УДК 519.854.2

ПАВЛОВ А.А.,
ИВАНОВА А.А.,
ЗИГУРА Р.А.

МЕТОД ГРУППОВОГО УЧЁТА АРГУМЕНТОВ И АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ (МГУАИАИ) В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Метод анализа иерархий (МАИ) Саати [1–4] в настоящее время является наиболее употребимым для решения реальных задач многокритериального выбора. Если альтернативы в МАИ задаются векторами, то формально задача многокритериального выбора может решаться так же методом группового учета аргументов (МГУА) А.Г. Ивахненко.

В статье предлагается метод группового учета аргументов и анализа иерархий (МГУАиАИ), объединяющий в себе преимущества и особенности МГУА и МАИ.

Nowadays Saaty's Analytical Hierarchy Process (AHP) is the most applicable one for solving practical problems of multicriteria choice. In case the alternatives in AHP are vectors the problem of multicriteria choice can be also solved with the help of the Method of Group Accounting of Arguments by Ivahnenko.

The Method of Group Accounting of Arguments and Hierarchy Analysis that combines the advantages and peculiarities of both methods mentioned above is proposed in the article.

Постановка задачи

Есть глобальная цель, которую количественно можно задать числовой скалярной ограниченной непрерывной функцией *f*(*A*), А – произвольная альтернатива, выражаемая n – мерным вектором $\bar{x} = (x_1,...x_n)^{\mathsf{T}}$, x_j, $j = \overline{1,n}$ ограниченное численное значение *j*-того показателя, характеризующего альтернативу А.

Примечание. Числовой скалярной непрерывной функции *f*(*A*) не существует, если с точки зрения глобальной цели может быть нарушено условие транзитивности: существуют альтернативы A_i, A_j, A_e для которых в соответствии с глобальной целью выполняется $A_i \succ A_j, A_j \succ A_e, A_e \succ A_i$.

Необходимо найти наилучшую альтернативу из множества $\{A_i, i = \overline{1,m}\}$ с точки зрения глобальной цели. В такой постановке наиболее употребимый метод решения – метод анализа иерархий Саати [1–4]. При этом задание альтернативы А вектором $\bar{x}$ не является существенным.

Вкратце основные этапы решения задачи многокритериального выбора с помощью метода анализа иерархий Т. Саати [1–4]следующие:

1. Очертить проблему и определить, что необходимо узнать.

2. Построить иерархию, начиная с вершины (цели – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят следующие уровни) к самому нижнему уровню, который обычно является перечнем альтернатив.

3. Построить, используя эксперта (экспертов) множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней – по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня.

4. По матрицам парных сравнений найти значения весов объектов.

5. Найти согласованность всей иерархии.

6. Найти наилучшую альтернативу.

Заложенный в МАИ принцип идентичности и декомпозиции предусматривает структурирование проблем в виде иерархии или сети. Обычно в наиболее элементарном виде иерархическая структура строится с вершины, через промежуточные уровни к самому низкому уровню. Поэтому первый шаг при решении задачи многокритериального выбора состоит в декомпозиции и представлении задачи в иерархической форме, что показано на рис.1.

