

## ПРО ДИНАМІКУ ЗЕРНОВОЇ СУМІШІ ЗМІННОЇ ПОРИСТОСТІ НА ПЛОСКОМУ ВІБРОРЕШЕТИ

**Ольшанський В.П., д. ф.-м. н., проф.**

*(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка)*

*В рамках континуальної гідродинамічної моделі виведено замкнені формули для обчислення швидкості зернопотоку та продуктивності віброрешета (по сходовій фракції), в припущенні, що розподіл питомої маси по товщині шару дрібнозернистої суміші залежить від швидкості руху її шарів. Складено лінійне диференціальне рівняння другого порядку для швидкості руху суміші та побудовано його аналітичний розв'язок в елементарних функціях. Інтегруванням виведено також формули для розрахунку середньої швидкості сталого зернопотоку і масової продуктивності віброрешета. Одержані теоретичні результати узагальнено на випадок, коли у вібророзрідженій суміші, окрім в'язкого опору зсуву, наявне ще й залишкове внутрішнє сухе тертя. Показано, що у граничному випадку, без урахування зміни пористості, виведені формули переходять у відомі залежності, отримані раніше для однорідних сумішей на підставі гідродинамічної моделі руху. На числових прикладах проаналізовано вплив значень реологічних констант на розподіл пористості та на розрахункові кінематичні характеристики зернопотоку.*

**Ключові слова:** *плате нахилене віброрешето, усталений зернопотік, змінна пористість, лінійно-в'язкий опір, швидкість руху, продуктивність решета.*

**Вступ.** Дослідження динаміки вібросепарованих зерноsumішей, з урахуванням зміни пористості по товщині рухомого шару, проводили в роботах [1-4]. У названих публікаціях припускали, що розподіл питомої маси по товщині шару сепарованої зерноsumіші залежить від стану поверхні решета та від параметрів його коливань. У ході теоретичних досліджень спочатку числовим інтегруванням нелінійного диференціального рівняння другого порядку визначали розподіл пористості, а потім враховували його вплив на швидкість руху суміші по решету та інші кінематичні характеристики.

Аналогічний підхід до розрахунку руху, але з використанням степеневих апроксимацій розподілу питомої маси в шарі суміші, викладено також в [5, 6]. При постановці задачі динаміки в згаданих публікаціях проігноровано зворотний зв'язок, тобто не прийнято до уваги вплив швидкості деформацій зсуву на розподіл пористості. Цей недолік відомих континуальних моделей руху зерноsumіші підкреслюють автори монографії [7]. Виходячи з проведеного аналізу, в статті пропонується математична модель зернопотоку, де розподіл питомої маси по товщині рухомого шару сепарованої суміші на плоскому віброрешеті залежить від швидкості деформацій зсуву між шарами. Згідно з прийнятою тут залежністю, у верхньому шарі, біля вільної поверхні, питома маса суміші менша, ніж у нижньому шарі, що контактує з поверхнею нахиленого плоского решета. В той же час швидкість руху верхнього шару більша, ніж нижнього. Тому більшій швидкості руху відповідає менша питома маса і навпаки.

**Метою** даної статті є виведення та апробація розрахунками формул для обчислення кінематичних характеристик зернопотоку, коли пористість суміші залежить від швидкості її руху.

**Викладення основного матеріалу.** Використовуємо розрахункову схему, зображену на рис. 1.

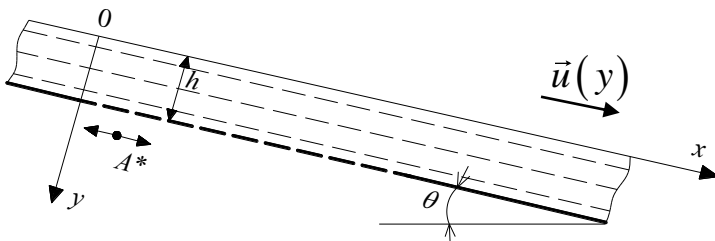


Рис. 1. Розрахункова схема

Тут  $h$  – товщина рухомого шару суміші;  $\theta$  – кут нахилу решета до горизонту;  $A^*$  – амплітуда повздовжніх коливань решета з частотою  $\omega$ ;  $x, y$  – відповідно повздовжня і поперечна координати;  $u = u(y)$  – швидкість усталеного руху суміші в напрямі вісі  $ox$ .

