

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО ФЛУКТУАЦИОННОГО АНАЛИЗА

В работе проведено численное исследование метода мультифрактального детрендрованного флуктуационного анализа на модельных реализациях самоподобных и мультифрактальных процессов. Показано, что для реализаций небольшой длины выборочные мультифрактальные характеристики обладают существенными погрешностями, что может приводить к ошибочной интерпретации численных результатов. Проведен мультифрактальный анализ температурных рядов по городу Киеву. Показано наличие временных интервалов с антиперсистентной и персистентной зависимостью.

The study of applicability of the Multifractal Detrended Fluctuation Analysis in proper detecting of mono- and multifractal character of data is performed. Shown that the estimated multifractal characteristics obtained by time series of a short length have errors. This can lead to misinterpretation of the numerical results. The multifractal analysis of the temperature series of Kiev is performed.

### 1. Введение

В настоящее время стало общепризнанным, что многие информационные, биологические, физические, технологические процессы обладают сложной фрактальной структурой. Фрактальный анализ используется для моделирования, анализа и контроля сложных систем в различных областях науки и техники. В частности, в геологии – для прогнозирования сейсмической активности и цунами, определения возраста геологических пород; в биологии и медицине – для диагностики заболеваний и физиологического состояния по записям ЭКГ и ЭЭГ, при исследовании мутаций и изменений на генетическом уровне; в экономике – для прогнозирования кризисных ситуаций и оценивания риска по финансовым рядам; в физике – для исследования турбулентности и термодинамических процессов. Этот список далеко не полон. [1-4]

Процессы, обладающие фрактальными свойствами, можно разделить на две группы: самоподобные (монофрактальные) и мультифрактальные. Монофрактальные процессы являются однородными в том смысле, что их скейлинговые характеристики остаются неизменными на любом диапазоне масштабов и обладают одним показателем скейлинга. Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными масштабными свойствами и характеризуются спектром скейлинговых показателей.

Одним из самых популярных инструментов мультифрактального анализа является метод детрендрованного флуктуационного анализа,

который базируется на идеологии одномерных случайных блужданий и широко используется при анализе временных рядов различной природы. Ориентированный на обработку рядов с трендовыми составляющими, детрендрованный флуктуационный анализ является мощным инструментом статистического описания нестационарных процессов. [5,6]

В настоящее время проведен ряд исследований, направленных на изучение статистических свойств данного метода [5,7,8]. Однако в большинстве работ рассмотрены модельные реализации больших длин – более десятка тысяч значений. В этом случае выборочные характеристики достаточно близки к теоретическим. В тоже время, временные ряды, полученные на практике, имеют значительно меньший диапазон значений.

Целью представленной работы является численное исследование метода мультифрактального флуктуационного анализа на модельных реализациях самоподобных и мультифрактальных процессов небольшой длины и применение этого метода для анализа экспериментальных данных.

### 2. Характеристики фрактальных и мультифрактальных множеств

Самоподобие фрактальных объектов заключается в сохранении структуры объекта при изменении масштаба. Рассмотрим основные характеристики мультифрактального множества [9]. Пусть в общем случае мультифрактальный объект занимает некоторую ограниченную область в  $d$ -мерном Евклидовом про-

странстве и определяет собой множество из  $N \rightarrow \infty$  точек. Разобьем всю область на кубические ячейки с ребром  $\varepsilon$  и объемом  $\varepsilon^d$ . Рассмотрим обобщенную статистическую сумму  $Z(q, \varepsilon)$ , характеризуемую показателем степени  $q$ , который может принимать любые значения в интервале  $-\infty < q < +\infty$ :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1)$$

где  $p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$ ,  $n_i(\varepsilon)$  – количество точек, попавшее в ячейку с номером  $i$ ,  $N(\varepsilon)$  – суммарное количество занятых ячеек, которое зависит от размера ячейки  $\varepsilon$ . Вероятности  $p_i$  характеризуют относительную заселенность ячеек.

В общем случае мультифрактальное множество характеризуется некоторой нелинейной функцией  $\tau(q)$ , определяющей поведение статистической суммы  $Z(q, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$Z(q, \varepsilon) \propto \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (2)$$

Функция  $\tau(q)$  обычно называется скейлинговой экспонентой и определяется как

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (3)$$

В случае однородного фрактального множества с фрактальной размерностью  $D$  во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек, т.е.,  $p_i(\varepsilon) = p(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$ , и обобщенная статистическая сумма принимает вид:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon) = \varepsilon^{-D(1-q)},$$

а функция  $\tau(q) = (q-1)D$  является линейной. Если распределение точек по ячейкам не одинаково, то фрактальное множество является неоднородным, т.е. мультифрактальным, и  $\tau(q)$  является нелинейной функцией. При  $q \rightarrow +\infty$  основной вклад в обобщенную статистическую сумму вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц  $n_i$  и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью заполнения  $p_i$ . Наоборот, при  $q \rightarrow -\infty$  основной вклад в сумму дают самые разреженные ячейки с малыми значениями  $p_i$ . Таким образом, функция  $\tau(q)$  показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек.

