

УДК 531/534:624

СУРЬЯНИНОВ Н.Г.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
 ШВАГИРЕВ П.А., ШОТАДЗЕ Г.Б.
 Одесский национальный политехнический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДА В
 ВИДЕ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ
 МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Цель. Построение математической модели трубопровода с использованием численно-аналитического метода граничных элементов.

Методика. Фрагмент надземного трубопровода, расположенный на системе промежуточных опор, рассматривается, как неразрезная балка, для расчета которой предлагается использовать метод граничных элементов.

Результаты. Получены эпюры распределения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях трубопровода.

Научная новизна. Впервые для расчета трубопроводов применен численно-аналитический метод граничных элементов, который показал свою высокую точность и эффективность при анализе стержневых систем любой конфигурации.

Практическая значимость. Численная реализация предложенных здесь алгоритмов выполнена в свободно распространяемом математическом пакете Scilab. При этом программа носит универсальный характер, поскольку не накладывалось никаких ограничений на нагрузки, геометрические размеры трубопровода и материал.

Ключевые слова: трубопровод, неразрезная балка, метод граничных элементов, фундаментальные функции, граничные параметры, прогиб, Scilab.

Введение. В зависимости от условий нагружения, опирания и целей расчета элементы трубопровода приводятся к разным расчетным схемам. Практически охвачены все расчетные схемы (исключая фермы и пластины), рассматриваемые в строительной механике. В частности, это может быть балка, балка на упругом основании или в упругопластической среде, брус малой кривизны, рамная или арочная конструкция, плоско-пространственная система или стержень ломаного очертания. Более точными, хотя и гораздо более сложными, являются оболочечные модели — цилиндрическая оболочка с прямой или криволинейной осью в упругой или упругопластической среде. Предлагаются и другие модели [1, 2], которые, по мнению их авторов, приводят к более точным результатам расчета или упрощают расчет без снижения его точности. Достаточно часто трубопровод можно моделировать, как неразрезную балку.

Постановка задачи. Для реализации большинства перечисленных расчетных схем весьма эффективным представляется применение численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ), который особенно хорошо зарекомендовал себя при расчете плоских и пространственных стержневых систем разного очертания [3, 4].

Если несколько стержней, подверженных изгибу, соединены в единую конструкцию, то для системы стержней можно составить матричное уравнение типа

$$\begin{pmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{24}(x-\xi) \\ -A_{34}(x-\xi) \\ -A_{44}(x-\xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi, \quad (1)$$

или

$$\vec{Y}(x) = \vec{A}(x)\vec{X}(0) + \vec{B}(x), \quad (2)$$

где $\vec{Y}(x)$ – вектор параметров напряженно-деформированного состояния стержня в текущей точке; $\vec{A}(x)$ – квадратная матрица фундаментальных ортонормированных функций уравнения (1); $\vec{X}(0)$ – вектор начальных параметров; $\vec{B}(x)$ – вектор внешней нагрузки.

Матрица $\vec{A}(x)$ преобразуется к квазидиагональному виду, а векторы $\vec{Y}(x)$, $\vec{X}(0)$ и $\vec{B}(x)$ содержат параметры состояния всех стержней:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{n-1} & \\ & & & & A_n \end{pmatrix}; \vec{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{pmatrix}; \vec{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix}; \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \\ B_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если координате x каждого стержня дать граничное значение l_i , то для системы матриц (3) можно выполнить достаточное простое преобразование по схеме

$$\vec{Y}(l) = \vec{A}(l)\vec{X}(0) + \vec{B}(l) \rightarrow \vec{A}(l)\vec{X}(0) - \vec{Y}(l) = -\vec{B}(l) \rightarrow \vec{A}_*(l)\vec{X}_*(0, l) = -\vec{B}(l), \quad (4)$$

