УДК 519.233.6

БЕЛОВ Володимир, к. ф.-м. н., доцент Кримського економічного інституту ім. Вадима Гетьмана (м. Сімферополь)

ЧУМАКОВ Володимир, інспектор з кадрів підприємства "СоюзБудТехнологія" (м. Сімферополь)

ВЕКТОРНА МЕТОДИКА КІЛЬКІСНОЇ ОЦІНКИ УЗГОДЖЕНОСТІ ДУМОК ЕКСПЕРТІВ

Використовуючи поняття випадкового вектора, координати якого представляють ранги, проставлені експертом, розроблена кількісна характеристика узгодження (конкордації). Особливістю методики, що пропонується, є використання тільки широковідомих понять математичної статистики.

Ключові слова: методи рангових критеріїв, кількісна оцінка, критерій узгодженості, коефіцієнт конкордації Кенделла, методика кількісної узгодженості думок експертів.

При застосуванні експертних методів досліджень в економіці набули широкого поширення рангові критерії Спірмена і Кенделла, коефіцієнт конкордації Кенделла – W [1]. Автори цих методів кількісної оцінки за критерієм узгодженості взяли звичайний коефіцієнт кореляції [2], а як кількісну оцінку узгодженості думок експертів вибрали не стандартну математичну величину, а кількісну характеристику: число інверсій окремих рангів чинників від дійсного розташування рангів, яке взагалі невідоме.

При проведенні математичної формалізації завдання про кількісну оцінку узгодженості думок експертів викликає нарікання, невраховано лінійну залежність рангів: сума рангів експертів завжди постійна, один із рангів є лінійною комбінацією останніх.

Основною математичною помилкою зазначених методів кількісної оцінки узгодженості думок експертів є неправильний вибір критерію узгодженості у вигляді коефіцієнта кореляції, що витікає з розгляду приведеного в [2].

Згідно з [2] розглянемо випадок, коли думки експертів за рангами чинників повністю протилежні, тобто думки експертів абсолютно розузгоджені. Тоді ранги, присвоєні двома експертами, виглядатимуть так, як показано в табл. 1.

Таблиця 1

Розузгодженість думок експертів

Експерти	Чинники			
	1	2	…	n
1	1	2	…	n
2	n	n–1	…	1

Відповідно до властивості 2 [2, с. 339] коефіцієнт узгодженості думок двох експертів, дорівнює $|g_B| = |-1| = 1$, тобто є думки експертів повністю узгоджені, що, звичайно, є абсурдом. Так само і з ранговим критерієм Кенделла. Згідно з [2, с. 342] $|g_B| = |-1| = 1$.

Абсолютно ясно, що негативним значенням g_B і τ_B відповідає кількісна оцінка розузгодженості думок експертів. У практичних дослідженнях зазвичай цікавить інша величина – кількісна оцінка ступеня узгодженості думок експертів, яку необхідно оцінювати в межах від 1 (стовідсоткова згода експертів) до 0 (повна незгода думок експертів). Змішання цих двох величин узгодженості і розузгодженості, що відбувається при кількості експертів $m > 2$ на практиці дуже часто приводить до невірних результатів, особливо при великій кількості чинників, коли можуть зустрітися в думці двох експертів як групи узгоджених, так і розузгоджених чинників.

При визначенні кількісної оцінки узгодженості думок великої групи експертів $m > 2$ використовують коефіцієнт конкордації W, введений Кенделом [1]. Коефіцієнт конкордації змінюється в межах $0 \le W \le 1$. Теоретичною основою для введення коефіцієнта конкордації є перевірка гіпотези про рівномірний закон розподілу середніх рангів чинників при випадковому розставленні рангів експертами. На жаль, застосування методу перевірки статистичних гіпотез навіть у разі простого хі-квадрат критерію Пірсона вимагає великого обсягу вибірки (>60), що робить математично некоректним його застосування до малих вибірок, складовою великої частини експертних досліджень. Це можна проілюструвати прикладом із [3].

Розглянемо випадок коли три експерти ранжирують два чинники. Допустимо між експертами існує повна узгодженість думок, тобто W=1. Тоді критерій Пірсона дорівнює $\chi^2 = m(n-1)\cdot W = 3$, а за таблицею критичних значень χ^2 має при $\alpha = 0.05$ і $r = n-1 = 1$, де α – це рівень значущості, r – число ступенів вільності, $\chi^2{}_{кр} = 3.8$. Оскільки 3< 3.8, то узгодженість думок експертів статистично не значуща, що явно помилково. Якщо розглядати думки експертів як висновки незалежних випробувань, то вірогідність випадкового збігу трьох думок, визначена за формулою Бернуллі, дорівнює $P_r(3) = 0.125$.