Наряду со скейлинговой экспонентой  $\tau(q)$  для характеристики мультифрактального множества используется функция мультифракталь-

ного спектра (спектра сингулярностей)  $f(\alpha)$ . Зависимость вероятности от размера ячейки  $p_i(\varepsilon)$  имеет степенной характер

$$p_i(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (4)$$

где  $\alpha_i$  – представляет собой некоторый показатель степени, вообще говоря разный, для разных ячеек (показатель сингулярности). Для однородного фрактала все показатели степени  $\alpha_i$  одинаковы и равны фрактальной размерности  $D$ .

Функция мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  характеризует распределение вероятностей различных значений  $\alpha_i$ . Если величина  $n(\alpha)d\alpha$  является вероятностью того, что  $\alpha_i$  находится в интервале  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ , т.е. представляет собой число ячеек  $i$ , обладающих одинаковой мерой  $p_i(\varepsilon)$  с  $\alpha_i \in (\alpha, \alpha + d\alpha)$ , тогда

$$n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}. \quad (5)$$

Таким образом, функция  $f(\alpha)$  представляет собой фрактальную размерность некоего однородного фрактального подмножества  $\xi_\alpha$  из исходного множества  $\xi$ , характеризуемого одинаковыми вероятностями заполнения ячеек  $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^\alpha$ .

Учитывая выражения (1) и (5), обобщенную статистическую сумму  $Z(q, \varepsilon)$  можно выразить через функцию мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  следующим образом:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \int d\alpha n(\alpha) \varepsilon^{q\alpha} \approx \int d\alpha \varepsilon^{q\alpha - f(\alpha)}.$$

Формально переход от переменных  $\{q, \tau(q)\}$  к переменным  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  может быть осуществлен при помощи следующих преобразований Лежандра:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{d\tau}{dq} \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = \frac{df}{d\alpha} \\ \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f \end{array} \right. \quad (6)$$

### 3. Характеристики самоподобных и мультифрактальных случайных процессов

Самоподобие случайных процессов заключается в сохранении статистических характеристик при изменении масштаба времени. Стохастический процесс  $X(t)$  является самоподобным с параметром самоподобия  $H$ , если про-

цесс  $a^{-H} X(at)$  описывается теми же конечно-мерными законами распределений, что и  $X(t)$ :

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\{a^{-H} X(at)\}, \forall a > 0, t > 0. \quad (7)$$

Параметр  $H$ ,  $0 < H < 1$ , называемый показателем Херста, представляет собой степень самоподобия. Наряду с этим свойством, показатель  $H$  характеризует меру долгосрочной зависимости стохастического процесса [1,2,10].

При значениях  $0.5 < H < 1$  ряд демонстрирует персистентное (трендоустойчивое) поведение. Если персистентный ряд возростал (убывал) в предыдущий период, то чем ближе показатель Херста к 1, тем с большей вероятностью будет сохраняться тенденция поведения этого ряда в течение такого же периода в будущем. Значение  $H = 0.5$  указывает на независимость (отсутствие какой-либо памяти о прошлом) приращений временного ряда. Диапазон  $0 < H < 0.5$  соответствует антиперсистентным рядам: если антиперсистентный ряд характеризовался ростом в предыдущем периоде, то чем ближе показатель Херста к 0, тем с большей вероятностью в следующем периоде начнется спад.

Легко показать, положив  $a = 1/t$ , что для самоподобного процесса выполняется следующее равенство:

$$\text{Law}\{X(t)\} = \text{Law}\left\{\left(\frac{1}{t}\right)^{-H} X(1)\right\} = \text{Law}\{t^H X(1)\}. \quad (8)$$

Учитывая (8), начальные моменты самоподобного случайного процесса можно выразить как

$$\begin{aligned} M\left[|X(t)|^q\right] &= M\left[|t^H X(1)|^q\right] = \\ &= t^{qH} M\left[|X(1)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qH}, \end{aligned} \quad (9)$$

где величина  $C(q) = M\left[|X(1)|^q\right]$ .

Мультифрактальные процессы проявляют более гибкие скейлинговые закономерности для моментных характеристик. В отличие от самоподобных процессов, где все моменты  $M\left[|X(t)|^q\right]$  показывают одинаковое масштабное поведение, для мультифрактальных процессов выполняется отношение

$$M\left[|X(t)|^q\right] = C(q) \cdot t^{qh(q)}, \quad (10)$$

где  $h(q)$  – обобщенный показатель Херста, являющийся нелинейной функцией, для которой значение  $h(q = 2)$  совпадает со значением сте-

пени самоподобия  $H$ . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному процессу, обобщенный показатель Херста  $h(q) = H$  и не зависит от параметра  $q$ .