где конечные граничные параметры матрицы \vec{Y} переносятся на место нулевых параметров вектора \vec{X} . При этом, эти векторы дополняются уравнениями равновесия и совместности перемещений узловых точек и граничными условиями. В конце схемы преобразований (4) получается система линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней конструкции. После вычисления начальных параметров стержней их напряженно-деформированное состояние определяется по матричному уравнению (1). Таким образом, решение прямых задач строительной механики стержневых систем в ЧА МГЭ сводится к решению одной системы линейных алгебраических уравнений и вычислению напряженно-деформированного состояния во внутренних точках стержней по соотношениям метода начальных параметров. Такая схема решения обеспечивает получение весьма точных и достоверных результатов, которые можно представить средствами Scilab [5], DELPHI, MATLAB (или другой среды) в виде эпюр, форм свободных колебаний, потери устойчивости и т. п.

Результаты исследования. Рассмотрим некоторый фрагмент трубопровода, представленный на рис. 1.



Рис. 1 Фрагмент трубопровода

Представим расчетную схему этого трубопровода в виде неразрезной балки, нагруженной некоторой произвольной нагрузкой (рис. 2), характер действия которой, вообще говоря, никак не влияет на алгоритм предлагаемого ниже подхода.

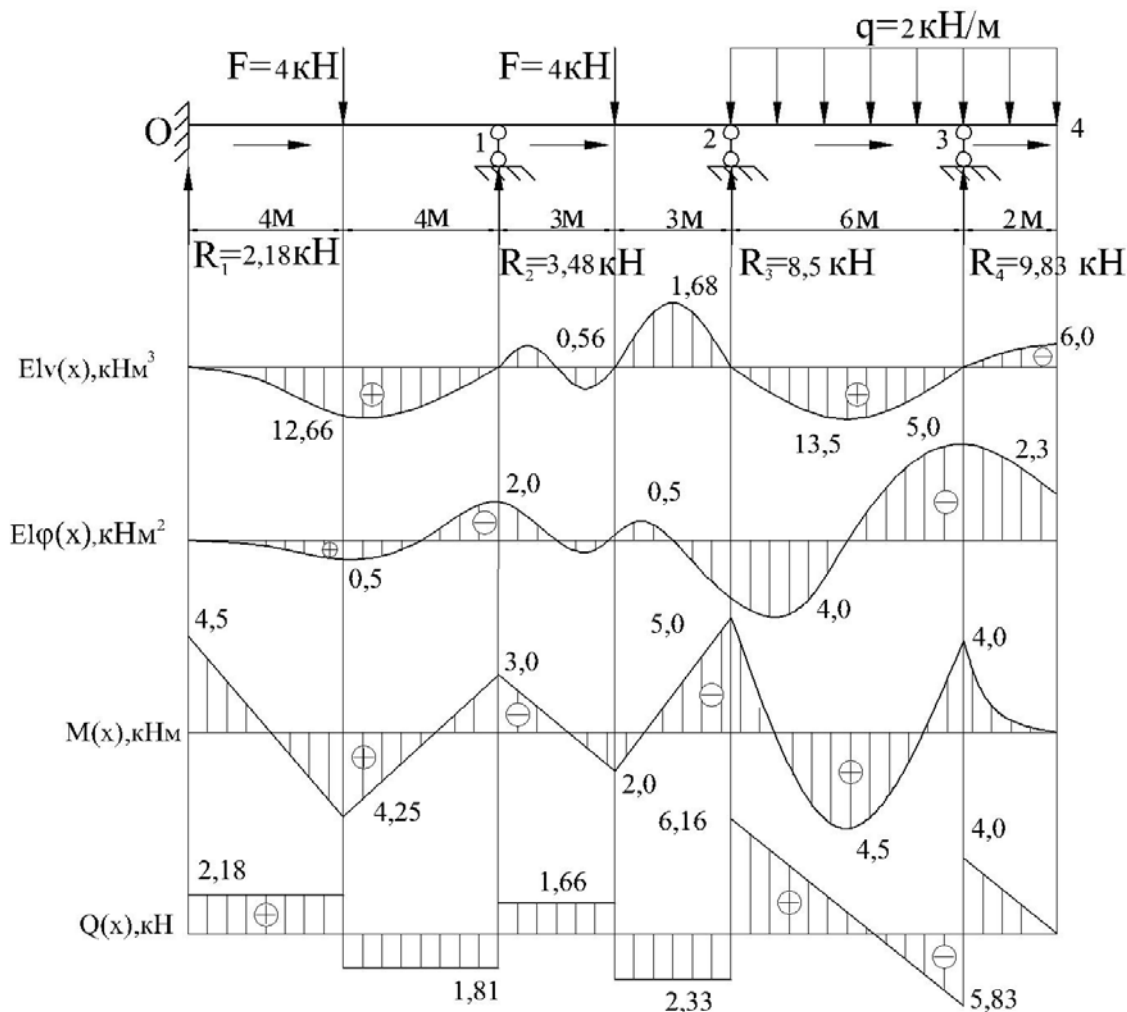


Рис. 2 Моделирование трубопровода неразрезной балкой

Следуя алгоритму ЧА МГЭ [3, 4], разобьем неразрезную балку на 4 одномерных модуля (рис. 2). Каждый из этих модулей работает в условиях изгиба, поэтому дифференциальное уравнение и начальные параметры модуля имеют вид

$$v^{IV}(x) = \frac{q_y(x)}{EI}; \quad EIv(0); \quad EI\varphi(0); \quad M(0); \quad Q(0). \quad (5)$$

Решение задачи Коши (5) в матричной форме запишется следующим образом

$$\begin{pmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & -x & -A_{13} \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} (x-\xi)^3 q_y(\xi) / 6 \\ (x-\xi)^2 q_y(\xi) / 2 \\ -(x-\xi) q_y(\xi) \\ -q_y(\xi) \end{pmatrix} d\xi, \quad (6)$$

где

$$A_{13} = x^2 / 2; \quad A_{14} = x^3 / 6 \quad [3].$$

Матрица фундаментальных ортонормированных функций, записанная для всей системы, имеет вид