Припустимо тепер, що троє експертів ранжирують n чинників при $\alpha = 0.05$. За таблицею критичних значень критерію χ^2 розраховуємо ті найменші значення коефіцієнта конкордації $W_{кр}$, при яких можна визнати узгодженість думок експертів вагомою [2]. Результати розрахунків наведені у *табл. 2*.

Таблиця 2

Розрахунок коефіцієнта конкордації

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wкр	1.27	1.00	0.867	0.792	0.74	0.7	0.671	0.646	0.626

Коефіцієнт W дуже залежний від кількості чинників. Таким чином, головна помилка авторів розглянутих методик полягає в неправильній математичній формалізації зазначеного статистичного завдання.

Метою статті є строга математична формалізація статистичного завдання про кількісну оцінку узгодженості думок експертів.

Припустимо, що думкою експерта є випадковий вектор у n-вимірному просторі чинників, координатами кінця якого є ранги, дані експертом. Тоді думки всіх експертів, що є випадковими векторами, безперервним чином заповнюють деяку область n-вимірного простору. Особливістю цієї області є те, що вона утворена випадковими векторами, довжина яких однакова, оскільки рангами (координати кінця вектора) є доданки суми у формулі довжини вектора:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots + r_n^2}\ . \qquad (1)$$

Як відомо, від перестановки доданків сума не міняється, тому випадкові вектори мають однакову довжину. Цей факт приводить до того, що кінці всіх випадкових векторів розташовуються на певній частині поверхні гіперсфери радіусу в n-вимірному просторі чинників.

Введемо в цьому просторі метрику, визначивши відстань між двома крапками i та j n-вимірного простору.

Коефіцієнт ρ_{ij} задається такою формулою:

$$\rho_{ij} = \sqrt{\left(r_{1j} - r_{1i}\right)^2 + \left(r_{2j} - r_{2i}\right)^2 + \ldots + \left(r_{nj} - r_{ni}\right)^2}\ , \qquad (2)$$

де $r_{1i}, r_{2i}, \ldots r_{ni}$ – ранги *i*-го експерта,

$r_{1j}, r_{2j}, \ldots r_{nj}$ – ранги *j*-го експерта.

Тоді, математично коректно визначати кількісну узгодженість думок експертів за відстанню між крапками, що відображають думку експерта, аналогічно з ε – околицею крапки. У цьому випадку математична формалізація завдання проводиться таким чином: оскільки дійсний розподіл рангів чинників невідомий, то за нього приймемо положення середнього вектора $\overline{r}$ вибірки випадкових векторів, яке введемо звичайним методом математичної статистики [2].

Координати цього вектора у разі m експертів і n чинників визначаються за формулами:

$$\overline{r_1} \frac{\sum r_{1j}}{m};\ \overline{r_2} \frac{\sum r_{2j}}{m};\ \ldots\ \overline{r_n} \frac{\sum r_{nj}}{m}. \qquad (3)$$

Таким чином середній вибірковий вектор r можна записати так: $\overline{r}\left(\overline{r_1}, \overline{r_2}, \ldots, \overline{r_n}\right)$.

Знайдемо всі відстані ρ_{jc} між кінцями середнього вектора $\overline{r}$ і кінцями r_{nj} решти векторів, що представляють думки окремих експертів, за формулою:

$$\rho_{jc} = \sqrt{\left(r_{1i} - \overline{r_1}\right)^2 + \left(r_{2i} - \overline{r_2}\right)^2 + \ldots + \left(r_{ni} - \overline{r_n}\right)^2}\ . \qquad (4)$$

Тепер розглянемо відстані ρ_{je} як абсолютні погрішності Δx_i якоїсь випадкової величини *X*. Згідно з [2] знайдемо виправлену вибіркову дисперсію цієї випадкової величини *X* за формулою:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \rho_{jc}^2}{m-1}. \qquad (5)$$

Розглянемо випадок, коли всі експерти розподілили ранги однаковим чином, тобто випадок абсолютного узгодження думок експертів. Тоді, за формулами (3) і (4) усі відстані $\rho_{jc} \equiv 0$ і дисперсія $S_0^2 = 0$ у цьому граничному випадку.