Обобщенный показатель Херста связан с функцией  $\tau(q)$  соотношением [4,5]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1. \quad (11)$$

Определение функции мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  случайного процесса производится по формулам (6).

### 3. Метод мультифрактального детрендированного флуктуационного анализа

При оценивании параметра  $H$  для самоподобных временных рядов используется метод детрендированного флуктуационного анализа (ДФА) [6,10]. В этом случае для исходного временного ряда  $x(t)$  строится кумулятивный

ряд  $y(t) = \sum_{i=1}^t x(i)$ , который разбивается на  $N$  сегментов длиной  $s$ . Для каждого сегмента  $y(t)$  вычисляется флуктуационная функция

$$F^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{t=1}^s (y(t) - Y_m(t))^2, \quad (12)$$

где  $Y_m(t)$  – локальный  $m$ -полиномиальный тренд в пределах данного сегмента.

Функция  $F(s)$  усредняется по всему ряду  $y(t)$ . Такие вычисления повторяются для различных размеров сегментов, чтобы получить зависимость  $F(s)$  в широком диапазоне значений параметра  $s$ . Для процессов с фрактальными свойствами с ростом  $s$  функция  $F(s)$  также возрастает, и линейная зависимость  $\log F(s)$  от  $\log s$  свидетельствует о наличии свойства масштабной инвариантности:

$$F(s) \propto s^H. \quad (13)$$

При исследовании свойств мультифрактальных процессов применяется мультифрактальный флуктуационный анализ (МФДФА) [5-8]. При проведении МФДФА исследуется зависимость флуктуационной функции  $F_q(s)$  от параметра  $q$ :

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [F^2(s)]^{\frac{q}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad (14)$$

полученной возведением выражения (12) в степень  $q$  и последующим усреднением по всем сегментам.

Изменяя временную шкалу  $s$  при фиксированном показателе  $q$ , находим зависимость  $F_q(s)$ , представляя её в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к мультифрактальному множеству, проявляющему долгосрочные зависимости, то флуктуационная функция  $F_q(s)$  представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (15)$$

с функцией обобщенного показателя Херста  $h(q)$ . Из определений (12) и (14) следует, что при  $q = 2$  этот показатель сводится к обычному значению  $H$ . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция  $F_q(s)$  одинакова для всех сегментов, и обобщенный показатель Херста  $h(q) = H$  не зависит от параметра  $q$ . Для мультифрактальных рядов  $h(q)$  является нелинейной функцией: при положительных  $q$  основной вклад в функцию  $F_q(s)$  дают сегменты, проявляющие большие отклонения  $F^2(s)$ , а при отрицательных  $q$  доминируют сегменты с малыми дисперсиями  $F^2(s)$ . Таким образом, при отрицательных значениях  $q$  обобщенный показатель Херста  $h(q)$  описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

#### 4. Исследование характеристик модельных реализаций

В работе представлены результаты численного эксперимента, в ходе которого моделировались реализации трех типов фрактальных стохастических процессов: фрактального броуновского движения (монофрактальный процесс),  $\alpha$ -устойчивого процесса (бифрактальный) и биномиального каскада (мультифрактальный). Длина реализаций была выбрана равной 256, 512, 1024 и 2048 значений. Для каждого сгенерированного временного ряда методом МФДФА рассчитывалась мультифрактальные характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$ , которые потом усреднялись по множеству реализаций. Значения параметра  $q$  изменялись в диапазоне  $-5 \leq q \leq 5$ .

**Фрактальное броуновское движение.** Одной из наиболее известных и простых моделей самоподобного процесса является фрактальное броуновское движение (ФБД) [1,2]. Гауссовский процесс  $X(t)$  называется фрактальным броуновским движением с параметром  $H$ ,  $0 < H < 1$ , если приращения случайного процесса  $\Delta X(\tau) = X(t + \tau) - X(t)$  имеют распределение вида

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2\tau^{2H}}} \cdot \int_{-\infty}^x \text{Exp} \left[ -\frac{z^2}{2\sigma_0^2\tau^{2H}} \right] dz,$$

где  $\sigma_0$  – коэффициент диффузии.

ФБД с параметром  $H = 0.5$  совпадает с классическим броуновским движением. Приращения ФБД называются фрактальным гауссовским шумом, дисперсия которого подчиняется соотношению  $D[X(t + \tau) - X(t)] = \sigma_0^2 \tau^{2H}$ .

На рис. 1 показана реализация ФБД при значении параметра  $H=0.8$  длиной 1000 значений и соответствующая ей реализация фрактального гауссовского шума.

