УДК 36:519.857.3

АНДРЄЄВ М.В., д.ф.-м.н.
м. Київ

ЗБУРЕНІ ПРОЦЕСИ РИЗИКУ ТА СЛАБКОКЕРОВАНІ ПРОЦЕСИ МАРКОВСЬКОГО ВІДНОВЛЕННЯ В ЗАДАЧАХ СТРАХУВАННЯ

Анотація. *Вивчаються збурені дифузією процеси страхового ризику з марковськими надходженнями страхових подій. Наведено явні формули для перетворень Лапласа часу відновлення, розподілу максимальної величини розорення та розподілу дивідендних виплат до розорення. Досліджено слабкокерований процес марковського відновлення страхової діяльності з побудовою ефективної стратегії превентивних заходів стосовно слабких збурень надходження страхових подій для забезпечення максимальної вигоди страхової діяльності до розорення.*

Ключові слова: *збурені процеси ризику, час відновлення, дивідендний бар'єр, слабкокерований процес марковського відновлення.*

Аннотация. *Изучаются возмущенные диффузией процессы страхового риска с марковскими поступлениями страховых событий. Приведены явные формулы для преобразований Лапласа времени восстановления, распределения максимальной величины разорения и распределения дивидендных выплат до разорения. Исследован слабоуправляемый процесс марковского восстановления страховой деятельности с построением эффективной стратегии превентивных мероприятий относительно слабых возмущений поступления страховых событий для обеспечения максимальной полезности страховой деятельности до разорения.*

Ключевые слова: *возмущенные процессы риска, время восстановления, дивидендный барьер, слабоуправляемый процесс марковского восстановления.*

Mykola Andreev Perturbed Risk Processes and Weakly Controlled Markov Renewal Processes in Insurance Problems. *Perturbed by diffusion insurance risk processes with Markovian arrivals of insurance events are studied. The explicit formulas are presented for the Laplace transform of the recovery time, the distribution of the maximum severity of ruin and the distribution of the dividend payments prior to the ruin. We research weakly controlled Markov renewal process of insurance activity with construction of effective policy of preventive measures relative to weakly perturbed insurance events arrivals in order to ensure maximum utility of insurance activity prior to the ruin.*

Key words: *perturbed risk processes, time of recovery, dividend barrier, weakly controlled Markov renewal process.*

Постановка проблеми. Понад 300 років тому Ллойд, власник кав'ярні в Лондоні, усвідомив необхідність страхування транспортних ризиків у морських перевезеннях. На сьогодні страхова компанія Ллойд оф Лондон лише за один робочий день приймає страхових внесків на суму більш як 25 мільйонів фунтів стерлінгів. Страхова діяльність полягає в тому, що страхувальник (клієнт) сплачує страхові внески, а страховик (страхова компанія) бере на себе зобов'язання провести страхову виплату, яка компенсує збитки, відповідно страховому полісу у випадку виникнення страхової події.

Існування ризиків для життя, власності, навколишнього середовища тощо, викликає створення величезної всесвітньої індустрії, що забезпечує фінансове покриття непередбачених втрат. У центрі всього цього лежить незаперечна присутність випадковості.

Мета статьи – показати, як теорія ймовірностей, зокрема, процеси відновлення, теорія марковських процесів і слабкокерованих процесів марковського відновлення, використовуються для розв'язання задач у страховій сфері.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На основі результатів статей Лі [9] та Рена [10], [13], подати явні формули для перетворення Лапласа: часу першого досягнення певного рівня до розорення; часу відновлення; ймовірності того, що накопичений страховий капітал досягне певного рівня до розорення; розподілу максимальної величини розорення та розподілу дивідендних виплат до розорення. Цей аналіз приводить до формул, які узагальнюють, зокрема, формули для класичних пуассонових збурень. На основі результатів статті Королюка, Андрєєва [19] дослідити нову модель процесу марковського відновлення страхування, у якій слабке ефективне керування збуреннями, пов'язаними з надходженнями страхових подій, забезпечує максимум очікуваної вигоди.

