УДК 519.863:338.3

ТАДЕЄВ Юрій, к. е. н., доц., докторант, Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ДИНАМІЧНІ ФУНКЦІЇ КОРИСНОСТІ З ІНВЕСТИЦІЯМИ У ВИРОБНИЧИЙ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ КАПІТАЛИ

Запропоновано новий вид динамічних функцій корисності. При цьому споживання виражається як різниця між випуском продукції та валовими інвестиціями, а виробнича функція враховує капітал і працю та їх похідні (чисті інвестиції).

Ключові слова: функція корисності, виробничий капітал, інтелектуальний капітал, валові інвестиції, чисті інвестиції, виробнича функція.

Тадеев Ю. Динамические функции полезности с инвестициями в производственный и интеллектуальный капиталы. *Предложен новый вид динамических функций полезности. При этом потребление понимается как разница между выпуском продукции и валовыми инвестициями, а производственная функция учитывает капитал и труд вместе с их производными (чистыми инвестициями).*

Ключевые слова: функция полезности, производственный капитал, интеллектуальный капитал, валовые инвестиции, чистые инвестиции, производственная функция.

Постановка проблеми. Теорія функцій корисності та теорія виробничих функцій є важливими елементами побудови та дослідження економіко-математичних моделей. Моделювання динамічних процесів виробництва та розподілу продукції потребує використання динамічних функцій корисності та динамічних виробничих функцій.

У будь-якій економіці неминучий вибір між забезпеченням поточного попиту (споживання) та майбутнього попиту (інвестицій). Будь-який такий вибір породжує певну динамічну функцію або траєкторію, яка визначає відповідні пропорції виробленої продукції, що витрачатиметься на споживання та інвестиції. Завданням економічної політики є вибір однієї з усіх таких функцій після отримання оцінки співвідношення між поточним і майбутнім споживанням, після чого виникає модель оптимального економічного зростання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В економічній та економіко-математичній літературі найбільш вивченими є неокласичні моделі економічного зростання, які описують економічне зростання в агрегованій замкненій економіці. Першою класичною роботою в рамках цієї теорії є модель Ф. Рамсея (F. Ramsey) [1]. Виділимо також роботи Р. Харрода (R. Harrod), Е. Домара (E. Domar), Д. Касса (D. Cass), Т. Купманса (T. Koopmans), Р. Солоу (R. Solow), Т. Свона (T. Swan), П. Ромера (P. Romer), Р. Лукаса (R. Lucas), які досить детально описано у монографіях [2–5]. Проте недостатньо вивченим залишається питання врахування інтелектуальної складової людського капіталу в моделях економічного зростання, що й визначає **мету** цієї роботи.

Постановка завдання. Традиційними ресурсами, що розглядаються на макроекономічному рівні, є капітал та праця. В сучасному світі, коли інтелектуальна праця відіграє важливу, а може, й вирішальну роль, ресурс "праця" амортизується та інвестується [6]. Саме тому разом з виробничим капіталом необхідно розглядати інтелектуальний капітал, який може вимірюватись в одиницях простої праці. Все зазначене вище потребує побудови нових динамічних функцій корисності та динамічних виробничих функцій, що враховують інвестиції (чисті та валові) у виробничий та інтелектуальний капітали.

Результати дослідження.

І. Розглянемо проблему побудови динамічної функції корисності $u(c)$, де c – об'єм споживання в момент t. Щодо функції $u(c)$ зробимо наступні припущення [7]:

- $u(c)$ має другу похідну;
- $u(c)>0$, $u'(c)>0$, $u''(c)<0$ при $c>0$;
- $\lim\limits_{c\to 0} u'(c)=\infty,\ \lim\limits_{c\to\infty} u'(c)=0$.

Вводиться ще одна характеристика функцій корисності $u(c)$ – еластичність граничної корисності:

$$\sigma(c)=-\frac{u''(c)}{u'(c)}>0 \text{ при } c>0.$$

$u(c(t))$ записано у деякий момент часу t, але вибір функції споживання $c(t)$ потрібно здійснити на всьому інтервалі часу, тому цільовий функціонал вибирають у такому вигляді [7]:

$$W=\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}u(c(t))\,dt,$$

де множник дисконтування $e^{-\delta(t-t_0)}$ свідчить про той загальноприйнятий факт, що негайне споживання важливіше, ніж споживання у майбутньому. W називають достатком, а δ – нормою дисконтування.