$$\bar{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & l_1 & \frac{-l_1^2}{2} & -\frac{l_1^3}{6} & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 & 1 & -l_1 & \frac{-l_1^2}{2} & -1 & & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & 1 & l_1 & & -1 & & & & & & & & & \\
 \hline
 -1 & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & l_2 & \frac{-l_2^2}{2} & -\frac{l_2^3}{6} & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & 1 & -l_2 & \frac{-l_2^2}{2} & -1 & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & 1 & l_2 & & -1 & & & & & & \\
 \hline
 -1 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & l_3 & \frac{-l_3^2}{2} & -\frac{l_3^3}{6} & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & 1 & -l_3 & \frac{-l_3^2}{2} & -1 & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & & 1 & l_3 & & -1 & & & \\
 \hline
 & & & & -1 & & & & & 1 & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & -1 & & & l_4 & \frac{-l_4^2}{2} & -\frac{l_4^3}{6} & & \\
 \hline
 & & & & & & & & & & -1 & 1 & -l_4 & \frac{-l_4^2}{2} & \\
 \hline
 & & & & & & & & & & & & 1 & l_4 & \\
 \hline
 & & & & & & & & & & & & & & 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

Сформируем векторы начальных параметров \bar{X}_* , конечных параметров \bar{Y} и внешней нагрузки \bar{B} . При этом в матрицах \bar{X}_* и \bar{Y} учитываем краевые условия каждого модуля, уравнения равновесия и условия совместности перемещений узлов 1, 2, 3, а элементы вектора нагрузки определяем по формулам

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= F(x - a_1)_+^3 / 6 + M(x - a_2)_+^2 / 2 + q[(x - a_3)_+^4 - (x - a_4)_+^4] / 24; \\
 B_{21} &= F(x - a_1)_+^2 / 2 + M(x - a_2)_+ + q[(x - a_3)_+^3 - (x - a_4)_+^3] / 6; \\
 B_{31} &= F(x - a_1)_+ + M \cdot H(x - a_2) + q[(x - a_3)_+^2 - (x - a_4)_+^2] / 2; \\
 B_{41} &= F \cdot H(x - a_1) + q[(x - a_3)_+ - (x - a_4)_+].
 \end{aligned} \tag{7}$$

В соответствии с краевыми условиями в матрице \bar{X}_* нулевыми оказываются 1, 2, 5, 9, 13 строки. Соответственно обнуляем 1, 2, 5, 9 и 13 столбцы матрицы \bar{A} . Нулевые строки в \bar{X}_* заменяем соответствующими независимыми параметрами из матрицы \bar{Y} .