У другому граничному випадку, коли всі експерти призначають ранги чинникам випадково, маємо, що середні ранги дорівнюють один одному, тобто $\overline{r_1} = \overline{r_2} = ... = \overline{r_n}$ і визначаються за формулою:

$$\overline{r_c} = \overline{r_j} = \frac{1+2+3+...+n}{n} = \frac{n+1}{2} \quad . \tag{6}$$

Розрахуємо за формулою (4) усі відстані ρ_{jc}. Для цього приймемо, що дійсне розташування рангів буде $r_n(1,,2,3,4,5,...,n)$. Згідно з формулою (4) матимемо:

$$\rho_{jc} = \sqrt{\left(1-\overline{r_c}\right)^2 + \left(2-\overline{r_c}\right)^2 + ... + \left(n-\overline{r_c}\right)^2} \ . \tag{7}$$

Оскільки сума не міняється від перестановки її доданків, то отримана величина не залежить від того, який саме випадковий вектор є істинним. Тоді, дисперсія генеральної сукупності дорівнюватиме:

$$\delta^2_{СГ} = \frac{\left(1-\overline{r_c}\right)^2 + \left(2-\overline{r_c}\right)^2 + ... + \left(n-\overline{r_c}\right)^2}{k = n-1}, \tag{8}$$

де $k = n-1$ кількість мір свободи, що враховує лінійну залежність чинників.

Унаслідок того, що $\overline{r_c}$ оцінюється за нескінченною сукупністю експертів, то величина дисперсії генеральної сукупності є інваріантною відносно положення дійсного вектора рангів і, крім того, є максимальною серед усіх можливих дисперсій S^2_C, тобто справедливе співвідношення $S^2_0 = 0 \le S^2_I \le \delta^2_{СГ}$. Покажемо, що це дійсно так. Припустимо, що максимально можлива величина різниці в думках експертів буде за умови, що їх думки повністю розузгоджені, тобто думки 1-ї половини експертів збігаються між собою, а думки 2-ї повністю протилежні їм. У цьому випадку середні ранги всіх чинників також дорівнюватимуть один одному і становитимуть:

$$\overline{r_c} = \frac{1+n}{2} = \frac{2+n-1}{2} = \frac{3+n-2}{2} = ...\frac{n+1}{2}. \tag{9}$$

Таким чином, випадок, коли перша і друга половина експертів мають протилежні думки, ідентичний випадку, коли всі експерти призначають ранги чинникам випадково. Тобто максимально можлива величина різниці думок експертів і є випадком, коли всі ранги дорівнюють один одному. Отже, дійсно дисперсія S_i^2 є монотонно зростаючою функцією, обмеженою границями $0 \le S_i^2 \le \delta_{СГ}^2$.

Отриманий результат дозволяє кількісно оцінювати ступінь узгодження думок експертів за величиною дисперсії, розрахованої за формулою (5). Абсолютно ясно, що за стандартними методиками [2], використовуючи t критерій Стьюдента, можна оцінювати статистично значуще $S_0^2 \ge 0$, або, використовуючи F критерій Фішера, оцінити рівність $S_i^2 \le \delta_{СГ}^2$.

Отже, коефіцієнт конкордації W є новою якісною статистичною характеристикою що в корні відрізняється від коефіцієнта кореляції.

Відповідно коректне математичне і статистичне визначення коефіцієнта вибіркової конкордації вимагає абсолютно інших математичних і статистичних концепцій, ніж ті, що використовувались раніше.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Kendall M. G.* The advanced theory of statistic / M. G. Kendall, A. Stuart. — New York, 1958. — Vol. 1, 2.
2. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Высшая школа, 2004. — 479 с.
3. *Белов В. Т.* Нова методика кількісної оцінки узгодженості думок експертів / В. Т. Белов, В. І. Чумаков. — Вісник КТЕУ. — 2007. — № 2. — С. 84–90.

Стаття надійшла до редакції 21.04.2011.

Белов В., Чумаков В. Векторная методика количественной оценки согласованности мнений экспертов. *Используя понятие случайного вектора, координаты которого представляют ранги, проставленные экспертом, разработана количественная характеристика согласования (конкордации). Особенностью предлагаемой методики является использование только широко известных понятий математической статистики.*

Belov V., Chumakov V. Vector methods for quantitive assessment of experts opinion concordance. *The quantitative characteristics of concordance, is developed on the basis of random vector concert the coordinates of which present the ranks, defined by the expert. The peculiarity of the methods proposed is the application of only well known concepts of mathematic statistics.*