Інколи для простоти вважають, що $t_1 = \infty$ і функція $c(t)$ обирається на весь майбутній період. Якщо $u(c)$ має обмежену асимптоту $\lim\limits_{c\to\infty} u(c) = u^* < \infty$, то при $\delta > 0$ інтеграл достатку

$$W = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} u\big(c(t)\big)\,dt$$

буде збіжним. Справді, $u\big(c(t)\big) < u^*$ та $W < \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} u^* dt = \dfrac{u^*}{\delta}$.

Розглянемо одне з можливих узагальнень функції корисності. Нехай $c(t)$ – обсяг споживання, $K(t)$ – виробничий капітал, $L(t)$ – інтелектуальний капітал, $Z_K = \dot{K} + \mu K$ – валові інвестиції у виробничий капітал, $Z_L = \dot{L} + \nu L$ – валові інвестиції в інтелектуальний капітал, $\mu > 0$ та $\nu > 0$ – норми амортизації виробничого та інтелектуального капіталів відповідно.

Нехай

$$C = \Phi\big(K, L, \dot{K} + \mu K, \dot{L} + \nu L\big) = \Phi\big(K, L, Z_K, Z_L\big). \qquad (1)$$

Слідуючи роботі [2], зробимо такі припущення:

1) збільшення витрат будь-якого із факторів виробництва K, L має наслідком збільшення споживання, а зростання величини валових інвестицій Z_K, Z_L приводить до зменшення споживання;
2) збільшення витрат усіх факторів виробництва і валових інвестицій в однаковій пропорції має наслідком збільшення споживання в тій же пропорції.

Нехай функція Φ в (1) має похідні за всіма аргументами. Тоді припущення 1) та 2) можна записати в математичній формі:

1) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial K} > 0,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial L} > 0,\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z_K} < 0,\quad \dfrac{\partial \Phi}{\partial Z_L} < 0$;
2) функція Φ є лінійно однорідною функцією своїх аргументів:

$$\Phi\big(\lambda K, \lambda L, \lambda Z_K, \lambda Z_L\big) = \lambda \Phi\big(K, L, Z_K, Z_L\big) \text{ при } \lambda > 0.$$

Зокрема, для лінійного випадку функція споживання може бути записана у вигляді:

$$C = Y - \left(\dot{K} + \mu K\right) - \left(\dot{L} + \nu L\right), \tag{2}$$

де Y – обсяг продукції, що описується відповідною виробничою функцією

$$Y = F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right). \tag{3}$$

II. Тепер можна перейти до побудови динамічної виробничої функції (3).

Якщо вважати, що зношення виробничого капіталу пропорційне його величині, то для валових інвестицій справедливе співвідношення

$$Z_K(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t), \tag{4}$$

де μ – норма амортизації, $\dot{K}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(K(t)\right)$ – чисті інвестиції у виробничий капітал.

Під таким же кутом можна розглядати інший ресурс – працю і також класифікувати

$$Z_L(t) = \dot{L}(t) + \nu L(t) \tag{5}$$

як валові інвестиції в інтелектуальний капітал, а $\dot{L}(t) = \dfrac{d}{dt}\left(L(t)\right)$ як чисті інвестиції в освіту, в підвищення кваліфікації та в науку.

