

**КОЛИВАННЯ ШАРУВАТИХ ОРТОТРОПНИХ
ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ ПРИ
ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Сметанкіна Н.В., д. т. н., пров. н. с.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Розроблено метод розрахунку коливань шаруватих композитних циліндричних оболонок зі складною формою плану на пружній основі при нестационарних впливах. Динамічна поведінка оболонок досліджується у рамках кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву та інерції обертання нормального елемента у кожному шарі. Реакція основи описується моделлю Вінклера. Досліджено вплив параметрів пружної основи на напружено-деформований стан п'ятишарової оболонки при імпульсному навантаженні.

Вступ. Шаруваті композитні елементи конструкцій широко використовуються у транспортному, енергетичному, авіаційному машинобудуванні, будівництві та інших галузях сучасної техніки [1, 2]. Одними з таких елементів є шаруваті пластини та оболонки складної форми. Дослідженню їх статичного деформування та вільним коливанням присвячена більшість публікацій [2–5]. Нестационарна динаміка шаруватих елементів конструкцій вивчена недостатньо [6–8] через складність математичних моделей, які описують коливання конструкцій при інтенсивних короткочасних впливах. Крім того, найчастіше розглядаються коливання пластин та оболонок, які не зв'язані з пружною основою [6, 7]. Основними методами дослідження динамічної поведінки шаруватих композитних елементів конструкцій складної форми є чисельні методи, наприклад, методи скінченних та граничних елементів [2, 6, 7]. Тому актуальною є розробка ефективних методів, які дозволяють подати розв'язок задачі про нестационарні коливання таких елементів конструкцій в аналітичному вигляді.

У роботах [9, 10] розроблено метод розв'язання задачі про нестационарні коливання шаруватих оболонок складної форми у плані, який дає можливість одержати розв'язок задачі в аналітичному вигляді. Метою даної роботи є узагальнення цього методу на випадок нестационарних коливань шаруватих ортотропних циліндричних оболонок зі складною формою плану на пружній основі при імпульсному навантаженні.

Постановка та розв'язання задачі. Розглянемо незамкнену шарувату циліндричну оболонку радіуса R , складену з шарів постійної тов-

щини. Матеріал шарів є ортотропним. На координатній поверхні xOy оболонка займає область Ω , обмежену довільним контуром Γ : $x_\Gamma = x_\Gamma(\varphi)$, $y_\Gamma = y_\Gamma(\varphi)$. Як координатна виступає зовнішня поверхня першого шару. Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву й інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару [9]

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad u_3^i = u_3, \quad (1)$$

де $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$; I – кількість шарів; h_i – товщина i -го шару, $u_k = u_k(x, y, t)$, $k = 1, 2, 3$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$, $k = 1, 2$ – кути повороту нормального елемента в i -му шарі навколо координатних осей x і y відповідно; t – час. Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки, координата z – вздовж зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Деформації оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^i &= u_{1,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+j,x} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+i,x}, \quad i = \overline{1, I}, \\ \varepsilon_y^i &= \frac{1}{1+z/R} \left[u_{2,y} + \frac{1}{R} u_3 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I+j,y} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I+i,y} \right], \\ \gamma_{xy}^i &= \gamma_{yx}^i = \frac{1}{1+z/R} \left[u_{1,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+j,y} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+i,y} \right] + \\ &+ u_{2,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I+j,x} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I+i,x} \quad \gamma_{xz}^i = \gamma_{zx}^i = u_{3+i} + u_{3,x}, \\ \gamma_{yz}^i &= \gamma_{zy}^i = u_{3+I+i} + \frac{1}{1+z/R} \left[u_{3,y} - \frac{1}{R} \left(u_2 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I+i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Напруження і деформації в кожному шарі зв'язані законом Гука для ортотропного тіла [11]

