

**Т.Н. Болотова, канд. екон. наук, доцент**  
**Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет**  
**В.И. Макаров**

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В РАСТЕНИЕВОДСТВЕ КАК СЛЕДСТВИЕ ЗАКОНОВ ФИЗИОЛОГИИ РАСТЕНИЙ**

*В статье дана математическая интерпретация законов физиологии развития растений: закона минимального ограничивающего фактора – закон минимума Либиха и закона максимального ограничивающего фактора – закон толерантности Шелфорда. Согласно этим законам биологическая активность растений (функция урожайности) существует в ограниченной области пространства, на границе которой функция урожайности обращается в ноль. С помощью математического метода статистики – регрессионного анализа биологических зависимостей растений от внешних факторов (норм удобрений) определены трехфакторные функции урожайности.*

**Ключевые слова:** закон минимума Либиха, закон толерантности Шелфорда, производственные функции, метод наименьших квадратов, функция регрессии, поверхности уровня функции урожайности.

**Постановка проблемы.** Современная цифровая экономика базируется на алгоритмическом инструментарии, который объединяет естественные фундаментальные закономерности материального мира с экономическими законами. Примером такого объединения в экономике растениеводства является система “cropping system”, которая используется в фермерских хозяйствах за рубежом. На основе этой технологии определяются производственные функции сельскохозяйственных культур, которые являются алгоритмическим инструментарием для оптимизации снабжения растений питанием.

Таким образом, определение аналитического вида производственных функций в растениеводстве на основе экспериментальных данных является актуальной задачей в экономике растениеводства.

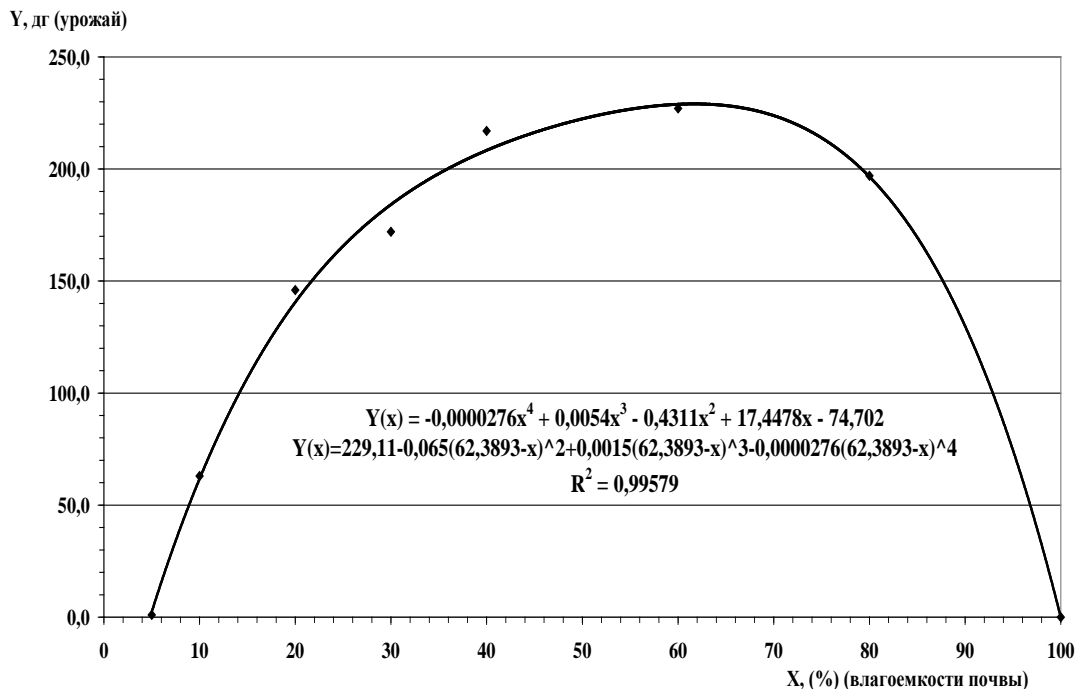
**Анализ последних исследований и публикации.** В Украине под руководством академика НААН Украины Я.С. Гукова в 2011-2012 гг. было проведено внедрение системы “cropping system” в ряде опытных хозяйств ИМЭСХ НААН. В результате проведенных исследований были определены производственные функции озимой пшеницы “Крыжинка” в условиях разных способов обработки почвы и ярового ячменя [1]. Если известны производственные функции сельскохозяйственных растений, то теория позволяет определить оптимальные нормы минеральных удобрений для питания растений [1,3].

