УДК 510.5

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА АЛГОРИТМІВ ПОСЛІДОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, ЩО МІНІМІЗУЄ ПОШУКИ В ДЕРЕВІ ВАРІАНТІВ

В.М. ЯХНО, Г.В. МЕЛЬНИК

Київський національний університет технологій та дизайну

Повідомлення1

Теоретичне обґрунтування алгоритму

Запропоновано обгрунтування алгоритмів розв'язку задачі дискретного програмування, що базується на обчислювальній схемі гілок та границь, що є алгоритмами сортування дерева варіантів, що поєднані з алгоритмами елімінації недопустимих та неоптимальних варіантів, а також алгоритмах розділення дискретних множин, які визначені в евклідовому просторі. Показано, що можливою є обчислювальна схема, яка не потребує пошуку в дереві варіантів та обчислення границь

Об'єкти та методи дослідження

Алгоритми аналізу задач дискретного програмування, що базуються на ідеології гілок і границь та динамічного програмування (на цих обчислювальних схемах базуються майже всі відомі алгоритми винятком алгоритмів відтинання Гоморі) є алгоритмами перебору варіантів. Пошук найбільш перспективних варіантів разом з обчисленням границь є одним з найважливіших факторів, що визначають ефективність алгоритму. Тому представляється доцільним формулювання задачі визначення оптимального розв'язку таким чином, щоб зменшити витрати обчислень для розрахунків значень оцінок цільової функції та позбутись трудомісткої громіздкої операції сортування висячих вершин дерев розв'язків.

Постановка завдання

Розглядається задача максимізації функції $f_0(x)$ дискретного аргументу $x, x \in E_n, x^t = \{x_1,...,x_j,...,x_n\}$, або визначення значень *X*, а саме:

$$x^* = \arg\max_{x \in G} f_0(x), \tag{1}$$

на скінченій множині *G*, яка задається таким чином:

$$G = Q \cap G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_i \cap ... \cap G_m, \tag{2}$$

$$Q = [x / x_j \in Q_j,\ Q_j = \{h_{j1}, h_{j2}, ..., h_{jN}\}],\ G_i = [x / f_i^н \le f_i(x) \le f_i^в]. \tag{3}$$

На функції $f_i(x)$, $i=0, ..., m$, накладається наступне додаткове обмеження: *j*-ті компоненти будь-яких векторів, а саме

$$x^{1i}, x^{2i},\quad x^{1i} = \arg\min_{x \in Q} f_i(x),\ x^{2i} = \arg\max_{x \in Q} f_i(x),\ i = 0, ..., m,$$

які приймають одне й те саме значення при будь-яких значеннях інших компонент, $x^{1i}, x^{2i} \in Q$. Такій умові задовольняють, наприклад, монотонні та сепарабельні функції. Для легкої промисловості в такому вигляді, наприклад, формулюються будь які задачі розкрою. В цьму випадку x_j інтенсивність використання j-того способу розкрою або ціле число, що визначає кількість рокладок які потрібно розкроїти цим способом. Обмеження (3) гарантують, що кількість деталей буде відповідати необхідній комплектації.

Визначимо множину $G^{к}$ таким чином:

$$G^k = G_0^k \cap G,$$

$$G_0^k = \left[x / f_0^{нk} \leq f_0(x) \leq f_0^{вk},\ x \in Q^k \right]. \qquad (4)$$

де Q^k – деяка підмножина множини Q.

На *к*- тій ітерації алгоритму визначається деякий елемент $\bar{x}^k$, $\bar{x}^k \in G^k$, для якого значення функції цілі не може бути покращено за допомогою покоординатного спуску. Назвемо формально задачею ***к*** задачу, яка полягає у відшуканні елементу $\bar{x}^k$, який задовольняє таким умовам: $x^k \in G^k$; $\bar{\exists}$ x^{*k}, $x^{*k} \in G_k$, такого, що усі компоненти x^{*k}_j, крім одного, дорівнюють відповідним компонентам вектора

x^k, та $f_0(x^{*k}) > f_0(x^k)$.

Результати та їх обговорення

Запропонований метод розв'язання задачі (1)-(3) зводиться до послідовного формування та розв'язання задач *k, k = 1, ..., r.* Алгоритм розв'язування цієї допоміжної послідовності задач побудований таким чином, що розв'язок задачі *k-1* виконується з метою зменшення області G^k.

Ділянка G^k зменшується такими двома способами: зменшується інтервал зміни функції $f_0(x)$; в множині Q^k відокремлюють та відкидають підмножини, які мають в собі неприпустимі плани задачі (не задовольняють умові 1), а також плани, які не задовільняють умові 2.

Зрізання області G^k виконується таким чином, що розв'язання задачі (1)-(3), якщо воно існує, належить G^k, $k = 1, \ldots, r-1$.