Виклад основного матеріалу. Оптимізація страхової діяльності зумовлює той факт, що справляє на стан страхової компанії регулювання процесу надходження страхових внесків, з одного боку, а з іншого, процес управління страховою діяльністю за умов екстремальних ситуацій, результат появи яких може призвести до припинення діяльності страхової компанії, тобто до її розорення. Визначальними характеристиками страхової діяльності є страховий ризик і очікуваний доход. Кроки управління процесом страхового ризику мають здійснюватись в залежності, по-перше, від марковських надходжень страхових подій або подій ситуацій для прийняття хеджувальних рішень і, по-друге, від ряду сталих у процесі страхової діяльності хеджувальних заходів і їхньої придатної здатності вирішувати поставлені задачі. Кроки слабкого управління процесом марковського відновлення мають здійснюватись, по-перше, шляхом максимізації очікуваного доходу для страхової компанії до часу її розорення з метою компенсації можливих страхових витрат і, по-друге, визначенням ефективної стратегії прийняття запобіжних заходів щодо появи страхових подій.

З математичної точки зору постає питання про обчислення ймовірності розорення страхової компанії і той інструментарій, за допомогою якого це можна досягти. Використовуючи ідеї теорії відновлення, зокрема, рівняння відновлення, Крамером [2] в аналітичному вигляді отримано формулу для ймовірності розорення. Мартингальні методи дозволили Герберу [3] розглянути різні узагальнення процесу появи моментів страхових виплат і врахувати вплив інфляції та інших явищ, які впливають на динаміку страхової діяльності, при цьому основним інструментарієм виступає опціональна теорема про зупинку або теорема про перетворення вільного вибору.

Якщо процес появи моментів страхових виплат є процесом відновлення, то можливий постійний розмір страхових внесків за постійної страхової надбавки. За фіксованої страхової надбавки необхідно, щоб за будь-який часовий інтервал очікуваний доход був пропорціональним очікуваним витратам.

Процеси відновлення в якості процесів появи моментів страхових виплат допускають постійний розмір страхових внесків і розорення може трапитись лише в момент відновлення. Це значно спрощує обчислення ймовірності розорення. Перше дослідження з цього приводу належить Спарре– Андерсену [1], [20], тому моделі з процесом відновлення називають моделями Спарре–Андерсена [13]. В подальшому ці моделі значно ускладнились у зв'язку з узагальненням процесу ризику, в якому розмір страхових внесків залежить від марковського процесу надходження страхових подій, і процес ризику може збурюватись стандартним броуновим рухом.

Суть процесу ризику виражається моделлю резерву страхової компанії:

"початковий капітал" + "надходження від страхових внесків" – "страхові виплати на позови клієнтів", а розорення страхової компанії означає досягнення процесом ризику від'ємного резерву, тобто її банкрутство.

За останні 10 років марковські процеси надходжень від страхових внесків, тобто змінний розмір страхових внесків, що сприяє включенню в процес ризику очікуваних дисконтних дивідендів і загальних дивідендів, інтенсивно вивчались в математичній літературі з теорії незбуреного та збуреного процесів ризику [5], [9], [11]. Саме з такої точки зору слід розглядати процеси ризику, щоб можна було проводити бізнес–аналіз діяльності страхової компанії.

Завдяки наявності наведених вище теорій і сукупності методів за допомогою яких стало можливим вивчати процеси ризику та різні аспекти діяльності страхових компаній, створено повнокровну галузь науки, яка називається страховою або актуарною математикою. Немає можливості тут охопити її повністю. Наведемо лише короткий огляд нових результатів, отриманих різними авторами для збурених дифузією процесів ризику [9], [10],[11] та результатів дослідження запропонованої автором слабко керованої моделі марковського відновлення, за допомогою якої розв'язано задачу максимізації очікуваного доходу страхової компанії до часу її розорення з метою компенсації можливих страхових витрат і побудовано ефективну стратегію прийняття запобіжних заходів щодо появи страхових подій.

У доповіді використано результати Рена та Лі, що стосуються збурених класичних процесів ризику та збурених процесів ризику в марковському середовищі. У вступі описано збурений броуновим рухом процес ризику, в якому позови на страхові виплати описані марковським процесом надходження страхових подій, і цей процес впливає як на процес накопичення капіталу страхової компанії, так і на інтенсивність дифузійного збурення процесу ризику.