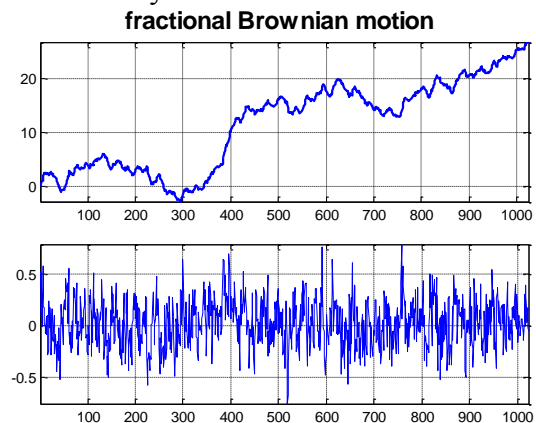


Рис. 1. Реализация ФБД (вверху) и ряд приращений (внизу)

ФБД является монофрактальным процессом, его скейлинговые характеристики полностью определяются значением показателя Херста  $H$ .

$$h(q) = H; \quad \tau(q) = qH - 1;$$

$$\begin{cases} \alpha = H \\ f(\alpha) = 1 \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 2 - 4 представлены функция обобщенного показателя Херста, скейлинговая экспонента и мультифрактальный спектр, полученные по реализациям ФБД разной длины с параметром  $H = 0.8$ . Пунктирной линией на графиках  $h(q)$  и  $\tau(q)$  показаны теоретические значения.

Функция  $\tau(q)$  визуально очень близка к линейной. Для наглядности значения  $\tau(q)$  приве-

дены в диапазоне  $4 \leq q \leq 5$ . Мультифрактальный спектр  $f(\alpha)$  представляет собой точку  $(0.8, 1)$ .

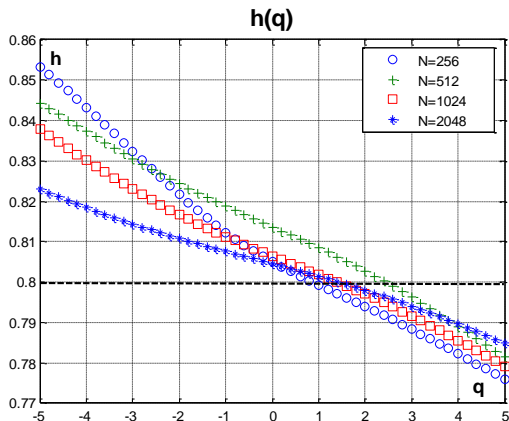


Рис. 2. Функция  $h(q)$  для реализаций ФБД

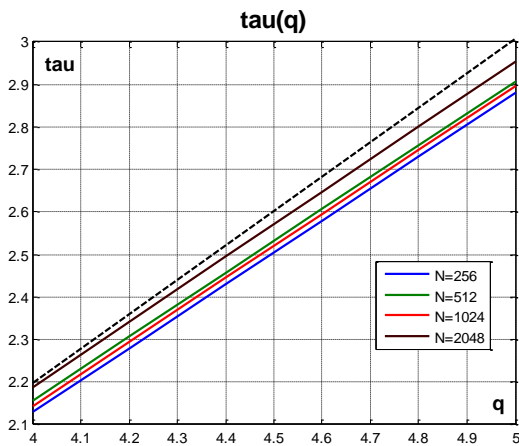


Рис. 3. Функция  $\tau(q)$  для реализаций ФБД

Очевидно, что с увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям. Однако при небольшом числе значений во временном ряде его характеристики  $h(q)$  и  $f(\alpha)$  демонстрируют мультифрактальные свойства.

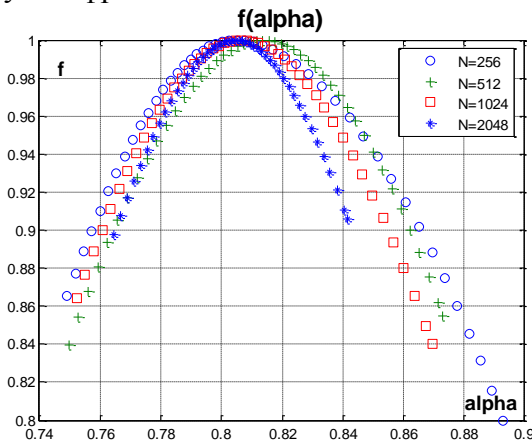


Рис. 4. Функция  $f(\alpha)$  для реализаций ФБД

В работах [11,12] отмечается, что одним из недостатков оценивания мультифрактального спектра является то, что оценивается верхняя

огibaющая истинного спектра. Это может приводить к неправильной интерпретации численных результатов, поскольку при истинном дискретном спектре  $f(\alpha)$ , полученная огibaющая будет включать множество ложных точек. Поэтому в случае рядов небольшой длины возникает необходимость проведения дополнительных исследования для подтверждения наличия мультифрактальных свойств.