Зазначене вище дає змогу запропонувати новий вид виробничої функції такого вигляду:

$$Y = F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right) = F_1(K, L) + F_2\left(\dot{K}, \dot{L}\right), \tag{6}$$

де $F_1(K, L)$ – функція виробничих ресурсів, $F_2\left(\dot{K}, \dot{L}\right)$ – функція ендогенних факторів (чистих інвестицій). Будемо вважати, що для адитивної виробничої функції (6) виконуються усі умови, що визначають клас неокласичних виробничих функцій [7]:

- вона не залежить явно від часу t;
- $F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right)$ двічі неперервно диференційована, причому

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial \dot{K}} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial \dot{L}} > 0,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{K}^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{L}^2} < 0;$$

- для будь-якого $\lambda > 0$ справедливе співвідношення

$$F\left(\lambda K, \lambda L, \lambda \dot{K}, \lambda \dot{L}\right) = \lambda F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right).$$

З урахуванням динамічної виробничої функції (6) функція споживання (2) записується у вигляді:

$$C = F_1\left(K, L\right) + F_2\left(\dot{K}, \dot{L}\right) - \left(\dot{K} + \mu K\right) - \left(\dot{L} + \nu L\right) \tag{7}$$

або

$$C = F_1\left(K, L\right) - \mu K - \nu L + F_2\left(\dot{K}, \dot{L}\right) - \dot{K} - \dot{L}. \tag{8}$$

Очевидно, що запропонована динамічна функція споживання є лінійно-однорідною функцією усіх своїх аргументів [8].

ІІІ. Підсумовуючи, можна сформулювати задачу оптимального керування для визначення кількісних пропорцій між виробництвом, споживанням та інвестиціями, направленими на розширення виробництва як шляхом збільшення виробничого капіталу, так і за допомогою інтелектуалізації праці:

$$\begin{aligned}
&W = \int_0^{\infty} u\left(c\left(t\right)\right) e^{-\delta\left(t-t_0\right)} dt \to \max,\\
&\dot{K} = \left(1-\alpha-\beta\right) F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right) - \mu K,\ K\left(0\right) = K_0,\\
&\dot{L} = \beta F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right) - \nu\left(L - L_n\right),\ L\left(0\right) = L_0,\\
&c = \alpha F\left(K, L, \dot{K}, \dot{L}\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

де $0 \le \alpha\left(t\right) \le 1,\ 0 \le \beta\left(t\right) \le 1,\ 0 \le \alpha\left(t\right) + \beta\left(t\right) \le 1,\ L_n = const > 0.$

Задача керування полягає в оптимальному виборі частин випуску продукції, які використовуються на споживання $\left(\alpha Y\right)$, на розширення інтелектуального капіталу $\left(\beta Y\right)$ та на розширення виробничого капіталу $\left(\left(1-\alpha-\beta\right)Y\right)$. Мова йде про оптимальний вибір керувань $\alpha\left(t\right)$ та $\beta\left(t\right)$. До розв'язування цієї задачі оптимального керування може застосовуватися принцип максимуму Понтрягіна [9].

Варіант цієї моделі за умови, що $F\left(K,L,\dot{K},\dot{L}\right)=F_1\left(K,L\right)$, досліджено в роботі [10].

Висновки. Таким чином, запропоновано, *по-перше*, новий вид динамічної макроекономічної функції корисності, що враховує інвестиції у виробничий та інтелектуальний капітали; *по-друге*, нова динамічна макроекономічна виробнича функція, яка враховує, окрім виробничих ресурсів (капітал та праця), також чисті інвестиції на розширення цих ресурсів; *по-третє*, нелінійна модель оптимального керування для вибору частин випуску продукції на споживання, а також на розширення виробничого та інтелектуального капіталів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Ramsey F. A.* Mathematical Theory of Saving / F. Ramsey // Economic Journal. — 1928. — No 38. — P. 543—559.
2. *Барро Дж.* Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин : [пер. с англ.]. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.
3. *Лукас Р. Э.* Лекции по экономическому росту / Р. Э. Лукас : [пер. с англ.]. — М. : Изд-во Института Гайдара, 2013. — 288 с.
4. *Acemoglu D.* Introduction to Modern Economic Growth / D. Acemoglu. — Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2009. — 990 p.
5. *Tokarski T.* Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujkcie neoklasyczne) / T. Tokarski. — Krakow : Wydawnictwo UJ, 2009. — 381 s.
6. *Лаврова Л. А.* Экономический рост и человеческий капитал : [монография] / Л. А. Лаврова; науч. ред. Р. Г. Смелик. — Омского : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2009. — 196 с.
7. *Пономаренко О. І.* Сучасний економічний аналіз. — У 2 ч. — Ч. 2. Макроекономіка : навч. посіб. / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К. : Вища шк., 2004. — 207 с.
8. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор : [пер. с англ.]. — М. : Айрис-пресс, 2002. — 576 с.
9. *Григорків В. С.* Оптимальне керування в економіці : навч. посіб. / В. С. Григорків. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. — 200 с.
10. *Тадеєв Ю. П.* Динамічні макроекономічні виробничі функції та їх двоїстий аналіз / Ю. П. Тадеєв // Сталий розвиток економіки. — 2012. — № 3. — С. 117—124.

