УДК 69.04(075.8)

КРУТИЙ Ю.С., СУРЬЯНИНОВ Н.Г.
Одесская государственная академия строительства и архитектуры

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Цель. *Развитие метода прямого интегрирования для задач механики деформируемого твердого тела, которые описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.*

Методика. *Применение метода прямого интегрирования для построения аналитических решений дифференциальных уравнений устойчивости упругого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью.*

Результаты. *Наличие такого решения может послужить основой для разработки нового метода исследований по проблеме устойчивости.*

Научная новизна. *В общем случае непрерывной переменной поперечной жесткости приходим к аналитическому представлению для продольной силы, содержащему безразмерный параметр* K*, названный нами коэффициентом устойчивости, вследствие чего задача отыскания критической силы для стержня с непрерывной жесткостью сводится к отысканию указанного коэффициента устойчивости.*

Практическая значимость. *Проинтегрировано дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью, сжатого постоянной осевой продольной силой. В аналитическом виде выписаны формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня. Эти формулы выражены через начальные параметры и пригодны для исследования устойчивости стержня при любых возможных граничных условиях.*

Решение данной проблемы открывает перспективу создания нового метода исследования стержней на устойчивость равновесия. Для этого достаточно указать эффективный метод численной реализации найденных здесь точных решений.

Ключевые слова: *устойчивость, сжатый стержень, переменная жесткость, метод прямого интегрирования, коэффициент устойчивости, критическая сила.*

Введение. Трудно переоценить роль дифференциальных уравнений в задачах строительной механики вообще и в теории устойчивости стержней в частности. Всякий раз, когда исходная задача сводится к дифференциальному уравнению, естественно попытаться найти его точное решение. Поэтому естественным и важным методом решения задач строительной механики является метод прямого интегрирования дифференциальных уравнений. Подтверждение такому тезису можно отыскать во многих изданиях. Например, в монографии академика А.Н. Динника [1] указывается, что одним из важнейших способов определения критической силы является прямое интегрирование дифференциальных уравнений равновесия. Там же отмечается, что такой метод наиболее удобный, если требуется большая точность.

Однако отсутствие в подавляющем большинстве случаев точных (аналитических) решений для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами отодвинуло на задний план метод прямого интегрирования. Во многих монографиях по строительной механике и смежным вопросам, перед изложением сути приближенных методов, их необходимость часто обосновывается рассуждениями о невозможности построения точных решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Ярким примером сказанному является дифференциальное уравнение продольного изгиба, когда поперечная жесткость стержня изменяется непрерывно. Случаи построения точного решения такого уравнения составляют редкое исключение. Как отмечается в [2-4], в общем случае, при произвольном непрерывном законе изменения жесткости, данное уравнение не удается проинтегрировать. В более современном издании [5] также констатируется, что интегрирование такого уравнения, когда жесткость не является константой, представляет собой достаточно сложную математическую задачу.

В работе [6] на примере дифференциального уравнения поперечных колебаний стержня предложен метод интегрирования, пригодный для дифференциальных уравнений с непрерывными переменными коэффициентами. На наш взгляд наличие такого метода открывает новые перспективы в решении самых разных классов задач строительной механики. Цель данной работы – с помощью указанного метода интегрирования построить аналитические решения для дифференциальных уравнений устойчивости упругого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью. Наличие такого решения может послужить основой для разработки нового метода исследований по проблеме устойчивости.

Постановка задачи. Объектом исследования является упругий, вообще говоря, неоднородный прямой стержень переменного поперечного сечения длины l, сжатый осевой постоянной продольной силой N и не подверженный внешним изгибающим воздействиям. Будем рассматривать задачу устойчивости равновесия такого стержня (плоский случай). Совместим ось x с линией центров тяжести поперечных сечений стержня, а ось y расположим по направлению наименьшей жесткости поперечного сечения и будем считать, что концы стержня находятся в точках $x = 0$ и $x = l$ (рис. 1). Традиционно для таких задач продольную силу N будем считать положительной, если она является сжимающей.