**Формулирование целей статьи.** Целью статьи является с помощью метода наименьших квадратов определить производственные функции озимой пшеницы «Мироновская 808» на основе экспериментальных данных [4]. На конкретном примере продемонстрировать тот факт, что, как правило, рекомендации по технологии внесения композиции NPK удобрений экономически неоправданны.

**Изложение основного материала исследования.** Биологические характеристики развития растений существуют в ограниченном интервале факторов, влияющих на физиологию развития растений. Нижнюю границу этого интервала определяет закон минимального ограничивающего фактора – закон минимума Либиха [5]. Верхнюю границу этого интервала определяет закон максимального ограничивающего фактора – закон толерантности Шелфорда [6].

Гельрегель экспериментально подтвердил наличие минимального ограничивающего фактора, изучив зависимость урожая ярового ячменя от влагоемкости почвы (рис1). (Экспериментальные данные этого опыта приведены в монографии Р.Вильямса [7]). Характерной особенностью функциональной зависимости урожая ярового ячменя от влагоемкости почвы является наличие точки максимума.

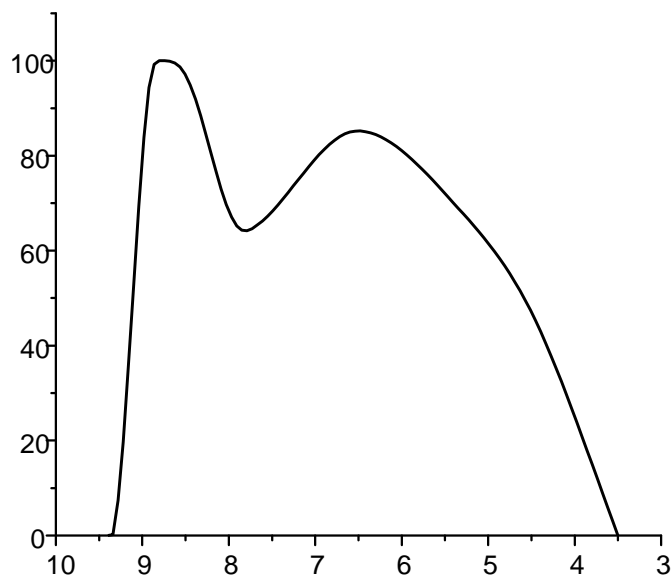
Аррениус, изучив зависимость урожая ряда сельскохозяйственных культур (горох, красный клевер, люцерна, тимофеевка и лисохвост) от реакции почвы на концентрацию протонов  $H^+$  (кислотности почвы pH), определил как нижние, так и верхние границы интервала, а котором существует функция урожайности. Графические зависимости этих опытов приведены в монографии Сабинина Н.Д. [7].



**Рис. 1. Зависимость урожая ярового ячменя от влагоемкости почвы**

На рис. 2 приведена зависимость урожая гороха от кислотности почвы рН, которая существенно отличается от зависимости, приведенной на рис. 1.

В этих экспериментах было установлено, что существуют два типа зависимостей урожая сельскохозяйственных культур от внешних факторов [7].



**Рис. 2. Зависимость урожая гороха от рН почвы**

Первый тип зависимостей урожая сельскохозяйственных культур от внешнего фактора – кривая параболического типа с одной точкой максимума (рис.1). Второй тип зависимостей урожая сельскохозяйственных культур (например, гороха) от внешнего фактора – двухвершинная кривая, имеющая точку минимума и две точки максимума (рис.2).

Кривые, представленные на рис.1-2, можно считать экспериментальным подтверждением известной математической леммы: если произвольная аналитическая функция, определенная на конечном интервале, на концах которого обращается в ноль, то эта функция внутри интервала имеет, хотя бы одну экстремальную точку.

Из этой леммы следует, что если произвольная аналитическая функция внутри интервала положительна и имеет точку минимума внутри этого интервала, обращаясь в ноль на его концах, то внутри этого интервала существует интервал, в котором существует двухвершинная кривая.