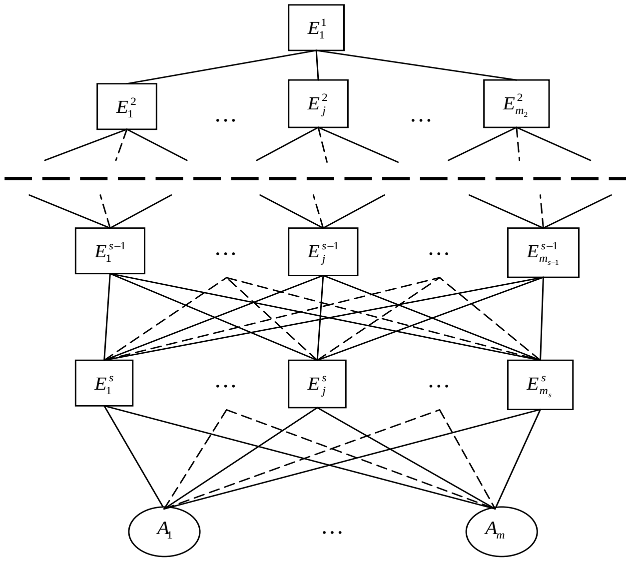

Рис. 1. Пример иерархического представления задачи принятия решений

В представленной на рисунке задаче имеем m альтернатив $A_1 ... A_m$ и s уровней критериев E_j^i, $i = \overline{1, s}$ $j = \overline{1, m_i}$

На последующих этапах МАИ элементы иерархии сравниваются попарно по отношению к их воздействию на общую характеристику (глобальную цель либо критерий верхнего уровня). Из группы матриц парных сравнений формируется набор локальных приоритетов, которые выражают относительное влияние множества элементов на элемент примыкающего сверху уровня, т.е. в нашем случае компоненты векторов будут иметь следующий вид [6]:

$$W^A_{E_1^{s-1}} = [W^A_{E_1^s} W^A_{E_2^s} \ldots W^A_{E_{m_s}^s}] W^E_{E_1^{s-1}}$$

$$\ldots$$

$$W^A_{E_{m_{s-1}}^{s-1}} = [W^A_{E_1^s} W^A_{E_2^s} \ldots W^A_{E_{m_s}^s}] W^E_{E_{m_{s-1}}^{s-1}}$$

$$\ldots$$

$$W^A_{E_1^{s-j}} = [W^A_{E_1^{s-j+1}} W^A_{E_2^{s-j+1}} \ldots W^A_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}] W^E_{E_1^{s-j}}$$

$$\ldots$$

$$W^A_{E_{m_{s-j}}^{s-j}} = [W^A_{E_1^{s-j+1}} W^A_{E_2^{s-j+1}} \ldots W^A_{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}}] W^E_{E_{m_{s-j}}^{s-1}}$$

Последняя формула

$$W^A_{E_1^1} = [W^A_{E_1^2} W^A_{E_2^2} \ldots W^A_{E_{m_2}^2}] W^E_{E_1^1}, \tag{1}$$

$W^E_{E_1^1} = \begin{pmatrix} w^{E_1^2}_{E_1^1} \\ \vdots \\ w^{E_{m_2}^2}_{E_1^1} \end{pmatrix}$, где $w^{E_j^2}_{E_1^1}$ – вес критерия E_j^2 в глобальную цель E_1^1, $j = \overline{1, m_2}$

$W^A_{E_1^1} = \begin{pmatrix} w^1_{E_1^1} \\ \vdots \\ w^m_{E_1^1} \end{pmatrix}$, где $w^j_{E_1^1}$ – результирующий вес j -ой альтернативы в глобальную цель E_1^1, $j = \overline{1, m}$

$W^A_{E_l^{s-j}} = \begin{pmatrix} w^1_{E_l^{s-j}} \\ w^2_{E_l^{s-j}} \\ \vdots \\ w^m_{E_l^{s-j}} \end{pmatrix}$, где $w^i_{E_l^{s-j}}$ – вес (вклад) i -ой альтернативы в критерий E_l^{s-j}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s-1}$, $l = \overline{1, m_{s-j}}$

$$W_{E_l^{s-j}}^{E}=\begin{pmatrix} w_{E_l^{s-j}}^{E_1^{s-j+1}} \\ w_{E_l^{s-j}}^{E_2^{s-j+1}} \\ \vdots \\ w_{E_l^{s-j}}^{E_{m_{s-j+1}}^{s-j+1}} \end{pmatrix}$$, где $w_{E_l^{s-j}}^{E_p^{s-j+1}}$ – вес E_p^{s-j+1} критерия в критерий E_l^{s-j},

$j=\overline{1,s-1},\quad l=\overline{1,m_{s-j}},\quad p=\overline{1,m_{s-j+1}}$.