У розділі, що стосується збуреного процесу ризику дифузією, отримано, при заданому рівні початкового капіталу, явний вигляд перетворення Лапласа для моменту першого досягнення збуреним процесом ризику наперед заданого рівня перед розоренням. Цей результат узагальнює результат Гаррісона для процесу ризику збуреного марковським броуновим рухом за відсутності стрибків [8], узгоджується з узагальненим фундаментальним рівнянням Лумберга [20] та рівнянням Гербера та Ландрі [4] для збуреного пуассоновим процесом класичного процесу ризику.

У розділі, присвяченому часу відновлення у випадку, коли дифузійне збурення процесу ризику викликає розорення, процес накопичення капіталу "відновлює" процес ризику миттєво, і час відновлення процесу ризику співпадає з часом розорення. Завдяки ефективному регулюванню процесу накопичення капіталу, збурений процес ризику є регенеративним процесом. З урахуванням того, що процес ризику не має стрибків вгору, визначається перетворення Лапласа очікуваного часу відновлення, що визначається процесом відновлення, обумовленим марковським процесом надходження страхових подій за умови, що задана величина початкового капіталу.

У розділі, в якому йдеться про розподіл максимальної величини розорення, як і в попередньому розділі розглядається випадок, коли дифузія викликає розорення і процес ризику повертається до нульового рівня (перетинаючи його знизу–вверх) миттєво, завдяки ефективному регулюванню процесу накопичення капіталу, тому максимальна величина розорення визначається лише тоді, коли страховий позов викликає розорення. Для знаходження імовірнісного розподілу максимальної величини розорення визначається імовірнісний розподіл абсолютного значення процесу ризику на часі між моментами відновлення для процесу відновлення, обумовленим марковським процесом надходження страхових подій за умови, що задана величина початкового капіталу.

Цікавим для бізнес-аналізу в страховій діяльності є наступний розділ, в якому вивчаються агреговані страхові дивіденди $D(t),$ які виплачуються в момент $t,$ для моделі ризику за наявності постійного дивідендного бар'єру. Розглядається новий процес ризику $U_b(t),$ отриманий в результаті модифікації вихідного процесу ризику дивідендною виплатою. Якщо процес ризику $U_b(t)$ перевищує деякий постійний бар'єр b, більший за величину початкового капіталу u, тоді виплачуються дивіденди до тих пір, поки значення процесу $U_b(t)$ не стануть меншими за $b.$ Нехай $U_b(t)$ – процес ризику з початковим капіталом $U_b(0)=u$ і визначається час розорення як $\overline{T}=\inf\{t\ge 0: U_b(t)<0\}.$ Нехай $\delta>0$ дисконт-фактор, за допомогою якого визначаються дисконтні агреговані дивіденди з поточною вартістю $D_{u,b}=\int\limits_0^{\overline{T}} e^{-\delta t}dD(t),\ 0<u<b,$ до моменту розорення $\overline{T}$ із заданим початковим капіталом $u.$ Визначається $V_i(u;b)=\mathbf{M}_i[D_{u,b}\,|\,U_b(0)=u], 0\le u\le b, i=1,2,\cdots,m$ – очікувана поточна вартість дивідендних виплат перед розоренням при заданому початковому стані $i,$ для марковського процесу надходження страхових подій з фазовим простором станів $E=\{1,2,\cdots,M\}$ і початковим капіталом $u.$ Для $M\times 1$ вектора $\vec{V}(u;b)=(V_1(u;b),V_2(u;b),\cdots,V_M(u;b))$ Лі та Реном отримано явний вигляд.