**$\alpha$  – устойчивый процесс с независимыми приращениями.** Случайные величины с устойчивыми законами распределений играют большую роль в моделировании экономических и информационных процессов. В общем случае, для  $\alpha$ -устойчивых распределений в явном виде может быть записана только характеристическая функция  $\varphi(t) = M[e^{itX}]$ . Характеристическая функция устойчивой случайной величины  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  с параметрами  $0 < \alpha \leq 2$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $-1 \leq \beta \leq 1$  и  $\mu \in R$  имеет вид [13]:

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \left(1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|\right) + i\mu t, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Параметр  $\alpha$  называется индексом устойчивости и определяет, насколько выражен тяжелый хвост распределения. При  $0 < \alpha < 2$  случайные величины имеют бесконечную дисперсию, а при  $0 < \alpha \leq 1$  обладают бесконечным средним. Параметр смещения  $\beta$  задает степень асимметричности распределения, величина  $\sigma$  выражает степень разброса значений относительно среднего значения,  $\mu$  при  $\alpha > 1$  равно математическому ожиданию величины  $X$ .

Случайный процесс является  $\alpha$  – устойчивым процессом, если его конечномерные распределения являются устойчивыми случайными величинами.

На рис. 5 показан временной ряд, приращениями которого являются независимые случайные величины с параметром  $\alpha = 1.2$ :  $X_i \sim S_{1.2}(1, 0, 0)$ .

Для  $\alpha$  – устойчивого процесса с независимыми приращениями выполняется равенство:

$$\text{Law}\{X(at)\} = \text{Law}\{a^{1/\alpha} X(t)\}, \forall a > 0, t > 0. \quad (17)$$

Сравнивая выражения (7) и (17), понятно, что  $\alpha$  – устойчивого процессы обладают свойствами самоподобия. Показано [14], что такие процессы являются бифрактальными. Соответствующие характеристики имеют вид:

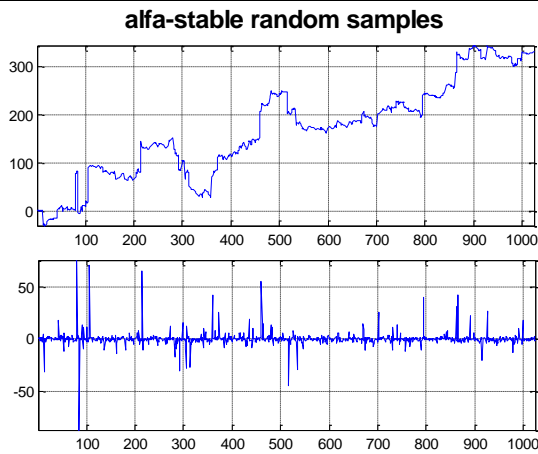


Рис. 5. Реализация устойчивого процесса (вверху) и ряд приращений (внизу)

$$h(q) = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L \\ 1/q & q > \alpha_L \end{cases}; \tau(q) = \begin{cases} q/\alpha_L - 1 & q \leq \alpha_L \\ 0 & q > \alpha_L \end{cases};$$

$$\alpha = \begin{cases} 1/\alpha_L & q \leq \alpha_L \\ 0 & q > \alpha_L \end{cases}, \quad (18)$$

$$f(\alpha) = \begin{cases} 1 & q \leq \alpha_L \\ 0 & q > \alpha_L \end{cases}$$

где величина  $\alpha_L$  в данном случае обозначает индекс устойчивости.

На рис. 6 - 8 представлены мультифрактальные характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$ , полученные по реализациям устойчивого процесса разной длины с параметром  $\alpha_L = 1.2$ . Реализации такого процесса имеют теоретическую бесконечную дисперсию и являются самоподобными с показателем Херста  $H = \frac{1}{\alpha_L} = \frac{5}{6}$ .

Пунктирной линией на графиках  $h(q)$  и  $\tau(q)$  показаны теоретические значения. Мультифрактальный спектр представляет собой две точки на плоскости  $\{\alpha, f(\alpha)\}$ :  $(0, 0)$  и  $(5/6, 1)$ .

В спектре  $f(\alpha)$ , как и в случае оценивания характеристик для ряда броуновского движения, характерно наличие ложных точек, что может привести к неправильным выводам о мультифрактальных свойствах реализаций.