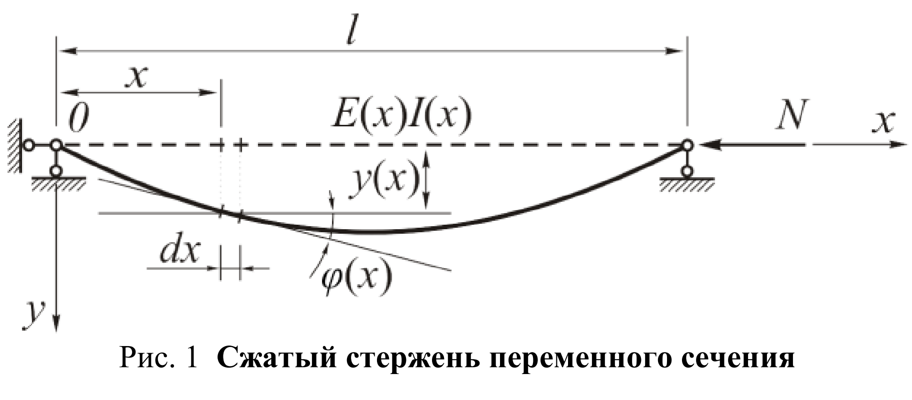

Рис. 1 **Сжатый стержень переменного сечения**

При утрате устойчивости стержень деформируется. Согласно концепции Эйлера для исследования устойчивости необходимо рассмотреть его равновесие в новом деформированном состоянии. Ключевую роль здесь играет дифференциальное уравнение равновесия, выражающее условие равенства момента внутренних сил внешнему моменту в каждом сечении стержня [7].

Считая прогибы малыми по сравнению с длиной стержня, и пренебрегая продольными деформациями, указанное дифференциальное уравнение равновесия стержня в искривленном состоянии (уравнение продольного изгиба) запишем в виде [8]

$$(E(x)I(x)y''(x))'' + Ny''(x) = 0\,, \tag{1}$$

где $E(x)I(x)$ – переменная поперечная жесткость стержня в точке x;

$E(x)$ – модуль упругости материала стержня;

$I(x)$ – момент инерции поперечного сечения стержня;

$y(x)$ – неизвестная функция, представляющая собой поперечное перемещение (прогиб) сечения стержня в точке x.

В ситуации, когда момент инерции стержня меняется вдоль его длины, закон изменения принято представлять в виде $I(x) = I_0\psi(x)$, где I_0 – некоторый постоянный момент инерции, а $\psi(x)$ – безразмерная функция [9]. Запишем аналогичное представление и для модуля упругости, который в общем случае также считаем переменным. Пусть $E(x) = E_0\phi(x)$, где E_0 – постоянный модуль упругости, а $\phi(x)$ – безразмерная функция. Тогда переменная поперечная жесткость стержня запишется так

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 A(x), \tag{2}$$

где $E_0 I_0$ – некоторая постоянная жесткость (жесткость в какой-либо характерной точке стержня);

$A(x) = \psi(x)\phi(x)$ – безразмерная функция.

Функция $A(x)$, по сути, определяет закон изменения поперечной жесткости вдоль длины стержня и по своему смыслу является положительной. Вполне очевидно, что представление (2) никак не ограничивает общности рассматриваемой задачи и принято исключительно ради удобства. Ведь любую размерную величину всегда можно представить в виде произведения двух множителей. В таком случае размерность придется приписать только одному из этих множителей, а второй будет безразмерным.

Уравнение (1) с учетом представления (2) перепишем в виде

$$(A(x)y''(x))'' + Py''(x) = 0, \tag{3}$$

где $P = \dfrac{N}{E_0 I_0}$.

В случае, когда концы стержня шарнирно оперты (рис. 1), для решения задачи устойчивости часто вместо уравнения (3) используют дифференциальное уравнение равновесия стержня в искривленном состоянии второго порядка [10]

$$A(x)y''(x) + Py(x) = 0. \tag{4}$$

Очевидно, уравнение (3) получается из уравнения (4) двукратным дифференцированием.

Для произвольной непрерывной переменной поперечной жесткости стержня *ставятся задачи:* построить точные решение дифференциальных уравнений равновесия стержня (3), (4); получить в аналитическом виде формулы для параметров состояния стержня; получить аналитическое представление для продольной силы.

Результаты исследования. Свойства интегрального выражения специального вида. В дальнейшем при построении точного решения дифференциального уравнения равновесия (4) столкнемся с интегральными выражениями специального вида. Общим случаем будет интегральное выражение

$$I_p(x) = \frac{1}{l^p}\int_0^x A_p(x)\int_0^x A_{p-1}(x)...\int_0^x A_2(x)\int_0^x A_1(x)dxdx...dxdx\,. \quad (5)$$

Здесь $x \in [0,l]$, количество интегралов равно p, а функции $A_k(x)$ являются безразмерными, и принимают положительные значения $(k = 1,2,...,p)$ $(p = 1,2,3,...)$. Чтобы в будущем избежать повторений и однотипных суждений, перечислим здесь необходимые свойства интеграла (5).

Лемма. Интеграл $I_p(x)$ представляет собой безразмерную функцию, для которой при любом $x \in [0,l]$ справедливо неравенство $I_p(x) \geq 0$ $(p = 1,2,3,...)$, причем равенство нулю достигается, только в точке $x = 0$. В частности, $I_p(l) > 0$ $(p = 1,2,3,...)$.