В останньому розділі досліджено слабкокерований процес марковського відновлення (СКПМВ) з малими керованими стохастичними збуреннями в скінченому фазовому просторі станів (ФПС) $E=\{1,2,\cdots,M\}$. СКПМВ задається напівмарковським ядром $Q_{kr}^{\varepsilon,f}\equiv p_{k\,r}^{\varepsilon,f}G_k(t),\, t\in[0,\infty),$ $p_{k\,r}^{\varepsilon,f}=p_{k\,r}^{0}-\varepsilon\, p_{k\,r}^{1,f}$ – ймовірності переходу вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ), ε – малий параметр. Матриця перехідних ймовірностей (МПЙ) $P_0=\{p_{kr}^0, k,r\in E\}$ незбуреного ергодичного ланцюга Маркова $(X_n^0, n\ge 0)$ має стаціонарний розподіл $\rho=(\rho_1^0,\cdots,\rho_M^0),$ і характеризує усталений процес страхової діяльності, а $P_1^f=\{p_{kr}^{1,f}, k,r\in E\}$ – деяка матриця керованих стохастичних збурень (МКСЗ), яка характеризує слабкий вплив ($0\le\varepsilon\le 1$) зовнішнього середовища (процесу надходження страхових подій) на усталений процес страхової діяльності, f – стаціонарна детермінована стратегія прийняття запобіжних заходів щодо надходження страхових подій, задається функцією $E\to A.$ Матриця $P_\varepsilon^f=P_0-\varepsilon P_1^f$ представляє МПЙ для ВЛМ вихідного СКПМВ. $G_k(t)$ – функція розподілу часу перебування СКПМВ у стані $k.$

Вводиться поняття доходу від слабкокерованого процесу марковського відновлення страхової діяльності, пов'язаного з динамікою СКПМВ. Якщо у стані k прийнято рішення $a\in A$ (A– компактний простір рішень (КПР)) і час, проведений у стані k дорівнює $t,$ то доход за час t дорівнює $r_k(t,a).$ Функція $r_k(t,a)$ припускається вимірною по t і обмеженою по $k,a.$ Позначимо $\varphi_k(a)=\int_0^\infty r_k(t,a)G_k(dt).$

Критерієм оптимальності для стратегії f є очікуваний доход від слабкокерованого процесу марковського відновлення страхової діяльності, або ціна стратегії f, що визначається функціоналом, заданим на траєкторіях СКПМВ у вигляді

$$u_\varepsilon^f(k) = \mathbf{M}_\varepsilon^f\{L \mid x_0 = k\};\ L = \sum_{n=0}^{\tau_\varepsilon^f} \varphi_{x_{n-1}^\varepsilon}(a_n) + \psi_0\left(a_{\tau_\varepsilon^f}\right), \tag{1}$$

де $\mathbf{M}_\varepsilon^f$ – символ математичного сподівання, що відповідає МПЙ P_ε^f, τ_ε^f – момент розорення; обумовлений стратегією f; $\psi_0(a_{\tau_\varepsilon^f})$ – обмежена функція дивідентних виплат від прийняття рішення стосовно розорення в момент τ_ε.

Стратегія f^* оптимальна, якщо

$$u_\varepsilon^{f^*(k)}(k) - u_\varepsilon^{f(k)}(k) \ge 0 \ \ \forall f \in F_0,\ \forall k \in E,$$

де F_0 – клас стаціонарних детермінованих стратегій; а очікувана вигода, що відповідає оптимальній стратегії f^* позначається через u_ε^*.

Задача побудови оптимальної стратегії за умов, що задана P_ε^f –модель із скінченим ФПС E, компактним простором рішень A та критерієм оптимальності очікуваної вигоди (1), зводиться до виводу рівняння оптимальності, якому задовольняє максимальна очікувана вигода та знаходженню його розв'язку, на основі якого будується оптимальна стратегія.

