

## РОЗРАХУНОК ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У ШАРУВАТОМУ ОСКЛІННІ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ

Сметанкіна Н.В., д. т. н., завідувач відділу вібраційних і  
термоміцнісних конструкцій

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України*

*Запропоновано метод розрахунку нестационарних температурних полів у шаруватому осклинні транспортних засобів при впливі імпульсних плівкових джерел тепла. Багатошарове осклиння розглядається як прямокутна шарувата пластина, яка зібрана з ізотропних шарів сталої товщини. На верхній та нижній поверхнях пластини має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Температура на бічній поверхні дорівнює нулю. Рівняння нестационарної теплопровідності для довільного шару пластини і граничні умови на боковій поверхні формуються на основі варіаційного рівняння теплового балансу. Розподіл температури вздовж товщини кожного шару описано за допомогою ортонормованих поліномів Лежандра. Задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь модифікованим методом Тейлора. Як приклад розв'язана задача нестационарної теплопровідності для п'ятишарового елемента осклиння літака при нагріванні плівковим джерелом тепла. Проведено порівнювальний аналіз розподілу температури вздовж товщини елемента з результатами, які одержані методом скінченних елементів. Запропонований підхід може бути використаний при проектуванні безпечного шаруватого осклиння різних транспортних засобів в умовах експлуатаційних та аварійних термосилових навантажень.*

*Ключові слова: шарувате осклиння, нестационарна теплопровідність, плівкове джерело тепла, надійність.*

**Постановка проблеми.** Забезпечення міцності та надійності конструкцій при впливі температурних полів є однією з важливих проблем, що виникають в різних областях сучасної техніки [1]. На цей час широке застосування знаходять шаруваті конструкції, які складені із шарів з різними теплофізичними і механічними характеристиками, зокрема, елементи осклиння з обігрівом для різних транспортних засобів. У більшості робіт розглядаються стаціонарні температурні поля і застосовується гіпотеза про кусочно-лінійний розподіл температури вздовж товщини шаруватого пакета [1, 2]. Якщо характеристики матеріалів шарів істотно відрізняються, а теплові навантаження змінюються раптово, необхідно знати точний розподіл температури для подальшої оцінки міцнісних властивостей конструкції. Тому розрахунок та проектування елементів осклиння транспортних

засобів, що відповідають зазначеним вище вимогам безпеки та надійності, є актуальною проблемою.

**Аналіз публікацій за темою дослідження.** Проектування шаруватих елементів оскління транспортних засобів здійснюється на основі експериментальних даних [1, 2]. Для розв'язання задач теплопровідності шаруватих конструкцій найчастіше застосовуються методи, що вимагають дискретизації області або її межі, такі, як методи скінченних різниць та скінченних елементів [1–4]. Досліджень, у яких розв'язок задачі теплопровідності шаруватих конструкцій подається в аналітичному або чисельно-аналітичному вигляді, значно менше [5–7]. Таким чином, розробка методів, що дозволяють подати розв'язок задачі у такому вигляді, залишається **актуальною задачею**.

**Метою роботи** є розробка методу розрахунку температурних полів у безпечному шаруватому осклінні транспортних засобів при впливі електрообігріву, який дозволяє подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

**Математична модель шаруватого оскління.** Оскління розглядається як шарувата прямокутна пластина, яка зібрана з  $N$  ізотропних шарів сталої товщини  $h_i$  ( $i = \overline{1, N}$ ). Розміри пластини в напрямку координатних осей  $Ox$  і  $Oy$  позначимо  $L_x$  та  $L_y$  відповідно. Рівняння теплопровідності і граничні умови на боковій поверхні пластини формуються на основі варіаційного рівняння теплового балансу [8].

Запишемо рівняння нестационарної теплопровідності для  $i$ -го шару пластини

$$v_i \Delta T = \partial T / \partial t, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2, \quad (1)$$

де  $v_i = \lambda_i / (\gamma_i c_i)$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\lambda_i$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\gamma_i$  – питома вага,  $c_i$  – питома теплоємність  $i$ -го шару.

На зовнішній ( $z_1 = h_1$ ) і внутрішній поверхнях ( $z_N = 0$ ) пластини має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Випишемо граничні умови і умови теплового сполучення шарів

$$\lambda_1 \nabla T_1 |_{z_1=h_1} = \alpha_n (T_n - T_1 |_{z_1=h_1}), \quad -\lambda_N \nabla T_N |_{z_N=0} = \alpha_s (T_s - T_N |_{z_N=0}), \quad (2)$$

$$-\lambda_i \nabla T_i |_{z_i=0} + \lambda_{i+1} \nabla T_{i+1} |_{z=h_{i+1}} = 0, \quad T_i |_{z_i=0} - T_{i+1} |_{z=h_{i+1}} = 0, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (3)$$

Тут  $\alpha_n$  і  $\alpha_s$  – коефіцієнти конвективної теплопередачі на зовнішній і внутрішній поверхні пластини,  $T_n$  і  $T_s$  – температура зовнішнього і внутрішнього середовища відповідно.