Таким образом, j -я компонента (1) – это $W_{E_1^1}^{j}$.

Принимается та альтернатива, на которой достигается максимум $\max\limits_{j} w_{E_1^1}^{j}$

Если в дереве иерархий не все связи имеют место, то соответствующие веса принимаются равными нулю. Поэтому в данной статье рассматривается только общий случай.

Рассмотрим, каким образом дерево иерархий **с** весами приписанными каждой из ветвей, аппроксимирует неизвестные значения $f(A_i),\ i=\overline{1,m}$. Для этого рассмотрим следующие выражения:

$E_j^s(A_i)$ – значение, которое принимает критерий E_j^s – на альтернативе A_i,

$$E_j^s(A_i)=w_{E_j^s}^{i},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,m_s}.$$

При этом для фиксированных $s,\ j$ $w_{E_j^s}^{i}$ измеряются в одних и тех же единицах и пронормированы : $\sum\limits_{i=1}^{m} w_{E_j^s}^{i}=1$

$$E_j^{s-1}(A_i)=\sum_{l=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s} E_l^s(A_i).$$

Веса $w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s}$ при фиксированных s и j измеряются в одних и тех же единицах и пронормированы $\sum\limits_{j=1}^{m_s} w_{E_j^{s-1}}^{E_l^s}=1$.

В общем случае $E_t^{s-j}(A_i)=\sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} E_l^{s-j+1}(A_i)$ Веса $w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}}$ при фиксированных *s, j, t* измеряются в одних и тех же единицах и пронормированы $\sum_{l=1}^{m_{s-j+1}} w_{E_t^{s-j}}^{E_l^{s-j+1}} = 1$.

Примечание: в иерархической системе Саати все веса считаются неотрицательными.

И наконец:

$$E_1^1(A_i)=\sum_{l=1}^{m_2} w_{E_1^1}^{E_l^2} E_l^2(A_i),\ i=\overline{1,m} \tag{2}$$

Выражение (2) и есть аппроксимация неизвестного значения $f(A_i)$, $i=\overline{1,m}$.

$E_1^1(A_i),\ i=\overline{1,m}$ можно также представить следующим образом:

$$E_1^1(A_i)=\sum_{t=1}^{m_s} \alpha_t w_{E_t^s}^{i},\ i=\overline{1,m}, \tag{3}$$

где коэффициенты α_t очевидным образом определяются из выражения (2).

Постановка задачи 2

С учетом дополнительной информации эксперт (эксперты) задают значения $f(A_i)$, $i=\overline{1,m}$ неизвестной функции цели на альтернативах A_i $i=\overline{1,m}$, ставится задача не нахождения наилучшей альтернативы, а построение такой оценочной функции $\hat{f}\ (A)=\hat{f}\ (x_1\dots x_n)$ неизвестной функции $f\ (A)=f\ (x_1\dots x_n)$, по которой можно было бы находить адекватные оценки $f\ (A)$ (A – произвольная альтернатива $\overline{\in}\ \{A_1\dots A_m\}$) либо находить отношение порядка на произвольном множестве альтернатив в общем случае не совпадающем с множеством A_i, $i=\overline{1,m}$ для нахождения наилучшей альтернативы.

В этом случае наиболее конструктивным методом решения является широко известный метод эвристической самоорганизации МГУА (метод группового учета аргументов) Ивахненко А.Г. [10–12], суть которого в общих чертах заключается в следующем.

Пусть неизвестная функция $f\left(x_1 \ldots x_n\right)$ задана таблично: $f\left(x_{1i}, x_{2i} \ldots x_{ni}\right),\ i = \overline{1, p}$.

Тогда инвариантной составляющей любого алгоритма, реализующего МГУА является:

1. Разбиение множества векторов $\overline{x_i} = \left(x_{1i}, \ldots x_{ni}\right)^{\top},\ i = \overline{1, p}$ на два подмножества P_1 и P_2.