Розподіл концентрації зерен по товщині рухомого шару суміші  $v = v(y)$  описуємо виразом:

$$v(y) = v_* \frac{1 - \delta \cdot u(y)}{1 - \delta \cdot u_*}, \quad (1)$$

у якому  $1 - \delta \cdot u(0) > 0$ ;  $v_* = v(h)$  – концентрація зерен у нижньому шарі, біля поверхні решета;  $\delta$  – феноменологічна стала, що підлягає експериментальному визначенню. Вона залежить від амплітуди  $A^*$  і частоти  $\omega$  коливань решета та наявності на його поверхні активаторів процесу сегрегації (ребер, рифлів, тощо).

Оскільки  $u(y)$  зменшується зі зростанням  $y$ , то згідно з (1), концентрація зерен у нижніх шарах дрібнозернистої суміші більша, ніж у верхніх. Якісно такий розподіл  $v$  по товщині шару мали і в роботах [1-4], але там  $v$  не залежало від  $u(y)$ .

Як відомо [5, 8], дотичне напруження в суміші  $\tau = \tau(y)$ , при усталеному її русі, задовольняє диференціальному рівнянню:

$$\frac{d\tau}{dy} = -\gamma g \sin\theta v(y), \quad (2)$$

де  $\gamma$  – питома маса матеріалу зернин;  $g$  – прискорення вільного падіння.

В рамках гідродинамічної моделі в'язкої ньютонівської рідини залежність між дотичним напруженням і швидкістю деформацій зсуву подається виразом [9, 10]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}, \quad (3)$$

де  $\mu$  – динамічний коефіцієнт вібров'язкості суміші.

Підставивши (1) і (3) в (2), при  $\mu = \text{const}$ , одержуємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2u}{dy^2} - a^2u = -b, \quad (4)$$

в якому  $a^2 = \delta b$ ;  $b = \frac{\gamma g v_*}{\mu(1 - \delta u_*)} \sin\theta$ .

Рівняння (4) інтегруємо при граничних умовах:

$$u(h) = u_*; \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0.$$

Ця крайова задача має розв'язок:

$$u(y) = \frac{1}{\delta} - \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right) \frac{chay}{chah}. \quad (5)$$

Якщо  $\delta \rightarrow 0$ , то  $a \rightarrow 0$  і формула (5) приймає вигляд:

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} \cdot (h^2 - y^2) + u_*, \quad (6)$$

де  $\rho = \gamma v_*$ . Цей параболічний профіль відповідає гідродинамічній моделі руху однорідної суміші [9], тобто (5) є узагальненням (6).

Найбільша швидкість руху, згідно з (5), становить:

$$u_{\max} = u(0) = \frac{1}{\delta} - \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right) \frac{1}{chah}.$$

В інженерних розрахунках зернопотоків іноді використовують середнє значення швидкості  $u_{cp}$  [9]. Для його обчислення, враховуючи (5), знаходимо:

$$u_{cp} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{\delta} - \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right) \frac{shah}{ah \cdot chah}. \quad (7)$$

Граничний перехід  $\delta \rightarrow 0$  в формулі (7) дає:

$$u_{cp} = u_* + \frac{\rho gh^2}{3\mu} \sin \theta,$$

що узгоджується з відомими результатами [9, 10].