Доказательство. Введем безразмерную координату $\xi = \frac{x}{l}$ и обозначим $B_k(\xi) = A_k(l\xi)$. Далее в формуле (5) осуществим замену переменных $x = l\xi$, последовательно во всех интегралах, начиная с самого внешнего и заканчивая самым внутренним. Учитывая на каждом шаге, что $dx = ld\xi$, будем иметь

$$I_p(x) = I_p(l\xi) = \int_0^\xi B_p(\xi)\int_0^\xi B_{p-1}(\xi)...\int_0^\xi B_2(\xi)\int_0^\xi B_1(\xi)d\xi d\xi...d\xi d\xi\,.$$

Получили интегральное выражение, в котором каждый интеграл, начиная с самого внутреннего и заканчивая самым внешним, есть интеграл от безразмерной функции по безразмерной переменной с безразмерным верхним пределом. Следовательно, интегральное выражение $I_p(x)$ представляет собой безразмерную функцию. Что касается свойств $I_p(x)$, выраженных неравенствами, то они вытекают из положительности функций $A_k(x)$ и известных свойств определенных интегралов.

Следствие. Следующий интеграл

$$\tilde{I}_{p-1}(x) = l\frac{I'_p(x)}{A_p(x)}(p \geq 2)\,, \quad (6)$$

будучи частным случаем представления (5), обладает теми же свойствами, что и интеграл $I_p(x)$.

Точные решения дифференциальных уравнений равновесия второго и четвертого порядка. Вначале построим точное решение дифференциального уравнения (4). Ход решения при этом изложим как можно полнее, чтобы наглядно продемонстрировать суть метода интегрирования.

Вместе с уравнением (4) будем рассматривать равносильную ему систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx} = R(x)Y, \quad (7)$$

где $Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$, $R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{P}{A(x)} & 0 \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных и матрица коэффициентов системы соответственно.

Пусть $\zeta_0(x), \zeta_i(x)\ (i=1,2,3,...)$ – некоторая бесконечная система пока неизвестных, дважды непрерывно дифференцируемых функций. Образуем посредством этих функций ряды по степеням неизвестного параметра P:

$$U(x)=\zeta_0(x)-P\zeta_1(x)+P^2\zeta_2(x)-P^3\zeta_3(x)+\cdots; \tag{8}$$

$$U'(x)=\zeta_0'(x)-P\zeta_1'(x)+P^2\zeta_2'(x)-P^3\zeta_3'(x)+\cdots; \tag{9}$$

$$U''(x)=\zeta_0''(x)-P\zeta_1''(x)+P^2\zeta_2''(x)-P^3\zeta_3''(x)+\cdots . \tag{10}$$

Относительно этих рядов пока предполагаем, что все они равномерно сходятся на отрезке $x\in[0,l]$. В таком случае будет возможна операция почленного дифференцирования и, как следствие, обозначения $U'(x), U''(x)$ для сумм рядов (9), (10) будут законными.

Неизвестные функции $\zeta_0(x), \zeta_i(x)\ (i=1,2,3,...)$ будем искать из условия, что $U(x)$ удовлетворяет уравнению (4), то есть

$$A(x)U''(x)+PU(x)=0. \tag{11}$$

Подставим в условие (11) вместо $U(x), U''(x)$ их представления (8), (10) и запишем результат в виде ряда по степеням P. В итоге придем к равенству

$$A(x)\zeta_0''(x)+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i P^i\left(A(x)\zeta_i''(x)-\zeta_{i-1}(x)\right)=0 .$$

Для его удовлетворения приравняем к нулю все коэффициенты при степенях параметра P, начиная с нулевой степени:

$$\zeta_0''(x)=0; \tag{12}$$

$$A(x)\zeta_i''(x)=\zeta_{i-1}(x)\ \ (i=1,2,3,...). \tag{13}$$

Следовательно, для определения функций $\zeta_0(x), \zeta_i(x)\ (i=1,2,3,...)$ имеем дифференциальные уравнения.

Функция $\zeta_0(x)$ легко находится из уравнения (12). Прежде чем выразить $\zeta_i(x)$, зададим граничные условия

$$\zeta_i(0)=\zeta_i'(0)=0\ (i=1,2,3,...) . \tag{14}$$

После этого из уравнения (13), интегрируя дважды, получим

$$\zeta_i(x)=\int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)}\zeta_{i-1}(x)dxdx\ \ (i=1,2,3,...). \tag{15}$$

Последняя формула является рекуррентной. Она позволяет по известной *начальной функции* $\zeta_0(x)$ последовательно определить функции $\zeta_i(x)\ (i=1,2,3,...)$, которые в дальнейшем будем называть *образующими*. Смысл такого названия заключается в том, что с помощью этих функций образуется исходный ряд (8).