Примечание. Различия алгоритмов, реализующие МГУА, различаются правилами построения P_1 и P_2.

2. Процедура МГУА является многорядной. Каждый ряд генерирует множество частных аппроксимаций неизвестной функции $f\left(x_1, \ldots x_n\right)$. Обычно этими аппроксимациями являются полиномы от аргументов функции $f\left(x_1, \ldots x_m\right)$ и, как правило, степень этих полиномов от ряда к ряду увеличивается. В каждом ряду частные аппроксимации обычно строятся методом наименьших квадратов, используя значения неизвестной функции и соответствующие им значения аргументов из множества P_1.

Примечание. Различные алгоритмы МГУА различаются видом задания частных аппроксимаций $f\left(x_1, \ldots x_n\right)$ в каждом ряду многорядной процедуры МГУА.

3. В следующем ряду используются не все частные описания предыдущего ряда, а только часть из них, которые наилучшим образом аппроксимируют неизвестную функцию $f\left(x_1, \ldots x_n\right)$ на множестве значений аргументов P_2.

Примечание. Различные алгоритмы МГУА отличаются критериями отбора частных аппроксимаций предыдущего ряда на последующий. Есть алгоритмы в которых критерий отбора определяется на множествах P_2 и P_1.

4. Результирующей аппроксимацией является та, на которой достигается минимум значения критерия отбора частных описаний от предыдущего ряда к последующему. Эмпирически показано, что если множество P_2 является представительным, то изменение значений критерия отбора на «лучших» частных аппроксимациях каждого ряда «грубо» описывается одномодальной функцией, минимуму которой соответствует наиболее «близкое» к $f\left(x_1, \ldots x_n\right)$ частное описание.

Основным общепризнанным отличием (преимуществом) МГУА, как метода эвристической самоорганизации является использование критерия отбора по множеству P_2, которые часто приводят к установлению истиной закономерности, выражаемой функцией $f\left(x_1,\dots x_m\right)$.

Постановка задачи 3

Совпадает с постановкой задачи 2, однако исходные данные являются другими.

По прежнему необходимо восстановить эффективную оценку $\hat{f}\left(A\right)$ неизвестной функции $f\left(A\right)$ отражающую глобальную цель. В этом случае автоматизируется процесс выбора наилучшей альтернативы из произвольного набора альтернатив без привлечения экспертов, т.е. без временных и финансовых затрат.

Постановка задачи 2 и применение МГУА предполагает возможность непосредственного измерения значений функции $f\left(A\right)$ на множестве альтернатив A_i, $i=\overline{1,m}.$

Постановка задачи 1 и использование МАИ основано на том, что непосредственно эксперт не может измерить значения $f\left(A_i\right), i=\overline{1,m}.$ Однако естественно предположить (в отличие от постановки 1), что эксперт (эксперты) могут задать множество неравенств $G\left\{f\left(A_i\right)>f\left(A_j\right) \text{ или } f\left(A_i\right)=f\left(A_j\right) \text{ или } f\left(A_i\right)\geq f\left(A_j\right)\right\}$ $i\neq j,\left(ij\right)\in I$; $i,j\in\left\{\overline{1,m}\right\}$. Каждое неравенство эксперт (эксперты) задает тогда, когда он уверен, что с точки зрения глобальной цели альтернатива A_i лучше либо не хуже либо равна по эфективности альтернативе A_j.

Примечание. Неравенства из множества *G* не должны нарушать условие транзитивности, в противном случае числовой скалярной ограниченной непрерывной функции $f\left(A\right)$ не существует и задача теряет смысл.

В общем случае множество *G* не позволяет найти наилучшую альтернативу: *G* может не задавать полный порядок (предпорядок) на множестве альтернатив $A_1\dots,A_m$.