Завдяки простій формі розв'язку (5), інтеграл для обчислення масової продуктивності решета  $P$  теж виражається в елементарних функціях. Дійсно:

$$\begin{aligned} P &= \gamma H \int_0^h v(y) u(y) dy = \\ &= \frac{\gamma H v_*}{1 - \delta u_*} \left\{ \frac{h}{\delta} - \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right) \frac{thah}{a} - \delta \left[ \frac{h}{\delta^2} - \frac{2}{a\delta} \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right) thah + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4a} \left( \frac{1}{\delta} - u_* \right)^2 \frac{sh2ah + 2ah}{ch^2ah} \right] \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

Тут  $H$  – ширина перфорованої частини решета.

Знаючи  $P$ , легко знайти і питоме завантаження решета  $q$ , бо при довжині перфорованої частини  $L$ :

$$q = \frac{P}{LH}.$$

Узагальнимо одержані вище теоретичні результати на випадок, коли у відророзрідженій суміші наявне залишкове сухе тертя. Його приймаємо пропорційним надлишковому внутрішньому тиску в суміші. Замінімо вираз (3) двоохпараметричною залежністю:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} - f p(y).$$

Тут  $\mu, f$  – реологічні сталі, із яких перша характеризує в'язке, а друга – залишкове сухе внутрішнє тертя;  $p(y)$  – надлишковий тиск.

Оскільки:

$$\frac{d\tau}{dy} = \mu \frac{d^2u}{dy^2} - f \frac{dp}{dy}; \quad \frac{dp}{dy} = \gamma g \cos\theta v(y), \quad (9)$$

то, після підстановки (1) і (9) в (2), знову приходимо до рівняння (4), але тепер у ньому

$$b = \frac{\gamma g v_*}{\mu(1 - \delta u_*)} (\sin\theta - f \cos\theta).$$

Умовою руху є  $\sin\theta - f \cos\theta > 0$ .

Отже, при врахуванні залишкового сухого тертя, в одержаних вище формулах треба замінити  $\sin\theta$  різницею  $\sin\theta - f \cos\theta$ .

Проаналізуємо результати розрахунків, які проведено при  $\gamma = 1350 \text{ кг/м}^3$ ;  $\theta = 8^\circ$ ;  $h = 0,012 \text{ м}$ ;  $u_* = 0$  та різних  $v_*, \mu, f, \delta$ . Пористість суміші  $\varepsilon$  обчислювали за формулою:

$$\varepsilon(y) = 1 - v(y).$$

Одержані профілі швидкості та розподіли пористості при  $v_* = 0,43$ ;  $\mu = 0,15 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $f = 0,05$  і трьох значеннях  $\delta$  показано на рис. 2 і рис. 3. Як і припускалось в (1), при збільшенні  $u(y)$  збільшується і  $\varepsilon(y)$ . Графіки цих залежностей випуклі і мають горизонтальну дотичну при  $y = 0$ .

Про вплив  $v_*$  на  $u(y)$  і  $\varepsilon(y)$  надана інформація на рис. 4 і рис. 5. Розрахунки проведено при  $\delta = 2 \text{ с/м}$ ;  $\mu = 0,15 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $f = 0,05$ ;  $u_* = 0,04 \text{ м/с}$ . Більшим значенням  $v_*$  відповідає більша

швидкість руху суміші та менші значення  $\varepsilon(y)$ .