Тем самым, каждой начальной функции $\zeta_0(x)$, удовлетворяющей уравнению (12), по формуле (15) будет соответствовать своя бесконечная система образующих функций $\zeta_i(x)$. Для таких функций равенство (11) будет удовлетворяться тождественно.

Помимо рекуррентной формулы (15), образующие функции можно представить в развернутом виде

$$\zeta_i(x)=\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}...\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}\zeta_0(x)dxdxdxdx...dxdx. \tag{16}$$

Правая часть последней формулы содержит всего $2i$ интегралов.

Покажем теперь, что ряд (8) действительно равномерно сходится, для чего построим соответствующий мажорантный ряд. С этой целью определим две неотрицательные постоянные $g = \max_{x\in[0,l]} \dfrac{1}{A(x)}$ и $h = \max_{x\in[0,l]} \left|\zeta_0(x)\right|$. Тогда на основании представления (16), для функций $\zeta_i(x)\ (i = 1,2,3,...)$ будем иметь оценки

$$\left|\zeta_i(x)\right| \le hg^i \left|\int_0^x\int_0^x...\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x dxdxdxdx...dxdx\right| = hg^i\,\frac{x^{2i}}{(2i)!}\ .$$

Следовательно, для ряда, составленного из модулей, получим

$$\left|\zeta_0(x)\right| + \left|P\zeta_1(x)\right| + \left|P^2\zeta_2(x)\right| + \left|P^3\zeta_3(x)\right| + \cdots \le h\left(1 + Pg\,\frac{x^2}{2!} + P^2g^2\,\frac{x^4}{4!} + P^3g^3\,\frac{x^6}{6!} + \cdots\right) = h\ ch\sqrt{Pg}\,x\ .$$

Мажорантой здесь с точностью до множителя выступает элементарная функция $ch\sqrt{Pg}\,x$, определяемая рядом, который равномерно сходится при любом конечном x. Поэтому ряд из модулей сходится, причем сходится равномерно. Тем самым доказано, что ряд (8) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[0,l]$.

Совершенно аналогично можно доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (9). Что же касается ряда (10), то его сходимость вытекает непосредственно из тождества (11), согласно которому он отличается от ряда (8) только множителем. Следовательно, ряды (8), (9) можно почленно дифференцировать, то есть принятые обозначения $U'(x)$ и $U''(x)$ для рядов (9) и (10) законны.

Таким образом, фактически доказана следующая теорема.

Теорема. Всякое нетривиальное решение $\zeta_0(x)$ уравнения (12) порождает по формуле (15) такую бесконечную систему образующих функций $\zeta_i(x)\ (i = 1,2,3,...)$, что функция $U(x)$, определяемая абсолютно и равномерно сходящимся рядом (8), является решением дифференциального уравнения равновесия второго порядка (4).

Исходя из того, что $U(x)$ является решением уравнения (4), непосредственной проверкой легко убедиться в том, что вектор

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} U(x) \\ U'(x) \end{pmatrix} \qquad (17)$$

в свою очередь удовлетворяет системе (7).

Найдем значение $\Psi(x)$ в точке $x = 0$. Полагая в формулах (8), (9) переменную x равной нулю и учитывая (14), получим

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} \zeta_0(0) \\ \zeta_0'(0) \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Следовательно, вектор $\Psi(0)$ определяется начальной функцией и не зависит от образующих функций.

Обратимся теперь к уравнению (12). Очевидно, функции $a_{1,0}(x) = 1,\ a_{2,0}(x) = x$ образуют фундаментальную систему решений этого уравнения. Каждая из этих функций может быть принята в качестве начальной $\zeta_0(x)$ и значит каждая из них, согласно теореме, порождает соответствующее решение уравнения (4).

Обозначим через $a_{n,i}(x)\ (n=1,2)\ (i=1,2,3,...)$ образующие функции, порожденные начальной функцией $a_{n,0}(x)\ (n=1,2)$, а через $U_n(x)\ (n=1,2)-$ решения уравнения (4). Тогда на основании (8), (15), будем иметь:

$$U_n(x) = a_{n,0}(x) - Pa_{n,1}(x) + P^2 a_{n,2}(x) - P^3 a_{n,3}(x) + \cdots\ (n=1,2)\,; \tag{19}$$

$$a_{n,0}(x) = x^{n-1},\ a_{n,i}(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} a_{n,i-1}(x)\ dxdx\ (i=1,2,3,...)\,. \tag{20}$$

В соответствии с (16), образующие функции также можно записать в развернутом виде

$$a_{n,i}(x) = \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} ... \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x\int_0^x \frac{1}{A(x)} a_{n,0}(x) dxdxdxdx...dxdx\,. \tag{21}$$

Каждое из найденных решений $U_n(x)\ (n=1,2)$ уравнения (4) порождает по формуле (17) свой вектор

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} U_n(x) \\ U_n'(x) \end{pmatrix}$$

– решение системы (7). Составим из этих векторов матрицу

$$\Lambda(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, она также будет удовлетворять системе (7).

