \varphi \\ \tau_{r\varphi}(R_0, \varphi, z) &= 0 \\ \tau_{rz}(R_0, \varphi, z) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Подстановка сюда разыскиваемых переменных, содержащих произвольные постоянные, выделение слагаемых, содержащих одинаковые тригонометрические функции, и приравнивания коэффициентов при этих функциях нулю приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно  $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ :

$$\begin{cases} A_{11}C_1 + A_{12}D_1 + A_{13}C_2 + A_{14}D_2 + A_{15}C_3 + A_{16}D_3 = B_1 \\ A_{21}C_1 + A_{22}D_1 + A_{23}C_2 + A_{24}D_2 + A_{25}C_3 + A_{26}D_3 = 0 \\ A_{31}C_1 + A_{32}D_1 + A_{33}C_2 + A_{34}D_2 + A_{35}C_3 + A_{36}D_3 = 0 \\ A_{41}C_1 + A_{42}D_1 + A_{43}C_2 + A_{44}D_2 + A_{45}C_3 + A_{46}D_3 = 0 \\ A_{51}C_1 + A_{52}D_1 + A_{53}C_2 + A_{54}D_2 + A_{55}C_3 + A_{56}D_3 = 0 \\ A_{61}C_1 + A_{62}D_1 + A_{63}C_2 + A_{64}D_2 + A_{65}C_3 + A_{66}D_3 = 0 \end{cases} \quad (21)$$

где ненулевые коэффициенты матрицы системы уравнений равны:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{\pi(2m-1)}{R_0 l} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{4\pi^2 R_0^2 m(m-1) + \pi^2 R_0^2 + 8l^2}{4R_0^2 l^2} I_1(\lambda_m R_0) \\ A_{12} &= \frac{\pi^2 (2m-1)^2 R_0 (1-\nu)}{l^2 (1-2\nu)} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{\pi(2m-1)(4\nu^2 - 10\nu + 5)}{2l(1-2\nu)} I_1(\lambda_m R_0) - \\ &\quad - \frac{4\pi^2 R_0^2 m(m-1)\nu + \pi^2 R_0^2 \nu - 64l^2 \nu^2 + 112l^2 \nu - 40l^2}{4R_0 l^2 (1-2\nu)} I_2(\lambda_m R_0) \\ A_{15} &= \frac{\pi^2 (2m-1)^2 R_0}{4l^2} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) \\ B_1 &= \frac{F_m}{2\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{23} &= \frac{\pi^2 (2m-1)^2 R_0 (1-\nu)}{4l^2 (1-2\nu)} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{\pi(2m-1)(4\nu^2 - 10\nu + 5)}{2l(1-2\nu)} I_1(\lambda_m R_0) - \\
&\quad - \frac{4\pi^2 R_0^2 m(m-1)\nu + \pi^2 R_0^2 \nu - 32l^2 \nu^2 + 80l^2 \nu - 40l^2}{4R_0 l^2 (1-2\nu)} I_2(\lambda_m R_0) \\
A_{24} &= -\frac{\pi(2m-1)}{2R_0 l} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{4\pi^2 R_0^2 m(m-1) + \pi^2 R_0^2 + 8l^2}{4R_0^2 l^2} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{26} &= -\frac{8\pi^2 R_0^2 m(m-1)(2\nu-1) + \pi^2 R_0^2 (2\nu-1)^2 - 32l^2 \nu(\nu-1)}{4R_0 l^2 (1-2\nu)} I_0(\lambda_m R_0) + \\
&\quad + \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{33} &= -\frac{\pi(2m-1)(1-2\nu)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) + 2\frac{1-2\nu}{R_0} I_2(\lambda_m R_0) \\
A_{34} &= \frac{\pi(2m-1)}{2R_0 l} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{2}{R_0^2} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{36} &= -\frac{4(1-\nu)}{R_0} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{41} &= -\frac{\pi(2m-1)}{2R_0 l} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{2}{R_0^2} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{42} &= \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) - 2\frac{4\nu-5}{R_0} I_2(\lambda_m R_0) \\
A_{45} &= \frac{\pi(2m-1)(1-2\nu)}{2l} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{51} &= -\frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{\pi(2m-1)}{2R_0 l} I_1(\lambda_m R_0) \\
A_{52} &= -\frac{R_0 \pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_1(\lambda_m R_0) - \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_2(\lambda_m R_0) \\
A_{55} &= \frac{\pi(2m-1)(1-2\nu)}{2l} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{R_0 \pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_1(\lambda_m R_0)
\end{aligned}$$