Таким образом, из математической интерпретации общих законов физиологии развития растений следует, что однофакторные биологические кривые имеют особые точки: точки, в которых первые производные от функции урожайности обращаются в ноль (точки максимума и минимума), и точки, в которых вторые производные от функции урожайности обращаются в ноль (точки перегиба)

Для аналитического анализа в окрестности особой точки  $X = X_{oc}$  уравнение функции урожайности  $Y(X) = Y_{oc}$  можно разложить в ряд Тейлора ( $X$  - переменный фактор,  $Y_{oc}$  - величина урожая в особой точке). Согласно законам математики в окрестности этих функция урожайности имеет простые канонические формы:

$$Y(X) = Y_{oc}^{\pm} \pm C(X - X_{oc})^2 \quad (1)$$

$$Y(X) = Y_{oc}^i \pm C(X - X_{oc})^3 \quad (2)$$

В формуле (1) знак “+” соответствует точки минимума (вторая производная положительная), знак “-” соответствует точки максимума (вторая производная отрицательная). В формуле (2) знаки  $\pm$  соответствуют двум S-образным кривым.

Интерпретация результатов для однофакторных функций урожайности сельскохозяйственных культур легко обобщается на случай многофакторных функций урожайности в пространстве своих переменных.

В случае трехфакторных функций урожайности результаты анализа имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Если однофакторные функции урожайности это биологические кривые, существующие в ограниченном интервале, то многофакторные

функции урожайности это биологические поверхности, существующие в ограниченной области пространства.

Все особенности многофакторной функции урожайности отображаются в ее спектре – однопараметрическом семействе поверхностей уровня этой функции  $Y(X_i) = Y_0$  ( $X_i$  - переменные факторы,  $Y_0$  - значение уровня).

Согласно законам физиологии развития растений многофакторная функция урожайности обращается в нуль на границе ее существования. Тогда в спектре многофакторных функций урожайности будет иметь особую точку хотя бы одна выделенная поверхность уровня  $Y(X_i) = Y_{кр}$ , градиент к которой в точке  $X_{i0c}$  обращается в ноль  $\nabla Y(X_i)_{X=X_{i0c}} = 0$ .

Если детерминант вторых производных этого ряда отличен от нуля, т.е. больше нуля или меньше нуля, то трехфакторная функция урожайности в окрестности особых точек имеет два типа особых точек: эллиптические и гиперболические. В этом случае существуют 8 видов канонических форм:

$$Y(X_1, X_2, X_3) = Y_0^* \mp a_1 X_1^2 \pm a_2 X_2^2 \mp a_3 X_3^2, \quad a_i > 0 \quad (3)$$

Если в формуле (3) знаки при коэффициентах одинаковы или плюсы или минусы, то поверхности, определяемые этой формулой, эллипсоиды, а в других случаях – гиперболоиды.

Величина  $Y_0^*$  определяет поверхность уровня функции  $Y(X_{0i}) = Y_0^*$ , имеющую особую точку с координатами  $X_{0i}$ . В окрестностях особых точек в семействе поверхностей уровня  $Y(X_i) = Y_0$  при изменении параметра  $Y_0$  наблюдаются топологические переходы – скачкообразно изменяется связность поверхности. В окрестности эллиптических особых точек семейство поверхностей уровня – эллипсоиды, которые в особой точке стягиваются в точку (рис.3). В окрестности гиперболических особых точек семейство поверхностей уровня – гиперболоиды (рис.4-5). В этом случае наблюдается два типа топологического перехода. Первый тип перехода Н12, когда семейство однополостных гиперболоидов трансформируется в семейство двуполостных гиперболоидов(рис.4). Второй тип перехода Н21, когда семейство двуполостных гиперболоидов трансформируется в семейство однополостных гиперболоидов(рис.5). Исходя из общих соображений, топологические переходы должны наблюдаться в трех направлениях N (Н12N, Н21N), P(Н12P, Н21P) и K(Н12K,Н21K).