Найдем теперь значение $\Lambda(x)$ в точке $x=0$. Столбцы матрицы $\Lambda(0)$ вычислим по формуле (18), поочередно полагая там $\zeta_0(x) = a_{1,0}(x) = 1$ и $\zeta_0(x) = a_{2,0}(x) = x$. В результате будем иметь

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} U_1(0) & U_2(0) \\ U_1'(0) & U_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Следовательно, матрица $\Lambda(x)$ является нормированным решением системы (7). Как известно [11], такое решение системы дифференциальных уравнений определяется однозначно и называется матрицантом. Определитель матрицанта легко найти по формуле Якоби [11]

$$|\Lambda(x)| = |\Lambda(0)| \exp\left(\int_0^x Sp\ R(x)dx\right) = 1,$$

где $Sp\,R(x)-$ след матрицы $R(x)$, который в нашем случае равен нулю. Отсюда получаем важное тождество

$$U_1(x)U_2'(x) - U_1'(x)U_2(x) = 1\,. \tag{23}$$

Левая часть найденного тождества представляет собою вронскиан [12]

$$W(x) = |\Lambda(x)| = \begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) \\ U_1'(x) & U_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Известно [12], что из неравенства нулю вронскиана вытекает линейная независимость соответствующей системы функций. Поскольку $W(x)=1$, то функции $U_1(x), U_2(x)$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (4).

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения равновесия второго порядка (4) имеет вид:

$$y(x) = D_1U_1(x) + D_2U_2(x), \tag{24}$$

где D_1, D_2 – постоянные интегрирования.

Обратимся теперь к дифференциальному уравнению (3). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что найденные решения $U_1(x), U_2(x)$ уравнения (4) удовлетворяют также уравнению (3). Очевидными решениями уравнения (3) также будут x и 1. В итоге имеем систему четырех решений. Для вронскиана такой системы будем иметь

$$\begin{vmatrix} U_1(x) & U_2(x) & x & 1 \\ U_1'(x) & U_2'(x) & 1 & 0 \\ U_1''(x) & U_2''(x) & 0 & 0 \\ U_1'''(x) & U_2'''(x) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\left(\frac{P}{A(x)}\right)^2 \left(U_1(x)U_2'(x) - U_1'(x)U_2(x)\right) = -\left(\frac{P}{A(x)}\right)^2 \neq 0.$$

Тем самым доказано, что функции $U_1(x), U_2(x), x, 1$ линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений уравнения (3).

Окончательно для дифференциального уравнения равновесия четвертого порядка (3) имеем общее решение

$$y(x) = C_1U_1(x) + C_2U_2(x) + C_3x + C_4, \tag{25}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования.

Параметры состояния стержня, выраженные через начальные параметры. Такие искомые параметры задачи устойчивости, как перемещение $y(x)$, угол поворота $\varphi(x)$, изгибающий момент $M(x)$ и поперечную силу $Q(x)$, характеризующие напряженно-деформируемое состояние стержня, коротко будем называть *параметрами состояния*. Под поперечной силой здесь понимаем силу, перпендикулярную недеформированной оси стержня (рис. 2).

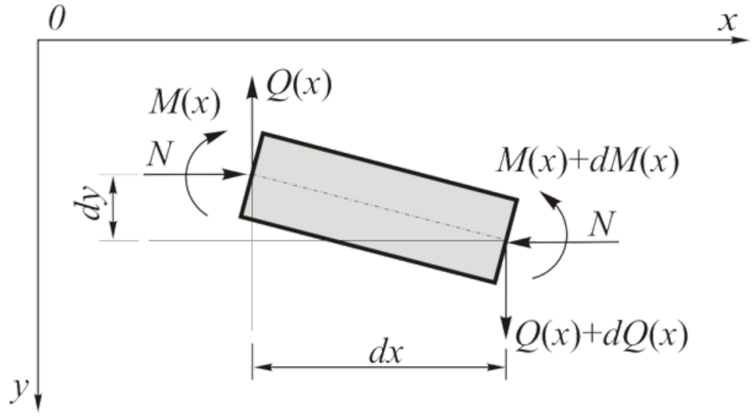

Рис. 2 **Праметры состояния стержня**

Как известно [4, 5], перечисленные параметры состояния связаны между собой формулами:

$$\varphi(x) = y'(x);\ \ M(x) = -E_0I_0A(x)\varphi'(x);\ \ Q(x) = M'(x) - N\varphi(x). \tag{26}$$

Исходя из решения (25) и выполняя операции, предписанные формулами (26), находим:

$$\varphi(x) = C_1U_1'(x) + C_2U_2'(x) + C_3; \tag{27}$$

$$M(x) = N[C_1U_1(x) + C_2U_2(x)]; \tag{28}$$

$$Q(x) = -NC_3 . \tag{29}$$

Обратим внимание на то, что поперечная сила оказывается постоянной всюду вдоль длины стержня, что является следствием ее отсутствия на стержень.