$$A_{63} = -\frac{R_0 \pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_1(\lambda_m R_0) - \frac{(2\nu-3)\pi(2m-1)}{2l} I_2(\lambda_m R_0)$$

$$A_{64} = -\frac{\pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_0(\lambda_m R_0) + \frac{\pi(2m-1)}{2lR_0} I_1(\lambda_m R_0)$$

$$A_{66} = \frac{\pi(2m-1)(1-2\nu)}{2l} I_0(\lambda_m R_0) - \frac{R_0 \pi^2 (2m-1)^2}{4l^2} I_1(\lambda_m R_0)$$

**Алгоритм решения задачи.** Зададим значение силы  $P_x$  нагружения зерна фрезой и с помощью уравнения (44) [3] определим значение параметра  $a$ , тем самым задавая распределение поверхностных сил на  $\Sigma$ . Определяем коэффициенты и правые части системы уравнений (21). Решая систему, определяем постоянные  $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ . Используя соотношения (7), (13), (16), (19), получаем выражение для интенсивности касательных напряжений  $T$ :

$$T^2 = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right] + \tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{zr}^2. \quad (22)$$

Полученное значение  $T$  сравниваем с предельным значением касательных напряжений  $\tau_s$ . Эта процедура позволяет рассматривать критерий пластичности:

$$T(P_x) - \tau_s = 0, \quad (23)$$

как нелинейное уравнение функции одной переменной  $\Omega \equiv T(P_x) - \tau_s$ .

Критерию пластичности (23) соответствует значение  $P_x$  являющееся корнем этого уравнения. Для нахождения корня уравнения (23) можно рекомендовать метод деления отрезка пополам, когда корень лежит внутри заранее известного интервала, например,  $[0, P_{x,\max}]$ . Функция  $\Omega(P_x)$  должна иметь различные знаки на концах указанного интервала. Разбиваем интервал пополам, проверяем наличие различия знаков на каждом из подинтервалов. Затем повторяем процедуру разбиения вложенных подинтервалов до достижения необходимой точности нахождения корня  $P_x^*$ .

После нахождения предельного усилия  $P_x^*$ , оказываемого на зерно, находим мощность, развиваемую устройством, необходимую для резки зерна. Обозначим через  $t_3$  шаг зубьев фрезы ( $t_3 > d_3 \equiv 2R_0$ ) и рассмотрим процесс резки за время  $\Delta t$  поворота фрезы на угол, соответствующий  $t_3$ :  $\Delta t = t_3 / \omega R_c$ . При повороте на угол  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  происходит резка зерна. Будем считать, что



$P_x^*$  здесь величина постоянная. Работа, совершаемая на этом угле поворота при резке зерна с двух концов, равна  $A_{резки} = 2P_x^* R_c \Delta\varphi$ . На оставшемся угле поворота, равном  $t_3 / R_c - \Delta\varphi$ , когда зерно уже разрезано, работа не совершается. Т.о. за поворот на угол  $t_3 / R_c$  суммарная работа резки зерна равна  $A_{резки}$ . Тогда мощность для одного зерна определяется отношением:

$$N_1 = \frac{A_{резки} \omega R_c}{t_3} = \frac{2P_x^* R_c^2 \Delta\varphi \omega}{t_3}$$