Вектор оптимальної очікуваної вигоди $u_\varepsilon^* = \{u_k(f_\varepsilon^*(k)); k \in E\}$ задовольняє нелінійному рівнянню оптимальності типу Беллмана [19]

$$u_\varepsilon^* = \max_{f \in F_0}\left\{\varphi^f + \varepsilon\psi^f + P_\varepsilon^f u_\varepsilon^*\right\}, \tag{2}$$

у якому задані матриця $P_\varepsilon^f = \left\{p_{kr}^0 - \varepsilon p_{kr}^{1,f(k)};\ k,r \in E\right\}$, (p_{kr}^0 і $p_{kr}^{1,f(k)}$ – kr -ті елементи матриць P_0 і P_1^f відповідно) та вектори $\varphi^f = \{\varphi_k(f(k)); k \in E\}$, $\psi^f = \{\psi_k(f(k)); k \in E\}$ (додатні компоненти вектора вигоди $\varphi_k(f(k))$ та від'ємні компоненти вектора $\psi(f(k))$ характеризують поточну вигоду за стаціонарним рішенням $f(k)$ у стані k і величину дивідентних виплат при закінченні відновлення страхової діяльності у стані k, відповідно); $E_0 := E \cup \{0\}$, E – простір станів з усталеною практикою відновлення страхової діяльності; $\{0\}$–стан розорення або припинення процесу відновлення; f – стратегія із заданого класу стратегій F_0 зі значеннями у просторі рішень A; $u_\varepsilon^* = u_\varepsilon^{f^*}$, де f_ε^* – оптимальна стратегія, що реалізує максимум у правій частині рівняння оптимальності (2), $0 < \varepsilon < 1$.

Використовуючи результати теорії збурення звідно-оборотних операторів на спектрі та методи послідовної оптимізації, знайдемо розв'язок рівняння оптимальності та алгоритм побудови оптимальної стратегії.

Шукаємо представлення розв'язку рівняння оптимальності (2) у вигляді степеневого ряду за малим параметром ε, тобто

$$u_\varepsilon^* = \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m u_m^*, \tag{3}$$

коефіцієнти якого задовольняють системі рівнянь

$$\begin{aligned}
&(I - P_0)u_{-1}^* = 0,\\
&(I - P_0)u_0^* = \max_{f \in F_0}\left\{\varphi^f - P_1^f u_{-1}^*\right\},\\
&(I - P_0)u_1^* = \max_{f \in F_1}\left\{\psi^f - P_1^f u_0^*\right\},\\
&(I - P_0)u_m^* = \max_{f \in F_m} P_1^f u_{m-1}^*, m \ge 2,
\end{aligned} \tag{4}$$

де

$$F_1 = \{f \in F_0 : (I - P_0)u_0^* = \varphi^f - P_1^f u_{-1}^*\},$$
$$F_2 = \{f \in F_1 : (I - P_0)u_1^* = \psi^f - P_1^f u_0^*\},$$
$$F_m = \{f \in F_{m-1} : (I - P_0)u_{m-1}^* = -P_1^f u_{m-2}^*\}, m \ge 3.$$

Застосовуючи до системи (4) алгоритм Вішіка-Люстерніка, модернізований для P_ε^f -моделі в [19], маємо

$$u_{-1}^* = \hat{\varphi}^* / \hat{q}^* \mathbf{1},$$
$$u_m^* = R_0\varphi_m^* + \hat{\psi}_{m+1}^* / \hat{q}^* \mathbf{1},\ m \ge 0, \tag{5}$$

де

$$\hat{\varphi}^* / \hat{q}^* = \max_{f\in F_0}\{\hat{\varphi}^f / \hat{q}^f\};\ \hat{\varphi}^f = \sum_{k\in E_0}\rho_k\varphi_k(f(k));$$
$$\hat{q}^f = \sum_{k\in E_0}\rho_k P_{k0}^{1,f(k)};$$

$R_0 = [I - P_0 + \Pi]^{-1} - \Pi$ – узагальнений обернений оператор до оператора $(I - P_0)$, Π=[$\mathbf{1}\otimes\rho$] – власний проектор оператора (матриці) ($I - P_0$) де $\mathbf{1}=(1,...,1)'$, $\rho = (\rho_1,...,\rho_M)$ – правий і лівий власні вектори оператора (матриці) P_0, $\otimes$ – знак тензорного множення;