**Метод розв'язання.** Вважаємо задачу симетричною щодо координатних осей і будемо шукати розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$T_i(x, y, z_i, t) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \left[ a_{kl}^i(t) f_1(\bar{z}) + b_{kl}^i(t) f_2(\bar{z}) + c_{kl}^i(t) f_3(\bar{z}) \right] \cos \alpha_k x \cos \beta_l y, \quad (4)$$

де  $0 \leq x \leq L_x / 2$ ,  $0 \leq y \leq L_y / 2$ ,  $\alpha_k = 2\pi(k-1)/L_x$ ,  $\beta_l = 2\pi(l-1)/L_y$ ,  
 $t$  – час,  $\bar{z} = z_i / h_i$ ,  $0 \leq z_i \leq h_i$ ,  $h_i$  – товщина  $i$ -го шару.

Як функції  $f_r$ ,  $r = 1, 2, 3$ , обираємо ортонормовані поліноми Лежандра ( $r-1$ -го степеня для інтервалу  $0 \leq \bar{z} \leq 1$ )

$$f_1 = 1, f_2 = \sqrt{3}(2\bar{z} - 1), f_3 = \sqrt{5}(6\bar{z}^2 - 6\bar{z} + 1), \int_0^1 f_k f_l d\bar{z} = \delta_{kl}. \quad (5)$$

Проектування рівняння (1) на функції  $f_r$  (5) з урахуванням умови ортонормованості функцій приводить до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{a}_{kl}^i &= v_i \frac{12\sqrt{5}}{h_i^2} c_{kl}^i - v_i (\alpha_k^2 + \beta_l^2) a_{kl}^i, & \dot{b}_{kl}^i &= -v_i (\alpha_k^2 + \beta_l^2) b_{kl}^i, \\ \dot{c}_{kl}^i &= -v_i (\alpha_k^2 + \beta_l^2) c_{kl}^i. \end{aligned} \quad (6)$$

Як початкові умови приймаємо умову  $T_i(x, z_i, 0) = \text{const}$ , звідки при відсутності теплообміну та рівності нулю потужності джерел тепла при  $t = 0$  випливає, що  $a_{kl}^i(0) = T_0$ ,  $b_{kl}^i(0) = 0$ ,  $c_{kl}^i(0) = 0$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

З урахуванням співвідношень (4) і (5) граничні умови теплообміну на поверхнях пластини (2) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 (b_{kl}^1 2\sqrt{3} + c_{kl}^1 6\sqrt{5}) / h_1 &= \alpha_n (T_n - a_{kl}^1 - b_{kl}^1 \sqrt{3} - c_{kl}^1 \sqrt{5}), \\ \lambda_N (b_{kl}^N 2\sqrt{3} - c_{kl}^N 6\sqrt{5}) / h_N &= \alpha_e (T_e - a_{kl}^N + b_{kl}^N \sqrt{3} - c_{kl}^N \sqrt{5}), \end{aligned} \quad (7)$$

а умови (7) запишуться як

$$\begin{aligned} -\lambda_i (b_{kl}^i 2\sqrt{3} - c_{kl}^i 6\sqrt{5}) / h_i + \lambda_{i+1} (b_{kl}^{i+1} 2\sqrt{3} + c_{kl}^{i+1} 6\sqrt{5}) / h_{i+1} &= 0, \\ a_{kl}^i - b_{kl}^i \sqrt{3} + c_{kl}^i \sqrt{5} - a_{kl}^{i+1} - b_{kl}^{i+1} \sqrt{3} - c_{kl}^{i+1} \sqrt{5} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Між  $i$ -м та  $(i+1)$ -м шарами розташована тепловиділяюча плівка потужністю  $W(x, y)$  ( $0 \leq |x| \leq L_x / 2$ ,  $0 \leq |y| \leq L_y / 2$ ), тому в правій частині умови передачі теплового потоку між цими шарами варто врахувати гармоніку

$$W_k = 4 / (L_x L_y) \iint W(x, y) \cos \alpha_k x \cos \beta_l y dx dy. \quad (9)$$