Если учесть то, что количество зубьев фрезы в одном ряду равно  $N_3$ , то мощность устройства, затрачиваемая на резку, будет равна:

$$N = N_3 N_1 = N_3 \frac{2P_x^* R_c^2 (\varphi_2 - \varphi_1) \omega}{t_3}$$

Под производительностью устройства будем понимать объем зерна, проходящего за единицу времени через рабочую зону

$$Q = N_3 \frac{\pi R_0^2 2l}{t_3} \omega R_c = \frac{\pi^2}{60} N_3 \frac{ld_3^2 R_c f}{t_3} \quad (24)$$

В соответствии с описанным алгоритмом были проведены вычисления с основным набором данных:  $D_{фрезы}=0.15$  м;  $l_{зерна}=0.005$  м;  $d_{зерна}=0.003$  м;  $t_3=0.006$  м;  $\mu=4_{10}7$  н.м<sup>-2</sup>;  $\tau_s=2_{10}7$  н.м<sup>-2</sup>;

На рис.1 приведены графики распределения напряжений  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$ ,  $\sigma_z$  и  $T$  в полуплоскости  $(r, z)$

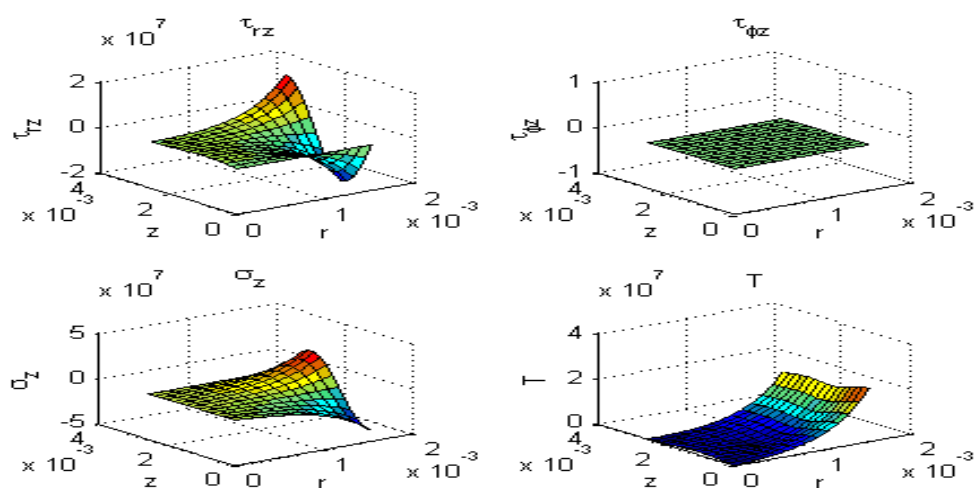


Рисунок 1 – Зависимости распределения напряжений  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\varphi z}$ ,  $\sigma_z$  и  $T$  в плоскости  $(r, z)$

Из графиков видно, что доминирующими являются нормальные напряжения.

На рис. 2 изображены линии уровня для интенсивности  $T(r, \varphi, z)$ , где жирными линиями указаны точки, в которых достигается критерий пластического течения.