$$\varphi_0^* = \max_{f\in F_0}\{\varphi^f + q^f\hat{\varphi}^* / \hat{q}^*\}, q^f \in P_1^f\mathbf{1},$$
$$\varphi_1^* = \max_{f\in F_1}\{\psi_1^f + q^f\psi_1^* / \hat{q}^*\}, \psi_1^f = \psi^f - P_1^f R_0\varphi_0^*,$$
$$\varphi_m^* = \max_{f\in F_m}\{\psi_m^f + q^f\hat{\psi}_m^* / \hat{q}^*\}, \psi_m^f = P_1^f R_0\varphi_{m-1}^*,$$
$$\hat{\psi}_m^* / \hat{q}^* = \max_{f\in F_m}\{\hat{\psi}_m^f / \hat{q}^f\}, \hat{\psi}_m^f = \sum_{k\in E}\rho_k\psi_m(f(k)), m \ge 2.$$

Стаціонарна стратегія f_ε^*, яка реалізує максимум правої частини системи рівнянь (4), тобто задовольняє системі рівнянь (5) є оптимальною. Знаходження оптимальної стаціонарної детермінованої стратегії f_ε^* при фіксованому ε реалізується алгоритмом, на k –му кроці якого вибирається наближення $f_\varepsilon^{(k)}$ стратегії f_ε^* за умов

$$\hat{\varphi}^{f_\varepsilon^{(k)}} / \hat{q}^{f_\varepsilon^{(k)}}\mathbf{1} \ge \hat{\varphi}^{f_\varepsilon^{(k-1)}} / \hat{q}^{f_\varepsilon^{(k-1)}}\mathbf{1},$$
$$R_0\hat{\varphi}_m^{f_\varepsilon^{(k)}} + \hat{\psi}_{m+1}^{f_\varepsilon^{(k)}} / \hat{q}^{f_\varepsilon^{(k)}}\mathbf{1} \ge R_0\hat{\varphi}_m^{f_\varepsilon^{(k-1)}} + \hat{\psi}_{m+1}^{f_\varepsilon^{(k-1)}} / \hat{q}^{f_\varepsilon^{(k-1)}}\mathbf{1},\ m \ge 0. \tag{6}$$

Зупинка алгоритму відбувається тоді, коли узагальнені нерівності (6) перетворюються в рівності.

Алгоритм покращення стратегій, заданий узагальненими нерівностями, значно спрощується при досить малих $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon \to 0$ $\lim \varepsilon u_\varepsilon^* = u_{-1}^*$. При цьому u_{-1}^* визначається першою нерівністю системи (6). Стаціонарна стратегія, $\widetilde{f}_0$, що реалізує максимум у першій нерівності (6), називається асимптотично оптимальною. Для знаходження асимптотично оптимальної стаціонарної стратегії $\widetilde{f}_0$, розглядається алгоритм, на k-му кроці якого вибирається k-те її наближення $\widetilde{f}_0^{(k)}$ з умови

$$\hat{\varphi}^{\widetilde{f}_0^{(k)}} / \hat{q}^{\widetilde{f}_0^{(k)}}\mathbf{1} \ge \varphi^{\widetilde{f}_0^{(k-1)}} / \hat{q}^{\widetilde{f}_0^{(k-1)}}\mathbf{1}. \tag{7}$$

Зупинка алгоритму відбувається за умови, коли узагальнена нерівність (7) перетворюється в рівність.

Таким чином, стратегія f^* максимізує критерій очікуваної вигоди від процесу відновлення страхової діяльності, а процес марковського відновлення описує динаміку страхової діяльності при ефективній стратегії прийняття запобіжних заходів щодо появи страхових подій.

Висновки. Проведено системний аналіз збурених дифузією ризикових процесів з марковськими надходженнями страхових подій. Наведено короткий огляд основних результатів, представлених явними формулами для перетворення Лапласа часу першого досягнення заданого рівня капіталу перед розоренням, максимальної величини розорення, часу відновлення (поширеного визначення для випадку, коли дифузія спричиняє розорення) та розподілу дивідендних виплат до розорення.