Наличие особых точек такого типа было установлено в результате сравнения методом наименьших квадратов зависимости урожая 1969 г. озимой пшеницы Мироновская 808 с поверхностью регрессии 2-го порядка. Статистический анализ базы данных из 81 точки[4], каждая из

которых соответствует различной комбинации доз минеральных удобрений: азотных N, фосфорные P, калийных K, показал, что вся совокупность данных состоит из 3-х блоков по 27 точек со следующими поверхностями регрессии 2-го порядка:  $Y(N,P,K)=21.27+17.021*N-12.0559*N^2+11.9945*P-2.8812*P^2+6.4247*K-3.897*K^2+0.9416*N*P+1.7604*N*K+0.3217*P*K$ , величина дисперсии  $\chi^2 = 2.0975$ , вероятность этой величины  $P=1.0$ (поверхность эллипсоид).

Семейство поверхностей уровня  $Y(N,P,K) = Y_i$  представлено на рис.3.

1.  $Y(N,P,K) = 21,27$ ц/га, 2.  $Y(N,P,K) = 35$ ц/га, 3.  $Y(N,P,K) = 42$ ц/га,
2.  $Y(N,P,K)=16.71+16.803*N-9.228*N^2+16.814*P-4.296*P^2-1.639*K+3.313K^2+0.818*N*P-0.875*N*K+0.064*P*K$ ,  $\chi^2=0.5094$ ,  $P=1.0$  (поверхность однополостный гиперболоид)

Семейство поверхностей уровня  $Y(N,P,K) = Y_i$  представлено на рис.4.

1.  $Y(N,P,K)=16,71$ ц/га 2.  $Y(N,P,K)= 41,7$ ц/га 3.  $Y(N,P,K)= 47$ ц/га
2.  $Y(N,P,K)=27.09-20.573*N+9.509*N^2+21.452*P-10.319*P^2-8.313*K+5.565*K^2+6.403*N*P+2.812*N*K+0.69*P*K$ ,  $\chi^2 = 4,5728$ ,  $P=1.0$  (поверхность двуполостный гиперболоид)

Семейство поверхностей уровня  $Y(N,P,K) = Y_i$  представлено на рис.5.

1.  $Y(N,P,K) = 27,09$  ц/га 2.  $Y(N,P,K)=32,2$  ц/га 3.  $Y(N,P,K)= 45$  ц/га

При изменении параметра  $Y_i$  в семействе поверхностей уровня наблюдается изменение топология поверхностей урожайности (рис. 4 -5).

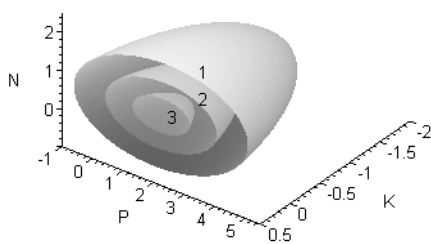


Рис. 3

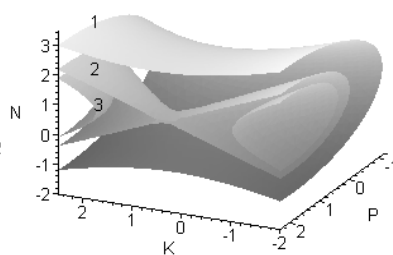


Рис. 4

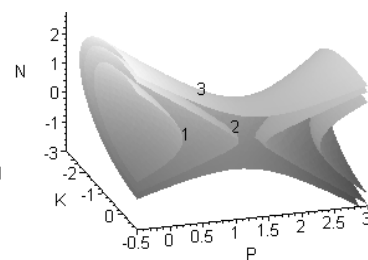


Рис. 5

Однофакторные производственные функции озимой пшеницы “Мироновская 808” представлены на рис. 6-9.

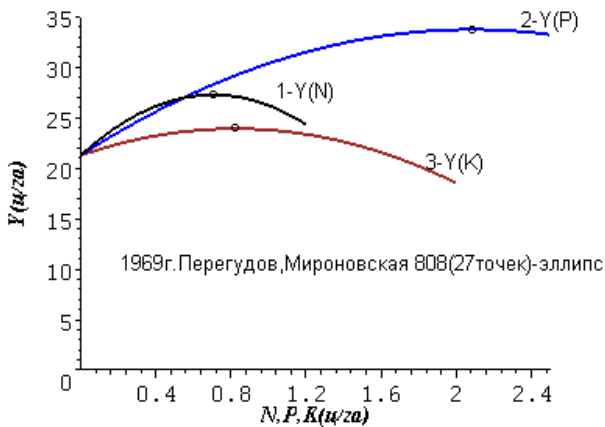


Рис. 6.