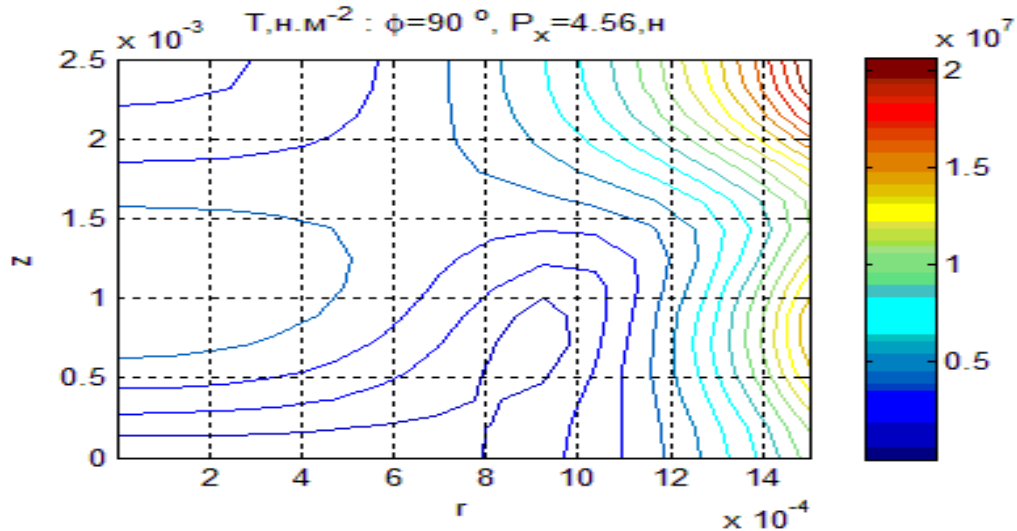


Рисунок 2 – Линии уровня для интенсивности  $T(r, \varphi, z)$

Из графиков следует, что в начале пластические зоны образуются в полуплоскости  $\varphi = 180^\circ$  посередине тела (при  $z = 0$ ) вблизи поверхности  $\Sigma$  (при  $r = R_0$ ).

На рис. 3 представлено изменение характера распределения линий уровня для случая, когда отрезаемые концы зерна становятся короче. Однако и в данном случае опасной зоной остается середина тела, расположенная ближе к его поверхности.

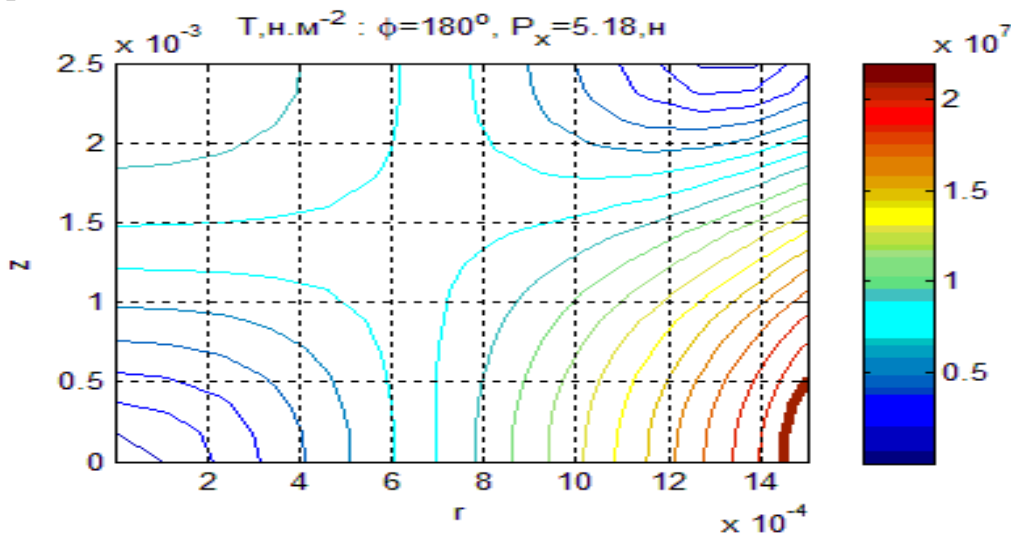


Рисунок 3 – Линии уровня  $T$ :  $\varphi = 180^\circ$ ,  $d = 0.008$  м

Следствием такого расположения первоначальных зон пластического деформирования может быть то, что разрушение зерна может представлять разлом его посередине тела (в плоскости  $z = 0$ ).

На рис. 4 приведены графики зависимостей мощности  $M$ , необходимой для резки зерна, и секундного расхода зерна через устройство от числа оборотов фрезы в минуту.