Запропоновано нову стохастичну модель слабкокерованого процесу марковського відновлення страхової діяльності, в якій реалізовано слабке керування збуреннями, пов'язаними з випадковими надходженнями страхових подій і дивідендними виплатами, що забезпечує максимальну очікувану вигоду. Побудовано дві стратегії слабкого керування за критерієм очікуваної вигоди – оптимальну і асимптотично оптимальну, останню легко реалізувати на практиці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Badescu A. Dicussion on "The Discounted Joint Distribution of the Surplus Prior to Ruin and the Deficit at Ruin in a Sparre Andersen Model" / A. Badescu // North American Actuarial Journal – 2008. – 12(2). – P. 210–212.

2. Cramer H. On some questions connected with mathematical risk / H. Cramer // Univ. California Publ. Statist., 1954. – V. 2.

3. Gerber H. U. When Does the Surplus Reach a Given Target? // H. U. Gerber // Insurance: Mathematics and Economics. – 1990. – 9. – P. 115–119.

4. Gerber H. U. On the Discounted Penalty at Ruin in a Jump-Diffusion and the Perpetual Put Option / H. U. Gerber, U.B. Landry // Insurance: Mathematics and economics. – 1998. – 22. – P. 263–276.

5. Gerber H. U. A note on the dividends-penalty identity and the optimal dividend barrier / H. U. Gerber, S. X. Lin, Y. Yang. // ASTIN Bulletin. – 2006. – 36. – P. 489–503.

6. Gerber H. U. On the Time Value of Ruin / H. U. Gerber, E.S.W. Shiu. // North American Actuarial Journal. – 1998. – 2(1). – P. 48–78.

7. Gerber H. U., E.S.W. Shiu Optimal Dividends: Analysis with Brownian Motion /H. U. Gerber, E.S.W. Shiu // North American Actuarial Journal – 2004. – 8(1). – P. 1–20.

8. Harrison M. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems [monograph] / M. Harrison – 1985. – W&S: N.Y.

9. Li S. The distribution of the dividend payments in the compound poisson risk model perturbed by diffusion / S. Li // Scandinavian Actuarial Journal – 2006. – 2: – P. 73–85.

10. Li S. The Gerber –Shiu Function in a Sparre Andersen Risk Process Perturbed by Diffusion // S. Li, J. Garrido. // Scandinavian Actuarial Journal – 2005. – 3: – P. 161–186.

11. Li S. Moments of the dividend payments and related problems in a Markov-modulated Risk Model /S. Li, Y. Lu //North American Actuarial Journal – 2007. – 11(2). – P. 65–76.

12. Picard P. On Some Measures of the Severity of Ruin in the Classical Poisson Model /P. Picard // Insurance: Mathematics and Economics. –1994 – 14: – P. 107–115.

13. Ren J. Discussion of "The Time of Recovery and the Maximum Severity of Ruin in a Sparre Andersen Model" / J. Ren. //North American Actuarial Journal 2009. – 13 – 1. – P. 155–156.

14. Ren J. The Expected Value of the Time of Ruin and the Moments of the Discounted Deficit at Ruin in the Perturbed Classical Risk Process // Insurance: Mathematics and Economics. – 2005 – 37: – P. 505–521.

15. Tsai C. C.-L. On the expectation of the present values of the time of ruin perturbed by diffusion / C. C.-L. Tsai // Insurance: Mathematics and Economics. –2003 – 32: – P. 413–429.

16. Tsai C. C.-L. A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion / C. C.-L. Tsai, G. E. Willmot // Insurance: Mathematics and Economics. –2002 – 30(1): – P. 51–66.

17. Zhou X. When does surplus reach a certain level before ruin? /X. Zhou // Insurance: Mathematics and Economics. –2004 – 35: – P. 553–561.

18. Андрєєв М.В. Деякі аспекти оптимізації страхової діяльності. /М.В. Андрєєв // Вісник АПСВ. – 2002. – Вип. 2. – С. 79–81.

19. Королюк В.С Управляемые процессы марковского восстановления с малой вероятностью обрыва / В.С. Королюк Н.В. Андреев // Кибернетика. – 1986. – № 4. – С. 112–124.

20. Энбрехтс П. Некоторые аспекты страховой математики / П. Энбрехтс К., Клюппельберг // Теор. вероятн. и ее примен. – 1993. – т. 38. – Вып. 2. – С. 374–416.