Позначимо: V^{1k} – множина планів x, $x \in Q$, які у ході розв'язку *k*-тої задачі були відокремлені як неприпустимі,

$$V^{1k} \in \{ x / x \in Q \setminus G^k \}, \quad \bar{V}^{1k} = V^{1,1} \cup \ldots \cup V^{1,2} \cup \ldots \cup V^{1,k},$$

$V^{1,2}$- множина планів, які у ході розв'язку задачі k були відокремлені як не її розв'язок, тобто з $x \in V^{2,k}$, слідує $\exists\ x', x' \in G^k$, $f_0(x') > f(x)$,

$$\bar{V}^{2k} = V^{2,1} \cup \ldots \cup V^{2,2} \cup \ldots \cup V^{2,k},$$

На основі введених позначень маємо можливість описати процес формування задач k таким чином :

$f_0^{н1} = f_0^{н}$, $f_0^{н}$ – деяка оцінка мінімального значення функції цілі $f_0(x)$ на множині G,

$$f_0^{н} \le \min f_0(x); \qquad x \in G$$

$f_0^{B1} = f_0^{B}$, f_0^{B} – деяка оцінка максимального значення функції цілі $f_0(x)$ на множині G,

$$f_0^{B} \ge \max f_0(x); \qquad x \in G$$

$$f_0^{нk} = f_0(\bar{x}^{k-1}),\ f_0^{Bk} = f_0^{B1},\ k = 2, \ldots, r,$$

$$Q^1 = Q,\ Q^k = \{x \,/\, x \in Q,\ x \notin \bar{V}^{1,k-1},\ x \notin V^{2,k-1}\},$$

$$r = \min k / G^k = \varnothing. \tag{5}$$

Для зручності посилання назвемо лемами наступні твердження, а саме:

Лема 1. Існує таке число k, $k < |Q|$, що $G_k = \varnothing$ (тут $|Q|$- число елементів множини Q).

Лема 2. Якщо при $k = 1$, не існує елементу $\tilde{x}^{k}$, який задовольняє умовам 1-2, тоді розв'язку задачі (1)-(3) також не існує.

Теорема 3. (Ознака оптимальності) У послідовності розв'я зання допоміжних задач k $\bar{x}^{1}$,..., $\tilde{x}^{k}$,..., $\bar{x}^{\tau-1}$, що виробляються алгоритмом, елемент $x^{\tau-1}$ є розв'язком задачі (1)-(3).

Доведення теореми проведемо від протилежного. Припустимо, що існує вектор x', $x' \in G$, який є оптимальним планом (1)-(3) та $f(x') > f(x^{\tau-1})$. З способу визначення $f_0^{в}$ та $f_0^{н\tau}$ і останньої нерівності слідує, що $x' \in G \cap G_{op}$, де $G_{op} = [x \mid f_0^{н\tau} \le f_i(x) \le f_0^{в},\ x \in Q] = G_0^{\tau} \cup \bar{V}^{1,\tau-1} \cup \bar{V}^{2,\tau-1}$.

По визначенню $G^{\tau} = \varnothing$, отже $x' \in \bar{V}^{1,\tau-1} \cup \bar{V}^{2,\tau-1}$. До цього множина $\bar{V}^{1,\tau-1}$ була визначена як множина, що містить тільки ті елементи, що не входять у множину G, отже $x' \in \bar{V}^{2,\tau-1}$ Але тоді у відповідності з означенням множини $\bar{V}^{2,\tau-1}$ існує елемент x'', $x'' \in G$, такий що $f_0(x'') > f_0(x')$.

Ми прийшли до суперечності, а отже теорему доведено.

Сформульовані твердження – леми 1, 2, теорема 3 встановлюють еквівалентність задачі (1)-(3) і послідовність задач k.

Висновки

Для суттєво дискретних задач алгоритми гілок і границь залишаються найбільш уживаними. Ввважається що ці алгоритми базуються на процедурах упорядкування вершин дерева варіантів, що вісять. Сформульовані твердження можуть бути викоростані як основа для побудови алгоритмів, що не потребують сортування дерева вариантів та обчислення границь.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. Х. Сигал, А. П. Иванова Введение в прикладное дискретное программирование. изд-во ГРИФ МО г РФ 2007. – 387 с.
2. Ю.А. Зак, Яхно В.М. Известия академии наук СССР «Техническая кібернетика» – М.: 1980. – N1, – с. 10–17, Последовательные алгоритмы оптимизации в задачах дискретного стохастического программирования
3. Яхно В.М. Управляющие системы и машины (УсиМ), 3, 1999. – К.: – с. 20–26 Алгоритм ветвей и границ для задачи геометрического размещения.

Надійшла 26.11.2009