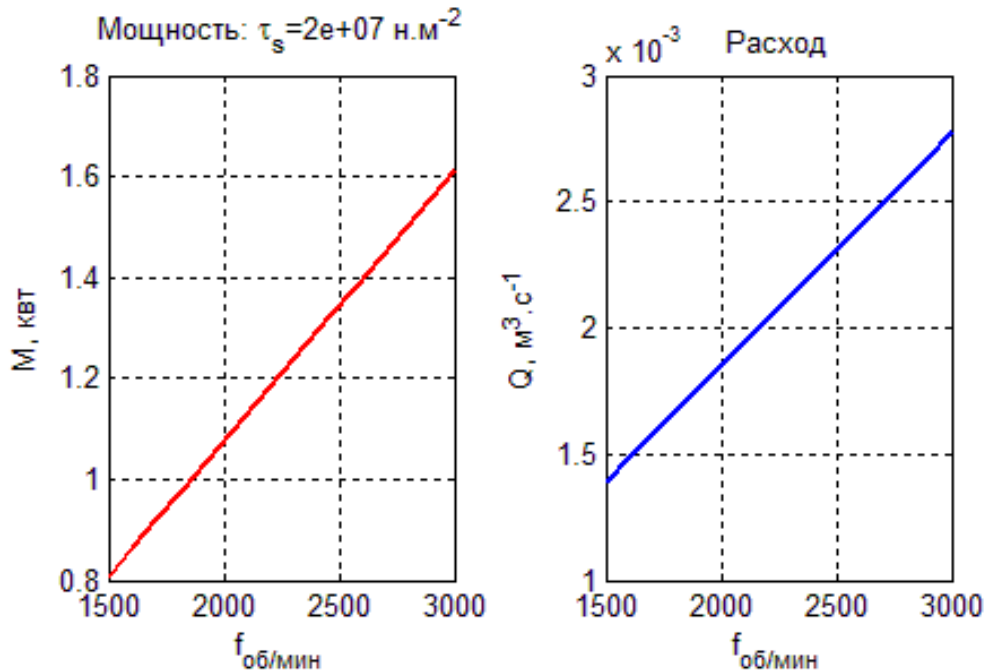


Рисунок 4 – Зависимости расхода мощности дробилки и ее производительности от числа оборотов ротора

Представленные зависимости имеют линейный характер, и возрастают с увеличением числа оборотов ротора дробилки.

**Выводы.** В результате математического моделирования процесса измельчения фуражного зерна в роторной дробилке получены зависимости интенсивности касательных напряжений, которые образуются в процессе резания зерна, мощности необходимой для резания зерна и ее зависимости от предельного усилия зуба фрезы на зерно и числа оборотов ротора дробилки.

Возрастание числа оборотов от 1500 до 3000 об/мин вызывает увеличение мощности от 0,8 до 1,6 кВт.

## Список литературы

1. *Нанка А.В.* Математическая формулировка задачи упругого деформирования зерна при измельчении и ее решение / А.В. Нанка // Технічні системи і технології тваринництва. Вісник ХНТУСГ, Вип. 157. – Харків: ХНТУСГ, 2015. – С. 37 – 44.

2. Лурье А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, – 1970. – 939 с.
3. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, – 1975. – 872 с.
4. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М.: Физматгиз, 1963. – 287 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 704 с.

## Анотація

### АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ ДРУГОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ СТОСОВНО ПОДРІБНЕННЯ ЗЕРНА

Нанка О.В.

*Приведено аналітичне рішення другої крайової задачі пружності стосовно подрібнення фуражного зерна роторною дробаркою. Отримані математичні залежності інтенсивності дотичної напруги, яка утворюється в процесі різання зерна і потужності необхідною для різання зерна і її залежності від граничного зусилля зуба фрези на зерно і числа оборотів ротора дробарки.*

## Abstract

### ANALYTICAL DECISION OF THE SECOND REGIONAL TASK OF THEORY TO THE RESILIENCY IN RELATION TO GROWING OF GRAIN SHALLOW

A. Nanka

*An analytical decision over of the second regional task of resiliency is brought as it applies to growing of cornmeal by a rotor crusher shallow. Mathematical dependences of intensity of tangent tensions that appear in the process of cutting of grain and power necessary for cutting of grain and her dependence on maximum effort of tooth of milling cutter on grain and numbers of turns of rotor of crusher are got.*