**Биномиальный каскад.** Простейшей моделью мультифрактального процесса с заданными свойствами является биномиальный каскад [1-4]. При его построении первоначальный единичный отрезок делится на два равных интервала, которым приписываются весовые коэффициенты  $p_1$  и  $p_2 = 1 - p_1$  соответственно. Затем с каждым из интервалов проделывается аналогичная процедура. В результате на втором

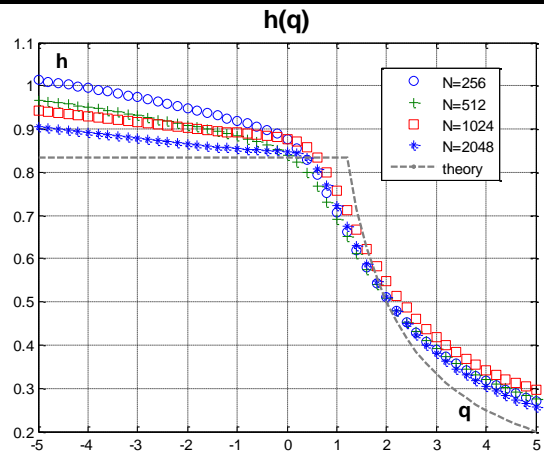


Рис. 6. Функция  $h(q)$  для реализаций  $\alpha$  – устойчивого процесса

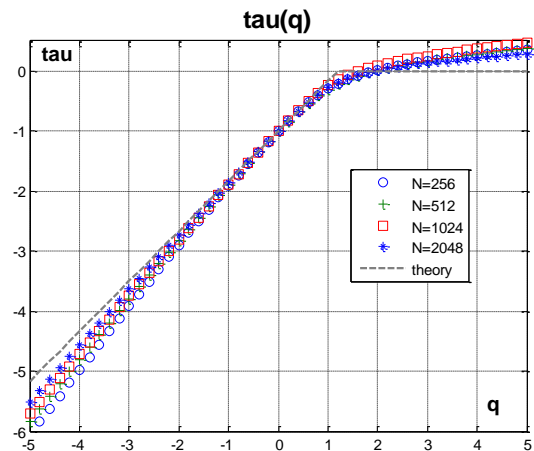


Рис. 7. Функция  $\tau(q)$  для реализаций  $\alpha$  – устойчивого процесса

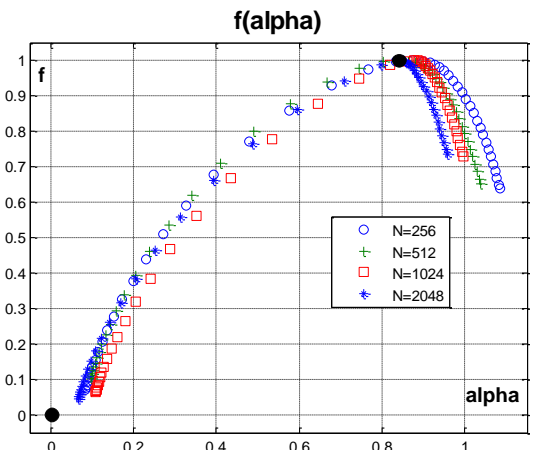
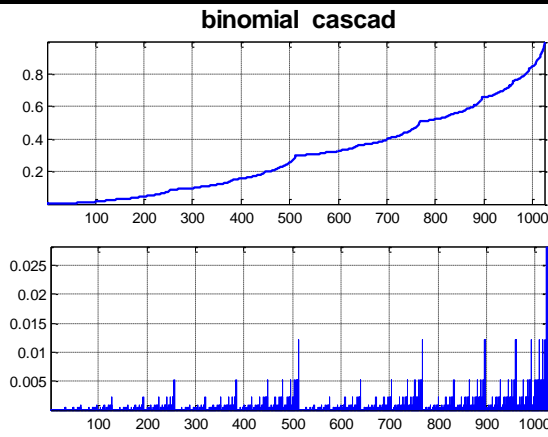


Рис.8. Функция  $f(\alpha)$

для реализаций  $\alpha$  – устойчивого процесса шаге имеется 4 интервала с весовыми коэффициентами  $p_1^2, p_1 p_2, p_2 p_1$  и  $p_2^2$ . При числе шагов  $n \rightarrow \infty$  и  $p_1 \neq p_2$  мы приходим к неоднородному фрактальному множеству. На рис. 9 показан временной ряд значений биномиального каскада при  $p_1 = 0.7$  и  $n = 10$ , т.е. длиной реализации равной  $2^{10}$  значений и соответствующий кумулятивный ряд.



**Рис. 9. Реализация биномиального каскада (вверху) и кумулятивный ряд (внизу)**

Характеристики  $h(q)$ ,  $\tau(q)$  и  $f(\alpha)$  для биномиального мультифрактального процесса зависят только от весовых коэффициентов  $p_1$  и  $p_2$  и определяются аналитически:

$$h(q) = \left( \frac{1}{q} - \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{q \ln 2} \right); \tau(q) = \frac{-\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2} \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= - \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{\ln 2 (p_1^q + p_2^q)} \\ f(\alpha) &= - \frac{q}{\ln 2} \frac{p_1^q \ln(p_1) + p_2^q \ln(p_2)}{(p_1^q + p_2^q)} + \frac{\ln(p_1^q + p_2^q)}{\ln 2} \end{aligned} \right.$$