Выразим постоянные интегрирования в формулах (25), (27) - (29) через начальные параметры $y(0), \varphi(0), M(0), Q(0) -$ перемещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу в точке $x = 0$. Для этого положим $x = 0$ и воспользуемся формулой (22). Получим: $y(0) = C_1 + C_4$; $\varphi(0) = C_2 + C_3$; $M(0) = NC_1$; $Q(0) = -NC_3$. Отсюда находим:

$$C_1 = \frac{M(0)}{N};\ C_2 = \varphi(0) + \frac{Q(0)}{N};\ C_3 = -\frac{Q(0)}{N};\ C_4 = y(0) - \frac{M(0)}{N} .$$

Следовательно, для параметров состояния будем иметь:

$$y(x) = y(0) + \varphi(0)U_2(x) - \frac{M(0)}{N}\left(1 - U_1(x)\right) - \frac{Q(0)}{N}\left(x - U_2(x)\right); \tag{30}$$

$$\varphi(x) = \varphi(0)U_2'(x) + \frac{M(0)}{N}U_1'(x) - \frac{Q(0)}{N}\left(1 - U_2'(x)\right); \tag{31}$$

$$M(x) = \varphi(0)NU_2(x) + M(0)U_1(x) + Q(0)U_2(x) ; \tag{32}$$

$$Q(x) = Q(0) . \tag{33}$$

Формулу (24) также перепишем в терминах начальных параметров

$$y(x) = y(0)U_1(x) + \varphi(0)U_2(x) . \tag{34}$$

Пример. В качестве апробации полученных формул обратимся к хорошо изученному однородному стержню постоянного сечения. В таком частном случае, очевидно, следует положить $\phi(x) \equiv 1,\ E = E_0,\ \psi(x) \equiv 1,\ I = I_0,\ A(x) \equiv 1$. Тогда по формулам (20) и (19) будем иметь:

$$a_{n,0}(x) = x^{n-1},\ a_{n,i}(x) = \int_0^x\int_0^x a_{n,i-1}(x)dxdx = \frac{x^{2i+n-1}}{(2i+n-1)!} (i = 1,2,3,...) ;$$

$$U_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i P^i a_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i P^i \frac{x^{2i+n-1}}{(2i+n-1)!}\ (n = 1,2) .$$

Отсюда $U_1(x) = \cos\sqrt{P}x,\ U_2(x) = \frac{1}{\sqrt{P}}\sin\sqrt{P}x$ и формула (30) преобразуется к известному виду [10]

$$y(x) = y(0) + \frac{\varphi(0)}{k}\sin kx - \frac{M(0)}{k^2EI}\left(1 - \cos kx\right) - \frac{Q(0)}{k^3EI}\left(kx - \sin kx\right),$$

где $k = \sqrt{P} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$.

Интересно также заметить, что в данном примере формула (23) вырождается в основное тригонометрическое тождество.

Представление параметров состояния через безразмерные фундаментальные функции. Далее поставим цель - выразить параметры состояния стержня через безразмерные фундаментальные функции. Такой подход даст возможность получить аналитическое представление для критической силы.

Определим множество функций

$$\alpha_{n,i}(x) = \frac{a_{n,i}(x)}{l^{2i+n-1}}\ (n = 1,2)\ (i = 0,1,2,...) .$$

На основании (20), (21) для вновь введенных функций будем иметь:

$$\alpha_{n,0}(x)=\left(\frac{x}{l}\right)^{n-1},\ \alpha_{n,i}(x)=\frac{1}{l^2}\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}\alpha_{n,i-1}(x)\ dxdx\ (i=1,2,3,...)\,; \tag{35}$$

$$\alpha_{n,i}(x)=\frac{1}{l^{2i}}\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}...\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}\int_0^x\int_0^x\frac{1}{A(x)}a_{n,0}(x)\ dxdxdxdx...dxdx\,. \tag{36}$$

Функции $\alpha_{n,0}(x),\, \alpha_{n,i}(x)\ (n=1,2)\ (i=1,2,3,...)$ являются безразмерными. Относительно начальной функции это очевидно. Что касается функций $\alpha_{n,i}(x)$, то их безразмерная природа вытекает из леммы в силу того, что представление (36) есть частный случай формулы (5).