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= B_{11}^i \varepsilon_x^i + B_{12}^i \varepsilon_y^i, \quad \sigma_y^i = B_{12}^i \varepsilon_x^i + B_{22}^i \varepsilon_y^i, \\ \tau_{yz}^i &= B_{44}^i \gamma_{yz}^i, \quad \tau_{xz}^i = B_{55}^i \gamma_{xz}^i, \quad \tau_{xy}^i = B_{66}^i \gamma_{xy}^i, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned} \quad (3)$$

На оболонку діють імпульсні навантаження $\tilde{\mathbf{P}} = \{\tilde{p}_j(x, y, t)\}$, $j = \overline{1, 2I+3}$. До нижньої зовнішньої поверхні оболонки ($i = I$) прикладена сила $p^f = p^f(x, y, t)$ – реакція пружної основи. Як математична модель основи обрана модель Вінклера [12].

Рівняння руху оболонки і граничні умови на контурі Γ одержимо з варіаційного принципу Остроградського–Гамільтона з урахуванням співвідношень (1)–(3)

$$[\mathbf{\Omega}^\rho] \mathbf{U}_{,tt} - [\mathbf{\Lambda}] \mathbf{U} = \mathbf{P}, \quad (x, y) \in \Omega; \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0, \quad t = 0, \quad (4)$$

$$[\mathbf{B}^\Gamma] \mathbf{U} = \mathbf{P}^\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (5)$$

де $[\mathbf{\Omega}^\rho]$ та $[\mathbf{\Lambda}]$ – симетричні матриці [9],

$$\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\}, \quad \mathbf{U} = \{u_j(x, y, t)\}, \quad b_{ij}^\Gamma = \xi_{1i} b_{ij}^u + \xi_{2i} b_{ij}^\sigma, \quad i, j = \overline{1, 2I+3}.$$

Вигляд елементів матриці $[\mathbf{B}^\Gamma]$ та вектора граничних навантажень \mathbf{P}^Γ залежить від граничних умов на контурі оболонки. Надаючи різних значень коефіцієнтам ξ_{1i}, ξ_{2i} у граничних умовах (5), можна одержати необхідні граничні умови на контурі оболонки. Наприклад, при шарнірному опиранні по контуру ці коефіцієнти набувають значень

$$\xi_{11} = \xi_{22} = \xi_{32} = \xi_{3+i,1} = \xi_{3+I+i,2} = 1, \quad \xi_{12} = \xi_{21} = \xi_{31} = \xi_{3+i,2} = \xi_{3+I+i,1} = 0.$$

Сила p^f поряд з імпульсним навантаженням $\tilde{\mathbf{P}}$ входить до рівнянь руху оболонки (4) у вигляді $p^f = -ku_3^I(x, y, t)$. Отже,

$$p_3 = \tilde{p}_3(t) - ku_3^I(x, y, t),$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружної основи, $k = \frac{E^*}{H}$,

$$E^* = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)};$$

H – товщина пружної основи; u_3^I – прогин поверхні пружної основи;

E_0 і ν_0 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона основи.

Метод розв'язання поставленої задачі полягає у тому, що замість вихідної оболонки розглядається допоміжна шарнірно оперта циліндрична

оболонка прямокутної форми у плані того ж радіуса кривини, з тією ж композицією шарів. В області Ω допоміжна оболонка навантажена так само, як і вихідна оболонка. Такий підхід дозволяє подати розв'язок задачі у вигляді розвинення у тригонометричний ряд, а прикладення компенсуючих навантажень $q_j^{\text{comp}}(\varphi, t)$ ($j = \overline{1, 2I+3}$) до допоміжної оболонки вздовж контуру Γ забезпечує виконання заданих граничних умов вихідної оболонки (4). У рівняння руху оболонки компенсуючі навантаження входять в інтегральному вигляді

$$p_j^{\text{comp}}(x, y, t) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} L_{jk} q_k^{\text{comp}}(\varphi, t) \delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma) d\varphi, \quad j, k = \overline{1, 2I+3}, \quad (6)$$