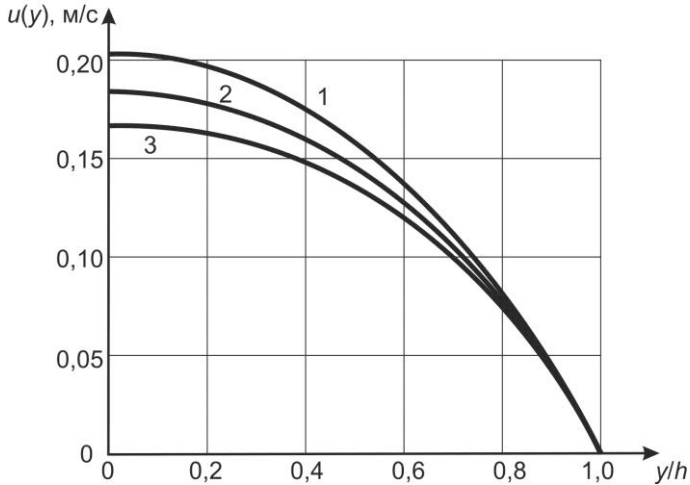


Рис. 2. Графіки швидкості при різних  $\delta$ : 1 –  $\delta = 1$  ц/м; 2 –  $\delta = 1,5$  ц/м; 3 –  $\delta = 2$  ц/м

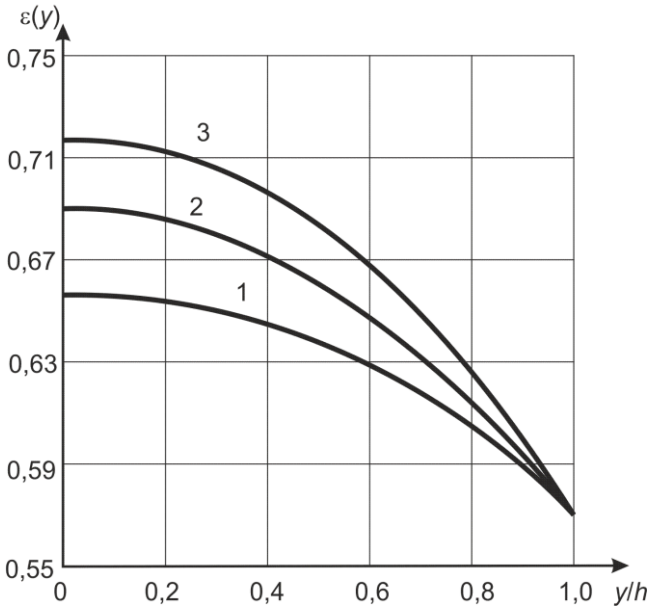


Рис. 3. Розподіли пористості  $\varepsilon(y)$  при різних  $\delta$ : 1 –  $\delta = 1$  ц/м; 2 –  $\delta = 1,5$  ц/м; 3 –  $\delta = 2$  ц/м

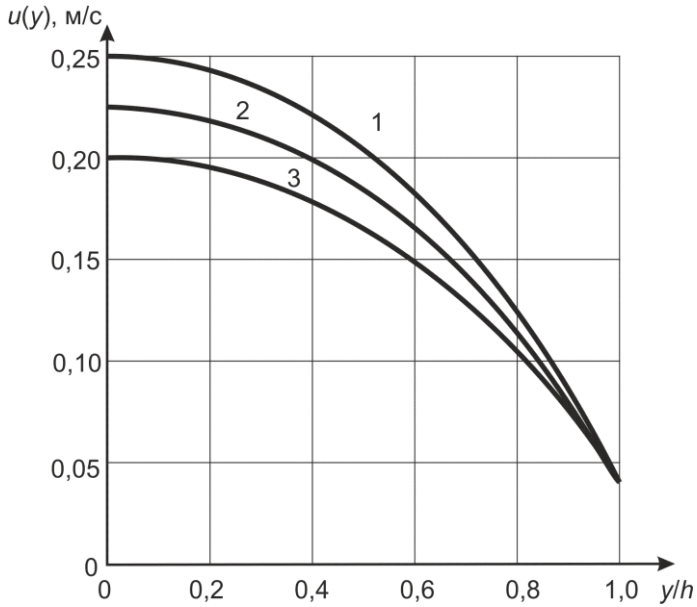


Рис. 4. Профілі швидкості при різних  $v_*$ : 1 –  $v_* = 0,6$ ; 2 –  $v_* = 0,5$ ; 3 –  $v_* = 0,4$