Перейдем теперь в формуле (19) к безразмерным функциям $\alpha_{n,i}(x)$. Учитывая, что $a_{n,i}(x)=l^{2i+n-1}\alpha_{n,i}(x)\ (n=1,2)\ (i=0,1,2,...)$, получим

$$U_n(x)=l^{n-1}X_n(x)\,, \tag{37}$$

где

$$X_n(x)=\alpha_{n,0}(x)-K\alpha_{n,1}(x)+K^2\alpha_{n,2}(x)-K^3\alpha_{n,3}(x)+\cdots\,, \tag{38}$$

$$K=Pl^2=N\frac{l^2}{E_0I_0}\,. \tag{39}$$

Новый неизвестный параметр K является безразмерным, в чем легко убедиться, подставив в формулу (39) размерности величин, которые там фигурируют. Следовательно, переход в формуле (19) к безразмерным функциям привел к ряду (38) по степеням безразмерного параметра K. В итоге функции $X_n(x)\ (n=1,2)$, определяемые этим рядом, являются безразмерными.

Относительно функций (35) будем придерживаться той же терминологии, что и для функций (20). По отношению к ряду (38) $\alpha_{n,i}(x)\ (n=1,2)\ (i=1,2,3,...)$ будут образующими, а $\alpha_{n,0}(x)\ (n=1,2)-$ начальными.

Далее обозначим:

$$\tilde{\alpha}_{n,0}(x)=l\alpha'_{n,0}(x)\,;\ \tilde{\alpha}_{n,i}(x)=l\alpha'_{n,i}(x)\ (n=1,2)\ (i=1,2,3,...)\,. \tag{40}$$

Сопоставляя вторую из формул (40) с формулой (6), на основании следствия к лемме заключаем, что функции $\tilde{\alpha}_{n,i}(x)$ также будут безразмерными. Что касается первой из формул (40), то выполняя дифференцирование, находим $\tilde{\alpha}_{n,0}(x)=n-1$.

Образуем из функций (40) ряд

$$\tilde{X}_n(x)=\tilde{\alpha}_{n,0}(x)-K\tilde{\alpha}_{n,1}(x)+K^2\tilde{\alpha}_{n,2}(x)-K^3\tilde{\alpha}_{n,3}(x)+\cdots\,. \tag{41}$$

Тогда

$$\tilde{X}_n(x)=lX'_n(x)\,, \tag{42}$$

причем $\tilde{X}_n(x)\ (n=1,2)-$безразмерные функции. Ряды (38), (41) по степеням K абсолютно и равномерно сходятся, что гарантировано такой же сходимостью исходных рядов (8), (9).

Равенства (30) - (32) с учетом (37), (42) теперь предстанут в виде:

$$y(x)=y(0)+\varphi(0)lX_2(x)-\frac{M(0)}{N}\big(1-X_1(x)\big)-\frac{Q(0)l}{N}\left(\frac{x}{l}-X_2(x)\right); \tag{43}$$

$$\varphi(x)=\varphi(0)\tilde{X}_2(x)+\frac{M(0)}{Nl}\tilde{X}_1(x)-\frac{Q(0)}{N}\big(1-\tilde{X}_2(x)\big)\,; \tag{44}$$

$$M(x) = \varphi(0)NlX_2(x) + M(0)X_1(x) + Q(0)lX_2(x)\,. \tag{45}$$

Равенство для продольной силы (33) осталось неизменным. Формула (34), применимая в случае шарнирно опертых концов стержня, запишется так

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x)\,. \tag{46}$$

Тождество (23) также перепишем в безразмерном формате

$$X_1(x)\tilde{X}_2(x) - \tilde{X}_1(x)X_2(x) = 1\,. \tag{47}$$

С точки зрения теории дифференциальных уравнений, равенством (43) дается общее решение уравнения (3), выраженное через безразмерные фундаментальные решения. Другие параметры состояния также выражены через безразмерные функции. Важно заметить, что размерности постоянных коэффициентов при безразмерных функциях в правых частях формул (43) - (46), (33) совпадают с размерностями соответствующих левых частей.

Таким образом, совокупностью формул (43) - (46), (33) - (36), (38) - (41) полностью определены параметры состояния, необходимые для исследования устойчивости стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью, сжатого постоянной продольной силой, при любых возможных граничных условиях.

Аналитическое представление для критической силы. Исходя из (39), в общем случае непрерывной переменной поперечной жесткости приходим к следующему аналитическому представлению для продольной силы

$$N = K\frac{E_0 I_0}{l^2}. \tag{48}$$

Следуя [1], безразмерный параметр K назовем *коэффициентом устойчивости*. Фактически, благодаря формуле (48), задача отыскания критической силы для стержня с непрерывной жесткостью сводится к отысканию соответствующего коэффициента устойчивости. Поскольку формулы для параметров состояния зависят именно от коэффициента устойчивости, то для его отыскания будут служить характеристические уравнения, к которым придем после реализации заданных граничных условий.