Стаття надійшла до редакції 14.09.2012.

Tadeyev J. Dynamic utility functions with consideration to investment in productive and intellectual capital.

Background. *This article is devoted to further development of the theory of dynamic utility functions and dynamic production functions in relation to models of optimal economic growth.*

Results. *In addition to traditional resources (capital and labor) to be considered at the macroeconomic level, is considered the intellectual capital that in a broad sense is an*

endogenous effect on technology (physical capital) and the quality of labor (human capital). In a narrow sense, intellectual capital is the intellectual part of the human capital and is measured in units of simple labor.

Conclusions. *The paper presents, firstly, a new kind of dynamic utility functions, which is one of the possible generalizations of utility functions that takes into account investments in productive and intellectual capital (the consumption is considered as the difference between output and gross investment and production function takes into account capital and labor and their derivatives (net investment)), and secondly, a new dynamic macroeconomic production function which additively include among inputs (capital and labor), and net investment in the expansion of these resources, and thirdly, the nonlinear model of optimal control to determine the quantitative proportions between production, consumption and investments aimed at expanding production both by increasing productive capital, and by means of intellectualization of labor.*

Key words: utility function, productive capital, intellectual capital, gross investments, net investments, production function.

REFERENCES

1. *Ramsey F. A.* Mathematical Theory of Saving / F. Ramsey // Economic Journal. — 1928. — No 38. — P. 543—559.
2. *Barro Dzh.* Jekonomicheskij rost / R. Dzh. Barro, H. Sala-i-Martin : [per. s angl.]. — M. : BINOM. Laboratorija znanij, 2010. — 824 s.
3. *Lukas R. Je.* Lekcii po jekonomicheskomu rostu / R. Je. Lukas : [per. s angl.]. — M. : Izd-vo Instituta Gajdara, 2013. — 288 s.
4. *Acemoglu D.* Introduction to Modern Economic Growth / D. Acemoglu. — Princeton and Oxford : Princeton University Press, 2009. — 990 p.
5. *Tokarski T.* Matematyczne modele wzrostu gospodarczego (ujкcie neoklasyczne) / T. Tokarski. — Krakow : Wydawnictwo UJ, 2009. — 381 s.
6. *Lavrova L. A.* Jekonomicheskij rost i chelovecheskij kapital : [monografija] / L. A. Lavrova; nauch. red. R. G. Smelik. — Omskogo : Izd-vo Om. gos. un-ta, 2009. — 196 s.
7. *Ponomarenko O. I.* Suchasnyj ekonomichnyj analiz. — U 2 ch. — Ch. 2. Makroekonomika : navch. posib. / O. I. Ponomarenko, M. O. Perestjuk, V. M. Burym. — K. : Vyshha shkola, 2004. — 207 s.
8. *Intriligator M.* Matematicheskie metody optimizacii i jekonomicheskaja teorija / M. Intriligator : [per. s angl.]. — M. : Ajris-press, 2002. — 576 s.
9. *Grygorkiv V. S.* Optymal'ne keruvannja v ekonomici : navch. posib. / V. S. Grygorkiv. — Chernivci: Chernivec'kyj nac. un-t, 2011. — 200 s.
10. *Tadejev Ju. P.* Dynamichni makroekonomichni vyrobnychi funkcii' ta i'h dvoi'styj analiz / Ju. P. Tadejev // Stalyj rozvytok ekonomiky. — 2012. — № 3. — S. 117—124.