Загальне число граничних умов (7) та умов сполучення (8) дорівнює  $2NMM$ , кількість невідомих функцій, що залежать від часу, дорівнює  $3NMM$ . Через те, що із другого і третього рівнянь (6) випливають нульові частинні розв'язки, змінення функцій  $b_{kl}^i(t)$  і  $c_{kl}^i(t)$  в часі в розвиненні (4) визначається їх залежністю від  $a_{kl}^i(t)$ . Отже, число невідомих функцій, яке дорівнює  $3NMM$ , буде дорівнювати числу рівнянь (6) відносно  $a_{kl}^i(t)$  плюс число умов (7) та (8), тобто  $3NMM$ . Коефіцієнти  $b_{kl}^i(t)$  і  $c_{kl}^i(t)$  визначаються з умов (7) та (8) через функції  $a_{ik}(t)$ , що дозволяє зробити число рівнянь рівним числу невідомих. Одержаний розв'язок на кожному кроці за часом буде точно задовольняти граничні умови та умови сполучення на суміжних поверхнях шарів. Нестационарність буде відображена у тому, що функції  $a_{kl}^i(t)$  визначаються з розв'язку задачі Коші (6). Інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь (6) здійснюємо модифікованим методом Тейлора [9].

**Чисельні результати.** Як чисельний приклад розглянемо нагрівання п'ятишарового елемента оскління з параметрами у плані  $A = B = 0,4$  м. Тепловідляючу плівку, режим роботи якої відповідає закону  $W(x, y) = W H(t)$  ( $H(t)$  – функція Хевісайда;  $W = 3500$  Вт/м<sup>2</sup>;  $L_x / L_x = L_y / L_y = 0,75$ , див. (9)) розташуємо між першим і другим шарами, що відповідає її розташуванню в шаруватих стеклах з електрообігрівом для транспортних засобів. Перший, третій і п'ятий шари виконані із силікатного скла та з'єднані між собою шарами з полімерного матеріалу. Шари мають наступні теплофізичні і геометричні характеристики:  $\lambda_i = 1,6$  Вт/(м·°C),  $c_i = 0,75$  кДж/(кг·°C),  $\rho_i = 2500$  кг/м<sup>3</sup> ( $i = 1, 3, 5$ );  $\lambda_i = 0,17$  Вт/(м·°C),  $c_i = 1,5$  кДж/(кг·°C),  $\rho_i = 1200$  кг/м<sup>3</sup> ( $i = 2, 4$ );  $h_1 = 5 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_3 = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $h_4 = 2 \cdot 10^{-3}$  м,  $h_5 = 2 \cdot 10^{-2}$  м. Вважаємо, що початкова температура шарів дорівнює нулю. Коефіцієнти конвективної теплопередачі на зовнішній і внутрішній поверхні пластини, а також температура зовнішнього і внутрішнього середовища є такими:  $\alpha_n = 80$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C),  $\alpha_g = 25$  Вт/(м<sup>2</sup>·°C),  $T_n = -20$  °C і  $T_g = 20$  °C.

На рис. 1 подано розподіл температури вздовж товщини елемента оскління в різні моменти часу в точці перетину діагоналей на площині оскління  $x=0$ : 1 –  $t=1$  с, 2 –  $t=5 \cdot 10^2$  с, 3 –  $t=10^3$  с, 4 –  $t=5 \cdot 10^3$  с, 5 –  $t=10^4$  с. Положення тепловідляючої плівки в пакеті шарів позначено штрихпунктирною лінією. При  $t=1$  с розподіл температури є нелінійним вздовж товщини шарів, що особливо помітно в третьому та п'ятому шарах. Із часом температурний розподіл у всіх шарах стає лінійним. У шарах, які

є близькими до поверхні з тепловиділяючою плівкою, спостерігається великий градієнт температур. Починаючи з моменту часу  $t = 5 \cdot 10^3$  с, температурне поле практично не змінюється, тобто стає стаціонарним.

З метою підтвердження вірогідності чисельних результатів проведено порівняння результатів розрахунку запропонованим методом та методом скінченних елементів (штрихова лінія 6 на рис. 1). Ці результати добре узгоджуються між собою.