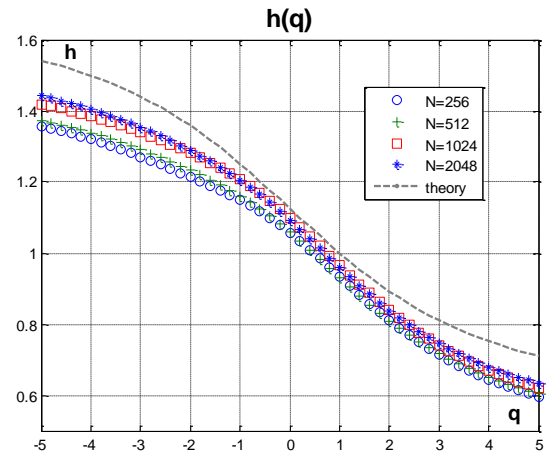
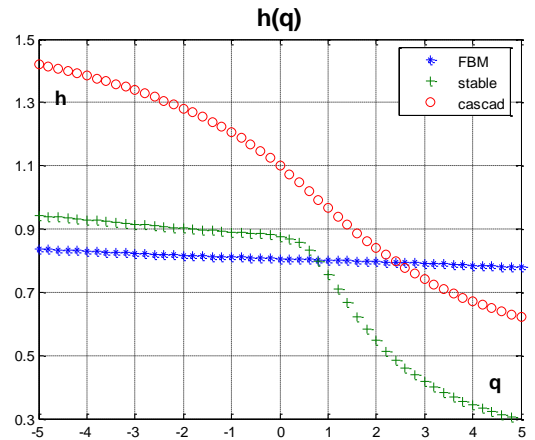
На рис. 10 - 12 представлены мультифрактальные характеристики, полученные по реализациям биномиального каскада разной длины с коэффициентом  $p_1 = 0.7$ . Пунктирной линией на графиках показаны теоретические значения.

С увеличением длины реализации выборочные характеристики стремятся к своим аналитическим значениям. При небольшом числе значений во временном ряде его характеристики демонстрируют смещение диапазона значений.

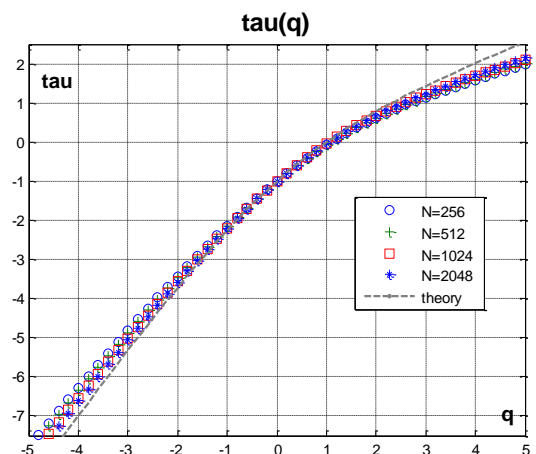
Обобщая результаты проведенного мультифрактального анализа, возникает необходимость дальнейших исследований и построения доверительных интервалов для выборочных характеристик, что позволит принимать или отвергать гипотезы о наличии моно- и мультифрактальных свойств. На рис. 13 - 14 представлены выборочные функции  $h(q)$  и  $f(\alpha)$ , рассмотренные выше полученные по реализациям длиной 1024 значения. Построение скейлинговой экспоненты  $\tau(q)$  не дает наглядной информации о различиях фрактальных свойств.

На совместном графике различия между моно- и мультифрактальными характеристиками

проявляются наглядно. Поэтому имеет смысл при анализе экспериментальных данных рассматривать полученные выборочные характеристики совместно с аналогичными выборочными характеристиками модельных процессов.



**Рис.10. Функция  $h(q)$  для реализаций биномиального каскада**



**Рис. 11. Функция  $\tau(q)$  для реализаций биномиального каскада**

Хорошо известно, что многие временные ряды, отвечающие природным явлениям, имеют самоподобную структуру. К таким явлениям относятся разливы рек, количество выпавших

осадков, изменение температуры, увеличение диаметра колец деревьев. Почти все они являются персистентными. [1-3]