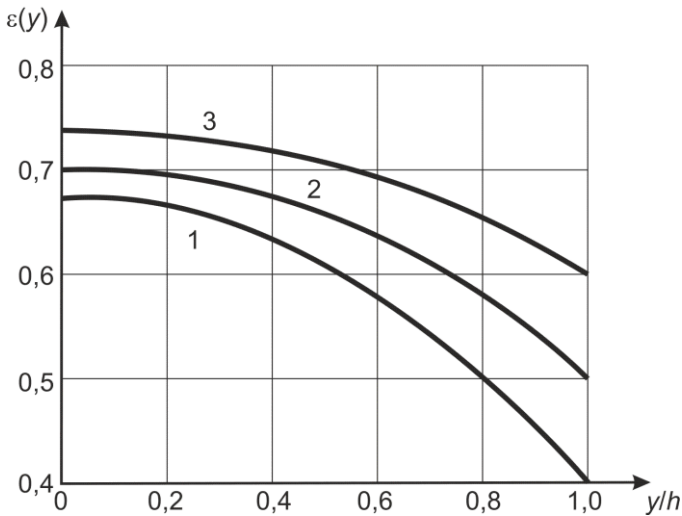


Рис. 5. Розподіли пористості  $\varepsilon(y)$  при різних  $v_*$ : 1 –  $v_* = 0,6$ ; 2 –  $v_* = 0,5$ ; 3 –  $v_* = 0,4$

Розраховані продуктивності віброрешета одиничної ширини вказано в таблиці 1. Для проведення обчислень задавали  $u_* = 0$ ,  $\delta = 2$  с/м та різні значення  $\mu$ ,  $f$ ,  $v_*$ . Числовий аналіз підтверджує, що теоретична продуктивність решета по сходовій фракції  $P$  суттєво залежить від значень реологічних констант та від концентрації зерен в суміші біля поверхні решета.

Таблиця 1

**Продуктивності віброрешета при різних  $\mu$ ,  $f$ ,  $v_*$**

$\mu$	$f$	$v_* = 0,6$	$v_* = 0,5$	$v_* = 0,4$
		Значення $P/H$ , кг/(м·с)		
0,10	0,01	0,675	0,861	1,032
0,10	0,05	0,622	0,823	1,018
0,10	0,09	0,485	0,678	0,878
0,15	0,01	0,614	0,816	1,012
0,15	0,05	0,531	0,730	0,933
0,15	0,09	0,380	0,547	0,728
0,20	0,01	0,550	0,751	0,954
0,20	0,05	0,456	0,643	0,839
0,20	0,09	0,311	0,455	0,615

**Висновки.** Запропонована континуальна математична модель дає можливість обчислювати кінематичні характеристики зернопотоку по плоскому віброрешету з урахуванням залежності пористості суміші від швидкості її руху. При цьому потрібна попередня ідентифікація значень трьох реологічних констант, які характеризують в'язке та залишкове сухе тертя у вібророзрідженій суміші, а також її пористість. Уведенням цих констант, викладена теорія узагальнює відомі теоретичні результати, одержані раніше в рамках двохпараметричних моделей руху.

**Список літератури**

1. Тищенко Л.Н. К исследованию движения зерновой смеси на решете под действием вибраций / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Науковий вісник НАУ. – Київ: НАУ, 2002. – Вип. 49. – С. 329-336.
2. Пивень М.В. Обоснование параметров процесса решетного сепарирования зерновых смесей: дис. ... канд. техн. наук: 05.05.11 / М.В. Пивень. – Харьков: ХНТУСХ им. П. Василенко, 2006. – 260 с.



3. Тищенко Л.Н. Исследование послыоного движения зерновых смесей на плоских вибрационных решетках / Л.Н. Тищенко, А.В. Миняйло, М.В. Пивень, С.А. Харченко // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУС, 2007. – Вип. 59. Т. 1. – С. 69-76.