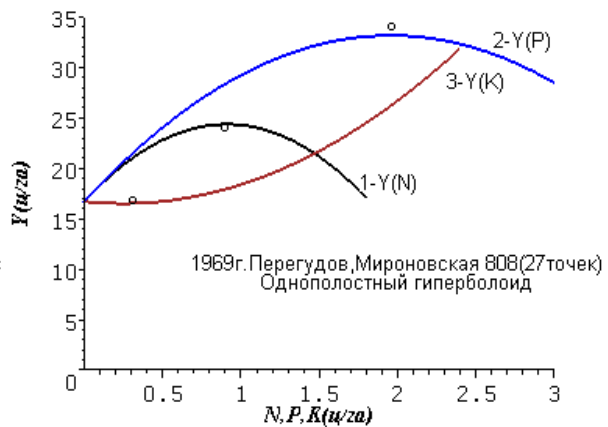


Рис. 7.

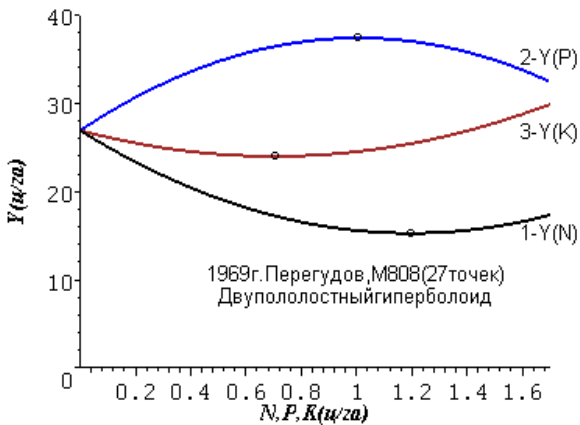


Рис. 8.

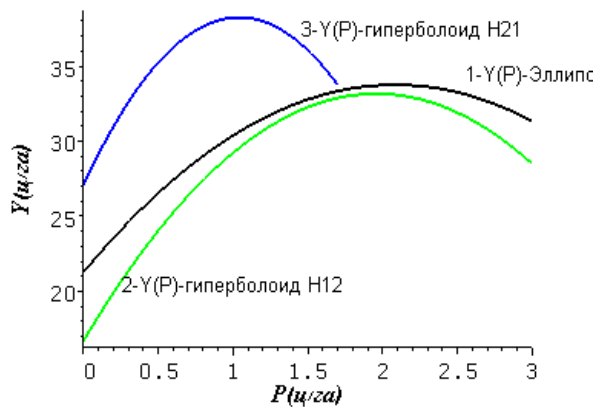


Рис. 9.

Как видно из этих графиков на практике реализуются случаи, когда внесение азотных, фосфорных и калийных удобрений приводит к увеличению урожая (рис. 6) и когда внесение этих удобрений оказывает разное влияние на величину урожая: одни его увеличивают, а другие – уменьшают (рис. 7-8). Только внесение одного вида удобрений (фосфорные) приводит к увеличению урожая на всей площади поля в трех блоках, расположенных на одном поле (рис. 9). Анализ экспериментов [4] показал, что поле площадью 2га. пространственно неоднородно по почвенно-климатическим условиям. Поэтому общие рекомендации по технологии внесения удобрений в композиции NPK можно считать экономически неоправданными.

**Выводы.**

1. Дана математическая интерпретация законов физиологии развития растений, согласно которой определены аналитические уравнения трехфакторных функций (поверхностей) биологических характеристик (функции урожайности). Установлено, что семейство поверхностей уровня

функции урожайности имеет хотя бы одну поверхность уровня функции урожайности с особой точкой, градиент в которой обращается в ноль.

2. Установлено, что в окрестности особых точек для трехфакторных функций урожайности может наблюдаться 8 канонических форм, две из которых в окрестности особых точек эллиптического типа и 6 канонических форм в окрестности особых точек гиперболического типа.