$\bar{X}_* =$	1	$EI v_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(\ell)}^{0-1}$	$\bar{Y} =$	1	$EI v_{(\ell)}^{0-1} = 0$	$\bar{B} =$	1	256/6
	2	$EI \varphi_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(\ell)}^{1-2}$		2	$EI \varphi_{(\ell)}^{0-1} = EI \varphi_{(0)}^{1-2}$		2	32,0
	3	$M_{(0)}^{0-1}$		3	$M_{(\ell)}^{0-1} = M_{(0)}^{1-2}$		3	-16,0
	4	$Q_{(0)}^{0-1}$		4	$Q_{(\ell)}^{0-1}$		4	-4,0
	5	$EI v_{(0)}^{1-2} = 0; Q_{(\ell)}^{2-3}$		5	$EI v_{(\ell)}^{1-2} = 0$		5	18,0
	6	$EI \varphi_{(0)}^{1-2}$		6	$EI \varphi_{(\ell)}^{1-2} = EI \varphi_{(0)}^{2-3}$		6	18,0
	7	$M_{(0)}^{1-2}$		7	$M_{(\ell)}^{1-2} = M_{(0)}^{2-3}$		7	-12,0
	8	$Q_{(0)}^{1-2}$		8	$Q_{(\ell)}^{1-2}$		8	-4,0
	9	$EI v_{(0)}^{2-3} = 0; EI v_{(\ell)}^{3-4}$		9	$EI v_{(\ell)}^{2-3} = 0$		9	108,0
	10	$EI \varphi_{(0)}^{2-3}$		10	$EI \varphi_{(\ell)}^{2-3} = EI \varphi_{(0)}^{3-4}$		10	72,0
	11	$M_{(0)}^{2-3}$		11	$M_{(\ell)}^{2-3} = M_{(0)}^{3-4}$		11	-36,0
	12	$Q_{(0)}^{2-3}$		12	$Q_{(\ell)}^{2-3}$		12	-12,0
	13	$EI v_{(0)}^{3-4} = 0; EI \varphi_{(\ell)}^{3-4}$		13	$EI v_{(\ell)}^{3-4}$		13	4/3
	14	$EI \varphi_{(0)}^{3-4}$		14	$EI \varphi_{(\ell)}^{3-4}$		14	8/3
	15	$M_{(0)}^{3-4}$		15	$M_{(\ell)}^{3-4} = 0$		15	-4,0
	16	$Q_{(0)}^{3-4}$		16	$Q_{(\ell)}^{3-4} = 0$		16	-4,0

Переставив строки матриц \bar{A}_* и \bar{B} в новом порядке, методом Гаусса определяем граничные параметры неразрезной балки.

$$\begin{aligned}
 Q_{(\ell)}^{0-1} &= -1,8125 \text{ кН}; & Q_{(\ell)}^{1-2} &= -2,3333 \text{ кН}; & M_{(0)}^{0-1} &= -4,5000 \text{ кНм}; \\
 Q_{(0)}^{0-1} &= 2,1875 \text{ кН}; & Q_{(\ell)}^{2-3} &= -5,8333 \text{ кН}; & EI \varphi_{(0)}^{1-2} &= -2,0000 \text{ кНм}^2; \\
 M_{(0)}^{1-2} &= -3,0000 \text{ кНм}; & Q_{(0)}^{1-2} &= 1,6667 \text{ кН}; & EI v_{(\ell)}^{3-4} &= -6,0000 \text{ кНм}^3; \\
 EI \varphi_{(0)}^{2-3} &= 4,0000 \text{ кНм}^2; & M_{(0)}^{2-3} &= -5,0000 \text{ кНм}; & Q_{(0)}^{2-3} &= 6,1667 \text{ кН}; \\
 EI \varphi_{(\ell)}^{3-4} &= -2,3333 \text{ кНм}^2; & EI \varphi_{(0)}^{3-4} &= -5,0000 \text{ кНм}^2; & M_{(0)}^{3-4} &= -4,0000 \text{ кНм}; \\
 Q_{(0)}^{3-4} &= 4,0000 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