де $\delta(x - x_\Gamma, y - y_\Gamma)$ – двовимірна функція Дірака. Ненульові елементи матриці L_{jk} дорівнюють

$$L_{11} = L_{22} = L_{3+i, 3+i} = L_{3+I+i, 3+I+i} = y'_\Gamma, \quad L_{33} = \left[(x'_\Gamma)^2 + (y'_\Gamma)^2 \right]^{1/2},$$

$$L_{12} = L_{3+i, 3+I+i} = x'_\Gamma, \quad L_{21} = L_{3+I+i, 3+i} = -x'_\Gamma;$$

$$x'_\Gamma = dx_\Gamma/d\varphi, \quad y'_\Gamma = dy_\Gamma/d\varphi.$$

Інтенсивності компенсуючих навантажень визначаються з системи інтегральних рівнянь, яка випливає з граничних умов (5). Система інтегральних рівнянь розв'язується шляхом розвинення функцій компенсуючих навантажень (6) і граничних функцій (5) у тригонометричні ряди в області допоміжної оболонки та у ряд уздовж контуру Γ . Система рівнянь руху оболонки (4) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь, яка інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора [10]. Після визначення інтенсивностей компенсуючих навантажень за формулами (1)–(3) обчислюються переміщення, деформації та напруження у шарах вихідної оболонки.

Аналіз результатів чисельних досліджень. Як приклад розглядається шарнірно оперта п'ятишарова циліндрична оболонка на пружній основі під впливом рівномірно розподіленого імпульсного навантаження

$$\tilde{p}_j = 0, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad j \neq 3; \quad \tilde{p}_3 = P_0 H(t),$$

де P_0 – інтенсивність навантаження, $P_0 = 0,1$ МПа, $H(t)$ – функція Хевісайда.

Контур оболонки Γ описується рівняннями кривих Ламе $x_\Gamma(\varphi) = \alpha \cos^{2/c}(\varphi)$, $y_\Gamma(\varphi) = \beta \sin^{2/c}(\varphi)$, де $\alpha = 0,3$ м, $\beta = 0,2$, $c = 8$ (рис.1).

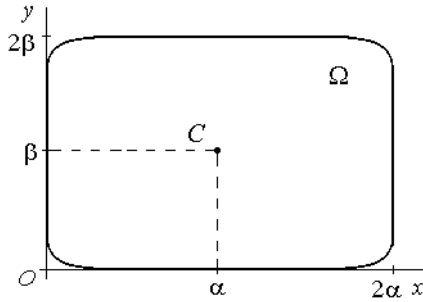


Рис. 1. Схема плану оболонки

Шари оболонки виконані з епоксидного вуглепластику з наступними характеристиками: $h_i = 0,01$ м, $E_2^i = 21$ ГПа, $E_1^i = 25E_2^i$ (модулі пружності); $G_{12}^i = G_{13}^i = G_{23}^i = 0,5E_2^i$ (модулі зсуву); $\nu_1^i = 0,25$ (коефіцієнт Пуассона); $\rho_i = 800$ кг/м³ (густина матеріалу); $i = \overline{1,5}$; $\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = 0^\circ$, $\theta_2 = \theta_4 = 90^\circ$ (кути армування). Радіус оболонки – $R = 3$ м.

Досліджено вплив коефіцієнта жорсткості пружної основи k на змінення прогину оболонки u_3^5 і напруження σ_x^5 у часі в точці C (рис. 1), розташованій на зовнішній поверхні п'ятого шару оболонки. Результати розрахунку наведені на рис. 2. Коефіцієнт k набуває таких значень: нуль (суцільна лінія на рис. 2), 10 МПа (штрихова лінія) і 100 МПа (штрихпунктирна лінія). Зі збільшенням коефіцієнта k прогин і напруження в оболонці зменшуються.