В такой постановке задача нахождения эффективного приближения неизвестной функции $f\left(A\right)=f\left(\overline{x}\right)$, (альтернатива *A* задается вектором $\overline{x}$), а также нахождение наилучшей альтернативы из множества $A_1\dots A_m$ может быть решено методом объединяющим в себе преимущества метода группового учета аргументов и метода анализа иерархий, названной авторами методом группового учета элементов и анализа иерархий (МГУАиАИ).

Суть метода заключается в следующем:

1. Сначала реализуется метод анализа иерархий Саати – первые 5 из шести пунктов, сформулированные в начале данной статьи.

Примечание 1. Матрицы парных сравнений строятся не для всех m альтернатив (если m достаточно большое число), а только для тех (по Саати [1–2] не более 10), которые приводят к хорошо согласованным матрицам парных сравнений последнего уровня дерева иерархий). Выбор этих альтернатив из множества $A_1 K A_m$ является отдельной задачей. Возможность увеличения числа хорошо согласованных альтернатив можно получить с помощью задач оптимизации (модель 5) [7], (модели 6–7, 8-9) [9].

Примечание 2. Проблема реверса весов альтернатив, точнее установление факта ее отсутствия, может быть решена с помощью очевидных модификаций соответствующих моделей оптимизации [7–8].

Пусть $A_{i1},\ldots A_{ip}$ – альтернативы, заданные векторами $\overline{x_{i1}},\ldots \overline{x_{ip}}$, составили нижний ряд иерархии дерева Саати (рис. 1). С помощью МАИ найдены значения оценок $f\left(A_{ij}\right) = f\left(\overline{x_{ij}}\right),\ j = \overline{1, p}$.

2. Используем метод группового учета аргументов [10–12] в следующей модификации.

Как известно, частные описания на каждом ряду МГУА строятся по обучающей последовательности данных, а отбираются на следующий ряд по проверочной последовательности данных (в соответствии с заданным критерием отбора). В МГУАиАИ могут быть использованы любые алгоритмы его реализации, для которых выполнены следующие условия.

1) Обучающейся последовательностью данных являются значения $f\left(\overline{x_{ij}}\right),\ j = \overline{1, p}$, полученные с помощью метода анализа иерархий Саати.

2) Проверочной последовательностью данных служит множество *G*, которое трактуется (в случае не нарушения условий транзитивности) как множество неравенств вида $\left(f\left(\overline{x_i}\right) \text{ или } \boldsymbol{f}\left(\overline{\boldsymbol{x}_j}\right) \quad f\ \ x\left(\overline{\ }_i\right) \text{ или } \geq f\left(\overline{x_j}\right) \quad f\ \ x\left(\overline{\ }_i\right) = \left(\overline{\ }_j\right)\right) \quad i \neq j; (ij) \in I; i, j \in \left\{\overline{1, m}\right\}$.

Тогда любой критерий отбора частных описаний с предыдущего ряда на последующий ряд МГУА основан на анализе выражений

$M_{kp}^{(ij)} = \{0,\ \textit{если}\ f^{kp}\left(\overline{x_i}\right) > f^{kp}\left(\overline{x_j}\right) \textit{ или } f^{kp}\left(\overline{x}\right) \geq f^{kp}\left(x_j\right) \textit{ или } f^{kp}\left(x_i\right) = f^{kp}\left(x_j\right)$ в зависимости от типа элемента $(ij) \in I; \left| f^{kp}\left(\overline{x_i}\right) - f^{kp}\left(\overline{x_j}\right) \right|$ в противном случае $\}$

$(\ ij\ ) \in I;$ *к* – номер ряда МГУА, p – номер частного описания на *к*-том ряду МГУА. $f^{kp}\left(\overline{x}\right)$ это p – тое частное описание на *к*-том ряду МГУА.

Например, можно ввести суммарную оценку нарушения ограничений из множества *G*.

$M_2^{kp} = \frac{1}{|I|}\sum_{(ij)\in I} M_{kp}^{(ij)}$, $|I|$ – число элементов в I и на следующий уровень пропустить заданное число частных описаний предыдущего уровня с наименьшими значениями M_2^{kp}.