В расчетах этих величин не учитывалась деформация сдвига, поэтому полученные значения весьма близки к действительным значениям параметров балки.

Определяя состояние конструкции во внутренних точках по уравнению (6), можно построить эпюры, представленные на рис. 2.

Выводы. Таким образом, прямолинейные участки надземного трубопровода, расположенного на системе промежуточных опор, можно рассматривать, как неразрезные балки, для анализа напряженно-деформированного состояния которых эффективно использовать численно-аналитический метод граничных элементов.

Список использованной литературы

1. *Айнбиндер А. Б.* Расчет магистральных и промышленных трубопроводов на прочность и устойчивость / А.Б. Айнбиндер. — М.: Изд-во Недр, 1991. — 288 с.
2. *Рудаченко А.В.* Исследования напряженно-деформированного состояния трубопроводов: учебное пособие / А.В. Рудаченко, А.Л. Саруев; Томский политехнический университет. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. — 136 с.
3. Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей. — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
4. Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. / Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та / Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.
5. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269с.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТРУБОПРОВОДУ У ВИГЛЯДІ НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ СУР'ЯНИНОВ Н.Г.

Одеська державна академія будівництва та архітектури

ШВАГІРЕВ П.А., ШОТАДЗЕ Г.Б.

Одеський національний політехнічний університет

Мета. Побудова математичної моделі трубопроводу з використанням чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

Методика. Частковий надземного трубопроводу, розташований на системі проміжних опор, розглядається, як нерозрізна балка, для розрахунку якої пропонується використовувати метод граничних елементів.

Результати. Отримано епюри розподілу прогинів, кутів повороту, згинальних моментів і поперечних сил в перетинах трубопроводу.

Наукова новизна. Вперше для розрахунку трубопроводів застосований чисельно-аналітичний метод граничних елементів, який показав свою високу точність і ефективність при аналізі стрижневих систем будь-якої конфігурації.

Практична значимість. Чисельна реалізація запропонованих тут алгоритмів виконана у вільно розповсюдженому математичному пакеті Scilab. При цьому програма носить універсальний характер, оскільки не накладалося жодних обмежень на навантаження, геометричні розміри трубопроводу і матеріал.

Ключові слова: *трубопровід, нерозрізна балка, метод граничних елементів, фундаментальні функції, граничні параметри, прогин, Scilab.*

MATHEMATICAL MODEL OF CONDUIT AS A CONTINUOUS BEAM USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

SURIANINOV N.G.

Odessa State Academy of Construction and Architecture

SHVAGIREV P.A., SHOTADZE G.B.

Odessa National Polytechnic University

Goal. Constructing a mathematical model of the pipeline with the use of numerical-analytical boundary element method.

Methods. Detail aboveground pipeline system located on the intermediate supports, considered as continuous beam, for the calculation of which is proposed to use the boundary element method.

Results. Obtained diagrams of the distribution of deflections, angles of rotation, bending moments and shear forces in sections of the pipeline.

Scientific novelty. For the first time for the calculation of pipelines used numerical-analytical boundary element method, which showed its high accuracy and efficiency in the analysis of core systems of any configuration.

Practical significance. Numerical realization of the offered algorithms are implemented in a freely distributed mathematical package Scilab. The program is universal, because it does not impose any restrictions on load, geometric dimensions and material of the pipe.

Keywords: *pipeline, continuous beam, the boundary element method, the fundamental functions, boundary parameters, deflection, Scilab.*