Выводы. В работе проинтегрировано дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня с произвольной непрерывной переменной поперечной жесткостью, сжатого постоянной осевой продольной силой. В аналитическом виде выписаны формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня. Эти формулы выражены через начальные параметры и пригодны для исследования устойчивости стержня при любых возможных граничных условиях.

Решение данной проблемы открывает перспективу создания нового метода исследования стержней на устойчивость равновесия. Для этого достаточно указать эффективный метод численной реализации найденных здесь точных решений.

Список использованной литературы

1. *Динник А.Н.* Продольный изгиб. Кручение. – М.: Издательство академии наук СССР, 1955. – 392 с.

2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под редакцией *Биргера И.А., Пановко Я.Г.* т.3. – М.: «Машиностроение», 1968. – 576 с.

3. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: «Машиностроение», 1978. – 312 с.

4. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 439 с.

5. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2007. – 670 с.

6. *Крутий Ю.С.* Точное решение дифференциального уравнения свободных поперечных колебаний неоднородного прямого стержня переменного сечения с непрерывно распределенной переменной массой // Строительная механика и расчет сооружений. №5, 2011. с. 47-53.

7. *Ржаницын А.Р.* Устойчивость равновесия упругих систем. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 476 с.

8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Издательство «Наука», 1967. – 984 с.

9. *Блейх Ф.* Устойчивость металлических конструкций. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 544 с.

10. *Киселев В.А.* Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

12. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985. – 448 с.

ТОЧНЕ РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СТІЙКОСТІ РІВНОВАГИ ПРУЖНОГО СТЕРЖНЯ З ДОВІЛЬНОЮ БЕЗПЕРЕРВНОЮ ЗМІННОЮ ЖОРСТКІСТЮ

Крутий Ю.С., Сур'янінов М.Г.
Одеська державна академія будівництва та архітектури

Мета. Розвиток методу прямого інтегрування для задач механіки деформівного твердого тіла, які описуються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

Методика. Застосування методу прямого інтегрування для побудови аналітичних рішень диференціальних рівнянь стійкості пружного стрижня з довільною безперервної змінною жорсткістю.

Результати. Наявність такого рішення може послужити основою для розробки нового методу досліджень з проблеми стійкості.

Наукова новизна. У загальному випадку безперервної змінної поперечної жорсткості приходимо до аналітичного подання для поздовжньої сили, що містить безрозмірний параметр, названий нами коефіцієнтом стійкості, внаслідок чого завдання відшукання критичної сили для стержня з безперервною жорсткістю зводиться до відшукання зазначеного коефіцієнта стійкості.

Практична значимість. Проінтегрувати диференціальне рівняння поздовжнього вигину стрижня з довільною безперервної змінної поперечної жорсткістю, стисненого постійної осьової поздовжньою силою. В аналітичному вигляді виписані формули для переміщень і внутрішніх зусиль в довільному перерізі стрижня. Ці формули виражені через початкові параметри і придатні для дослідження стійкості стрижня при будь-яких можливих граничних умовах.

Рішення даної проблеми відкриває перспективу створення нового методу дослідження стрижнів на стійкість рівноваги. Для цього достатньо вказати ефективний метод чисельної реалізації знайдених тут точних рішень.

Ключові слова: *стійкість, стиснений стержень, змінна жорсткість, метод прямого інтегрування, коефіцієнт стійкості, критична сила.*

EXACT SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF STABLE EQUILIBRIUM ELASTIC BEAM WITH AN ARBITRARY CONTINUOUS VARIABLE STIFFNESS

KRUTIY JU.S., SURIANINOV N.G.
Odessa State Academy of Construction and Architecture

Goal. Development of the method of direct integration for problems of solid mechanics, which are described by differential equations with variable coefficients.

Methods. Application of the method of direct integration to build analytic solutions of differential equations of the stability of elastic rod with an arbitrary continuous variable stiffness.

Results. The existence of such solutions can serve as a basis for developing a new method of research on sustainability.

Scientific novelty. In general, the continuous variable lateral stiffness come to an analytical representation for the longitudinal force, containing a dimensionless parameter called us a factor of stability, so that the problem of finding the critical force for a rod with a continuous stiffness is reduced to finding the specified factor of stability.

Practical significance. Integrating the differential equation buckling rod with arbitrary continuous variable lateral stiffness, compressed constant axial longitudinal force. The analytical form of written formulas for the displacements and internal forces in an arbitrary section of the rod. These formulas are expressed in terms of the initial parameters and are suitable for investigating the stability of the rod at all possible boundary conditions.

The solution of this problem offers the prospect of creating a new method of investigating the stability of equilibrium of rods. It's enough to indicate effective method of numerical realization of exact solutions found here.

Keywords: *stability, compressed rod, a variable stiffness, the method of direct integration, stability factor, the critical force.*