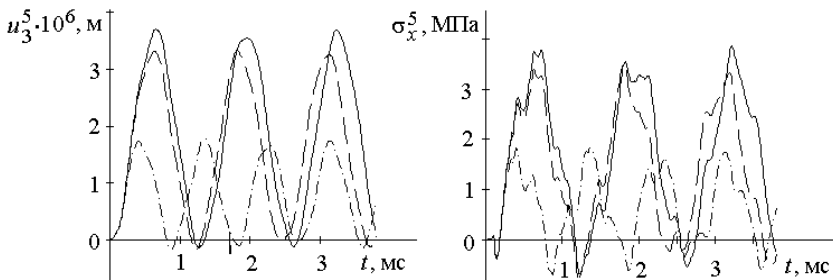


Рис. 2. Змінення у часі прогинів і напружень в залежності від коефіцієнта жорсткості пружної основи

Аналіз наведених залежностей дозволяє зробити висновок, що урахування пружної основи істотно впливає на кількісні і якісні характерис-

тики динамічного відгуку конструкції.

Висновки. Таким чином, метод дослідження нестационарних коливань шаруватих оболонок узагальнено на випадок коливань ортотропних циліндричних оболонок зі складною формою плану на пружній основі при імпульсному навантаженні. Встановлено істотний вплив жорсткості основи на параметри напружено-деформованого стану оболонки. Одержані результати можуть бути використані у процесі проектування шаруватих композитних оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під дією швидкоплинних інтенсивних навантажень, які відповідають підвищеним вимогам до їх міцності та надійності.

Список використаних джерел

1. Librescu L., Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey // *Composite Structures.*– 2000.– V. 48, № 1.– P. 1–17.
2. Пискунов В.Г., Рассказов А.О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикл. механика.*– 2002.– Т. 38, № 2.– С. 22–56.
3. Guo M., Harik I.E., Ren W.-X. Free vibration analysis of stiffened laminated plates using layered finite element method // *Struct. Eng. Mech.*– 2002.– V. 14, № 3.– P. 245–262.
4. Carrera E. Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Mech. Rev.*– 2003.– V. 56, № 3.– P. 287–308.
5. Narita Y., Robinson P. Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization // *Int. J. Mech. Sciences.*– 2006.– V. 48, № 12.– P. 1516–1524.
6. Helms J.E., Li G., Pang S.S. Impact resistance of a composite laminate bonded to a metal substrate // *J. Composite Materials.*– 2001.– V. 35, № 3.– P. 237–252.
7. Zhang Y.X., Yang C.H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates // *Composite Structures.*– 2009.– V. 88, № 1.– P. 147–157.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Динамика круглых трехслойных пластин на упругом основании при осесимметричном нагружении // *Пробл. прочности.* – 2010. – № 3. – С. 113–124.
9. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.
10. Сметанкіна Н.В., Сметанкін В.О. Коливання шаруватих оболонок складної форми при ударному навантаженні // *Вібрації в техніці та*

технологиях.– 2012.– № 1(65).– С. 84–88.

11. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов.– М.: Мир, 1982.– 334 с.
12. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models // J. of Applied Mechanics. Trans. ASME.– Ser. E.– 1964.– V. 31, № 3.– P. 139–148.

Аннотация

КОЛЕБАНИЯ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Сметанкина Н.В.

Разработан метод расчета колебаний слоистых композитных цилиндрических оболочек со сложной формой плана на упругом основании при нестационарных воздействиях. Динамическое поведение оболочек исследуется в рамках кинематических гипотез, которые учитывают деформации поперечного сдвига и инерции вращения нормального элемента. Реакция основания описывается моделью Винклера. Исследовано влияние параметров упругого основания на напряженно-деформированное состояние пятислойной оболочки при импульсном нагружении.

Abstract

VIBRATIONS OF LAMINATED ORTHOTROPIC SHELLS ON THE ELASTIC FOUNDATION AT IMPULSE LOADING

Smetankina N.V.

The method for calculation of vibrations of laminated composite cylindrical shells with the complex shape in plan view on the elastic foundation under non-stationary actions has been developed. The dynamic behaviour of shells is investigated within the limits of the kinematical hypotheses which consider transverse shear strains and normal element rotation inertia in each layer. The foundation response is presented by the Winkler model. Effect of the elastic foundation parameters on strain-stressed state of a five-layer shell at the impulse loading is investigated.