3) В качестве критерия остановки алгоритма может быть использован критерий остановки любой модификации метода группового учета аргументов. Учитывая специфику рассматриваемой задачи, можно предложить следующие критерии остановки:

а) Пусть M_1^{kp} – мера отклонения p – того частного описания на *к* уровне МГУА, вычисленная по обучающейся последовательности $\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\left| f\left(\overline{x_{ij}}\right) - f^{kp}\left(\overline{x_{ij}}\right) \right|$.

Тогда решение задачи – это частное описание уровня иерархии МГУА с минимальным номером на котором достигается $M_{kp}^{1} = M_{kp}^{2} = 0$.

б) Решение задачи – частное описание уровня иерархии МГУА с минимальным номером на котором достигается локальный минимум функции $\min_p M_1^{kp}$ при условии, что $M_2^{kp} = 0$.

в) Решение – частное описание уровня иерархии МГУА с минимальным номером на котором достигается локальный минимум функции $\min_p\left\{a_1 M_1^{kp} + a_2 M_2^{kp}\right\}$ a_1, $a_2 > 0$ – весовые коэффициенты.

Примечание. Возможна ситуация при которой существуют несколько наборов альтернатив

$\left\{A_{i_1}^e, \dots A_{i_{ke}}^e\right\}$ $e = \overline{1, L}$ $\forall A_{ij}^e \in \{A_1, \dots, A_m\}$, для каждой из которых выполняется:

1) имеют общие альтернативы;

2) Каждому набору альтернатив соответствуют хорошо согласованные матрицы парных сравнений последнего уровня дерева иерархий;

3) для любых двух произвольных наборов альтернатив существует не менее одного критерия предпоследнего уровня иерархии МАИ (рис. 1); не менее одной общей альтернативы, веса которой, найденные по двум соответствующим матрицам парных сравнений являются различными. Т.е. присутствует эффект реверса весов альтернатив.

В этом случае в МГУАиАИ предлагается в качестве обучающей последовательности использовать поочередно все наборы ($e = \overline{1, L}$) альтернатив, а решение задачи соответствует тому набору альтернатив, на котором достигается наилучшее значение критерия остановки, определяемое по трем параметрам *к*, M_1^{kp}, M_2^{kp}.

Список используемой литературы

1. *Saaty T.L.* Multycriteric Decision Making. The Analytic Hierarchy Process,

McGraw Hill International. – New York, 1980. Translated to Russian, Portuguese, and Chinese. Revised edition, Paperback. – Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990,1996.
2. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем: Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе: Под ред. И.А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1991. – 223 с.
3. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Tomas Saaty. The Analytic Hierarchy Process. –Пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе. – М.: Радио и связь, 1993. – 315 с.
4. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. – Киев: Наукова думка. – 2002. – 381 с.
5. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятие решений. – М.:Логос, 2000.
6. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Анализ, синтез, планирование решений в экономике. – Москва: Финансы и статистика. – 2001.
7. *А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.Н. Кут* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов в методе парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. №2.
8. *А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.Н. Кут* Математические модели оптимизации для обоснования и нахождения весов объектов по неоднородным матрицам парных сравнений. Системні дослідження та інформаційні технології 2007р. №3
9. *А.А. Павлов, Е.И. Лищук, В.Н. Кут* Многокритериальный выбор в задаче обработки данных матрицы парных сравнений. Вісник НТУУ „КПІ” Інформатика, управління та обчислювальна техніка, Київ 2007р. №46.
10. *Ивахненко А.Г., Мюллер И.А.* Самоорганизация прогнози-рующих моделей. Киев. Техника 1985г.
11. *Ивахненко А.Г.* Моделирование сложных систем. Киев. Высшая школа, 1997г.
12. *Ивахненко А.Г., Юрочковский Ю.В.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным М. Радио и связь 1986 г.