3. Проведено сравнение экспериментальных данных по зависимости урожая озимой пшеницы “Мироновская 808” от норм внесения минеральных удобрений - азотных, фосфорных и калийных, с возможными аналитическими уравнениями функции урожайности. Установлено, что функции урожайности озимой пшеницы “Мироновская 808” имеют особые точки двух типов: одну эллиптическую и две гиперболические.

4. Установлено, что однофакторные функции трехфакторной функции урожайности с особой точкой эллиптического типа имеют максимумы при определенных значениях норм минеральных удобрений азотных, фосфорных и калийных.

5. Установлено, что однофакторные функции трехфакторной функции урожайности с особой точкой гиперболического типа при определенных значениях норм минеральных удобрений одни имеют максимумы (например, фосфорных), а другие минимумы (например, азотных и калийных). В этом случае экономически неоправданны технологии подкормки растений композицией NPK.

**Библиографический список:** 1. Макаров В.И. Опыт внедрения агроэкономической системы в сельскохозяйственных предприятиях Украины. Стратегія розвитку аграрного сектору економіки на період до 2020 року, Збірник матеріалів 14-річних зборів Всеукраїнського конгресу вчених економістів аграрників, 16-17 жовтня 2012 року. м. Київ, с.715-722. 2. Э. Хеди, Д. Диллон, Производственные функции в сельском хозяйстве, Москва: Изд-во Прогресс, 1965 г. – 687 с. 3. Болотова Т.Н. Методология экономического анализа агротехнологий в растениеводстве на базе трехфакторных производственных функций. Наукові праці Полтавської державної аграрної академії. Вип. 2(5) - Т.3. - Полтава: ПДАА. - 2012. - С.35-49. 4. Перегудов В.Н. Планирование многофакторных полевых опытов с удобрениями и математическая обработка их результатов. Москва, Колос, 1978г., 183с. 5. Liebig J., Chemistry in Its Application to Agriculture and Physiology, 4<sup>th</sup>-ed., Taylor and Walton, London, 1847. 6. Schelford V.E, Animal Communities in Temperate America, University of Chicago, 1913, 390 p. 7. Вильямс В.Р. “Почвоведение. Земледелие с основами почвоведение“, 5-е изд, Москва, Госиздатсельхозлит, 1940 г. 466



с. 8. Сабинин Д.А. Физиологические основы питания растений, Москва, Изд-во АН СССР, 1955 г, 512 с.

**Т.М. Болотова, В.І. Макаров Аналітичні рівняння виробничих функцій у рослинництві як наслідок законів фізіології рослин.** В статті дана математична інтерпретація законів фізіологічного розвитку рослин: закон мінімального обмежувального фактора - закон мінімуму Лібіха і закону максимального обмежувального фактора - закон толерантності Шелфорда. Згідно з цими законами біологічна активність рослин (функція врожайності) існує в обмеженій області простору, на границі якої функція врожайності наближається до нуля.

За допомогою математичного методу статистики - регресійного аналізу біологічних залежностей рослин від зовнішніх факторів (норм добрив) визначені трьохфакторні функції врожайності.

**Ключові слова:** закон мінімуму Лібіха, закон толерантності Шелфорда, виробничі функції, метод найменших квадратів, функція регресії, поверхні рівня функції врожайності.

**Bolotova T.M., Makarov V.I. Analytical equations of production functions in crop growing as a consequence of the laws of plants physiology.** *The subject of the paper* is the definition of the analytical form of production functions in plant growing on the basis of experimental data.

*The purpose of the article* is to determine the production functions of winter wheat "Mironovskaya 808" using the least squares method on the basis of experimental data [4]. On a concrete example, to demonstrate the fact that, as a rule, the recommendations on the technology of making the composition of NPK fertilizers are economically unjustified.

*The method* of the study is mathematical interpretation of the laws of plants physiological development is given. These laws are the follows: the law of minimal limiting factor, the law of Liebig's minimum, and the law of the maximum limiting factor, the law of Shelford's tolerance.

*The result* of the work is the established analytical equations for the production functions made possible to determine the optimal nutrition standards for the plants. It has been shown that, as a rule, the existing recommendations as for the technologies of introducing the composition of NPK fertilizers are economically unjustified.

**Key words:** law of Liebig's minimum, law of Shelford's tolerance, production functions, least squares method, regression function, surfaces of yield function level.

*Стаття надійшла до редакції: 13.01.2018 р.*