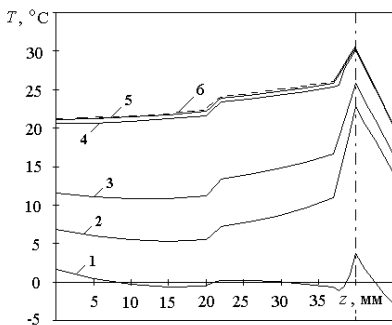


Рис. 1 – Розподіл температури вздовж товщини елемента оскління

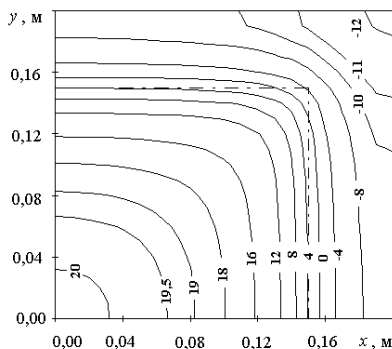


Рис. 2 – Розподіл температури на поверхні елемента оскління

На рис. 2 наведено поле температур на поверхні із плівкою в момент часу  $t = 5 \cdot 10^3$  с. Видно, що поблизу краю плівки спостерігається різке зміння температури від додатних до від'ємних значень, що може викликати значні температурні напруження у шарах оскління. Як показало дослідження розподілу температури на поверхнях оскління, на поверхні, яка віддалена від джерела тепла, значення температури стають дещо меншими, а її розподіл по площі пластини стає більш рівномірним, що зменшує ризик розшарування шарів та розтріскування оскління.

**Висновки й перспективи подальших досліджень.** Розроблено метод дослідження температурних полів у шаруватому осклінні транспортних засобів, які виникають під нестационарним впливом розподіленого плівкового джерела тепла. Метод дозволяє вірогідно описувати тепловий стан шаруватих конструкцій, що містять шари з різними теплофізичними характеристиками.

Розв'язання задачі в такій постановці має прикладне значення, тому що результати дослідження можна застосувати для аналізу ефективності та надійності параметрів систем обігрівання безпечного шаруватого оскління літальних апаратів та наземних транспортних засобів.

## Список використаних джерел

1. Goldstein R.J. Heat transfer – a review of 2003 literature / R.J. Goldstein, W.E. Ibele, S.V. Patankar // Int. J. Heat Mass Transfer.– 2006.– Vol. 49, N 3-4.– P. 451-534.
2. Shih T.-M. Literature survey of numerical heat transfer (2010–2011) / T.-M. Shih, Y. Zheng, M. Arie, J.-Ch. Zheng // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications.– 2013.– Vol. 64, Iss. 6.– P. 435-525.
3. Oguamanam D.C.D. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels / D.C.D. Oguamanam, J.S. Hansen, G.R. Heppler // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2004.– V. 71, № 1.– P. 49 – 56.
4. Diakoniuk L.M. Heterogeneous model of the process of thermal conductivity in a multilayered medium with thin layers / L.M. Diakoniuk, Ya.H. Savula // Journal of Numerical & Applied Mathematics. – 2017.– N 3 (126). – P. 33 – 47.
5. Kayhani M.H. A general analytical solution for heat conduction in cylindrical multilayer composite laminates / M.H. Kayhani, M. Norouzi, A.A. Delouei // Int. J. Thermal Sciences.– 2012.– Vol. 52.– P. 73-82.
6. Shupikov A.N. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / A.N. Shupikov, N.V. Smetankina, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. Heat Transfer.– 2007. – V. 129, № 3. – P. 335 – 341.
7. Smetankina N.V. Analysis of temperature fields in laminated plates with film heat sources/ N.V. Smetankina // Thesis of XVI International Conference Reports “Dynamical System Modelling and Stability Investigation”.– 2013.– P. 321.
8. Altenbach I. Die methode der finiten elemente in der festkörpermechanik / I. Altenbach, U. Gabbert, J. Dankert, H. Köppler, S. Koczyk, A. S. Sacharov, V. N. Kislookij, V. V. Kiričevskij. – Leipzig: VEB Fachbuchverlag, 1982.– 480 p.
9. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.

## Abstract

### CALCULATION OF THERMAL FIELDS IN LAMINATED GLAZING OF VEHICLES

**Smetankina N.V.**

*A method for calculation of nonstationary thermal fields in a laminated glazing of vehicles under the effect of impulse film heat sources is offered. The multilayer glazing is considered as a rectangular multilayer plate made up of*

*isotropic layers with constant thickness. Convective heat transfer occurs on outer surfaces of the plate. The temperature on the side surface of the plate is zero. The equation of nonstationary thermal conduction for an arbitrary plate layer and boundary conditions on a lateral surface of the plate are formed on the basis of the variational equation of thermal balance. Distribution of temperature along width each layer is presented by means of the Legendre orthonormalized polynomials. The problem is reduced to integration of a system of differential equations by modified Taylor's method. As an example, we solved the nonstationary heat conduction problem for a five-layer glazing element of an airplane under heating by the film heat source. The comparative analysis of the temperature distribution over the element thickness with the results of finite element method is carried out. The results are well consistent with each other which confirms their probability. The approach offered can be used for designing a safe laminated glazing under operational and emergency thermal and force loading in different vehicles.*

*Keywords: laminated glazing, nonstationary thermal conduction, film heat source, reliability.*