4. Тищенко Л.Н. Экспериментальные исследования внутрислоевых процессов в плоскорешетных вибрационных сепараторах / Л.Н. Тищенко, М.В. Пивень // Вібрації в техніці та технологіях. – Вінниця, 2015. – № 4(80). – С. 206-211.

5. Ольшанський В.П. Про рух зерноsumіші змінної пористості на плоскому віброрешеті / В.П. Ольшанський, О.В. Ольшанський // Інженерія переробних і харчових виробництв. – Харків, 2016. – № 2. – С. 61-65.

6. Ольшанський В.П. Про нелінійну модель руху зерноsumіші змінної пористості по плоскому віброрешету / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко, С.О. Харченко // Механізація та автоматизація виробничих процесів: Вісник СНАУ. – Суми : СНАУ, 2016. – Вип. 10/1(29). – С. 107-112.

7. Долгунин В.Н. Быстрые гравитационные течения зернистых ма-териалов: техника измерения, закономерности, технологическое применение / В.Н. Долгунин, В.Я. Борщев. – М.: Машиностроение, 2005. – 73 с.

8. Ольшанський В.П. Математичні моделі зернопотоків по віброрешетах / В.П. Ольшанський, О.В. Ольшанський. – Харків : Міськдрук, 2016. – 140 с.

9. Тищенко Л.Н. Гидродинамика сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харків : Міськдрук, 2010. – 174 с.

10. Тищенко Л.Н. Виброрешетная сепарация зерновых смесей / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харків: Міськдрук, 2011. – 280 с.

## **Аннотация**

### **О ДИНАМИКЕ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ ПЕРЕМЕННОЙ ПОРИСТОСТИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ**

*В рамках континуальной гидродинамической модели выведено замкнутые формулы для вычисления скорости зернопотока и производительности виброрешета (по сходовой фракции), в предположении, что распределение плотности по толщине слоя мелкозернистой смеси зависит от скорости движения ее слоев.*

*Составлено линейное дифференциальное уравнение второго порядка для скорости движения смеси и построено его аналитическое решение в элементарных функциях. Интегрированием выведено также формулы для расчета средней скорости установившегося зернопотока и производительности решета по массе. Полученные теоретические результаты обобщены на случай, когда в виброоживленной смеси, кроме вязкого сопротивления сдвигу, имеется и остаточное внутреннее сухое трение. Показано, что в предельном случае, без учета изменения пористости, выведенные формулы переходят в известные зависимости, полученные ранее для однородных смесей в рамках гидродинамической модели движения. На числовых примерах проанализировано влияние значений реологических констант на распределение пористости и на расчетные кинематические характеристики зернопотока.*

**Ключевые слова:** *плоское наклоненное решето, установившийся зернопоток, изменение пористости, линейно-вязкое сопротивление, скорость движения, производительность решета.*

## **Abstract**

### **ON THE DYNAMICS OF THE GRAIN MIXTURE OF VARIABLE POROSITY ON A FLAT VIBRATING SIEVE**

*Within the continuum hydrodynamic model derived closed formulas to calculate the speed and performance vibrating screen grain flows (fractions by skhodovoy), assuming that the density distribution in the layer thickness depends on the mixture of fine speed shift its layers. Composed of a linear differential equation of second order for the velocity of the mixture and built its analytic solution in elementary functions. Integrating derived formulas for calculating the average speed steady grain flows and productivity of the sieve by weight. The theoretical results are generalized to the case when vibrofluided mixture, there is also an internal residual dry friction in addition to viscous shear resistance. It is shown that in the extreme case, without taking into account changes in porosity derived formulas become known according to previously obtained for homogeneous mixtures within the hydrodynamic model of the motion. In numerical examples analyzed the influence of theological values of the constants on the distribution of porosity and calculated kinematics characteristics of grain flows.*

**Keywords:** *flat inclined sieve, steady grain flows, changes in porosity, linear-viscous resistance, speed, sieve productivity.*