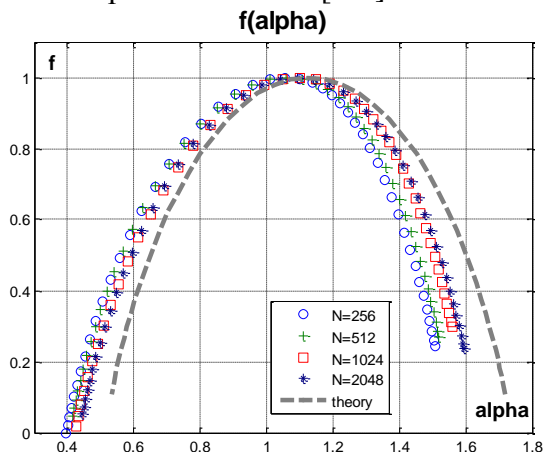


Рис. 12. Функция  $f(\alpha)$  для реализаций биномиального каскада

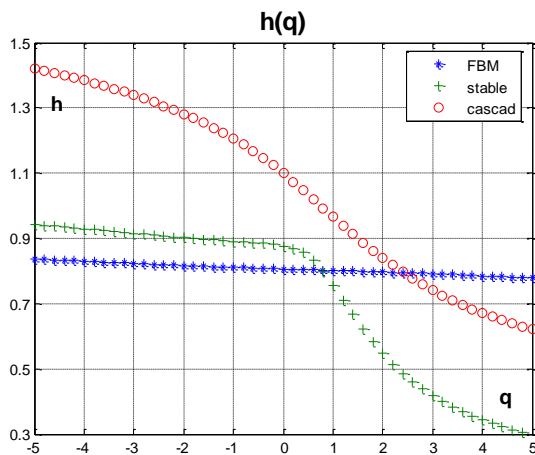


Рис. 13. Функции  $h(q)$  для реализаций ФБД,  $\alpha$  – устойчивого процесса. биномиального каскада

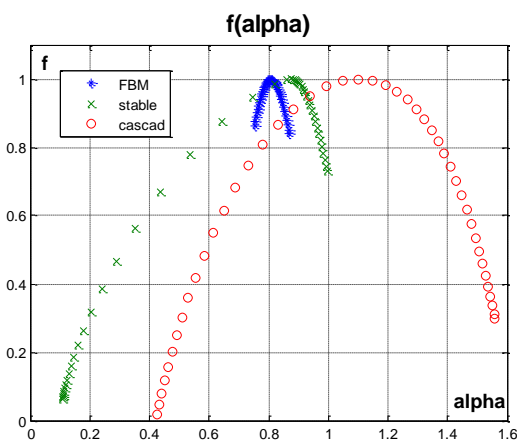


Рис. 14. Функции  $f(\alpha)$  для реализаций ФБД,  $\alpha$  – устойчивого процесса. биномиального каскада

### 6. Исследование температурных рядов

В данной работе рассмотрены ряды ежедневной температуры (максимальное, минимальное и среднее значения) по городу Киеву за 50 лет с 1942 по 1992 годы. Данные взяты на специализированном сайте [15]. На рис.15 показан фрагмент температурного ряда за 1952-1956 гг. (вверху) и соответствующий ряд ежедневных приращений (внизу).

Перед проведением мультифрактального анализа, необходимо исследовать флуктуационную функцию  $F(\tau)$ , определяемую

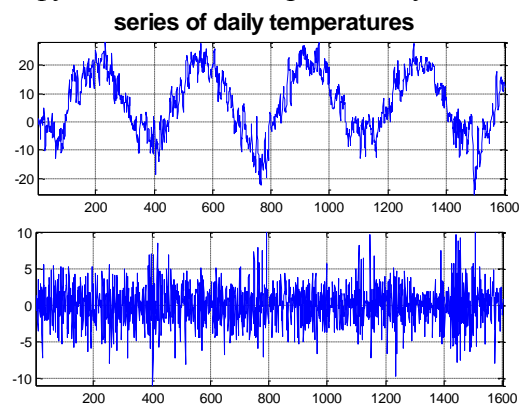
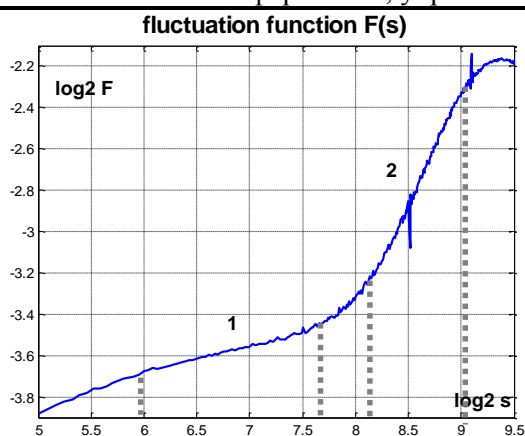


Рис. 15. Ряд ежедневных температур и ряд ежедневных приращений

формулой (2). Самоподобному поведению отвечает наличие участка с линейной зависимостью. Если функция  $F(\tau)$  имеет несколько линейных участков, это предполагает наличие нескольких скейлингов для различных временных интервалов [10]. На рис.16 приведен график  $F_2(s)$ , построенной на временном интервале от  $2^5$  (месяц) до  $2^{9.5}$  (два года) дней. Визуально очевидно, что график имеет два близких к линейным участка с разными углами наклона. Стоит отметить сильный выброс на втором участке, который соответствует значению аргумента  $2^{8.5}$  и практически равен одному году, что отвечает годовой сезонной составляющей процесса.

Мультифрактальный анализ был проведен отдельно для каждого участка. Для первого участка параметр Херста  $H = 0.21$ , для второго  $H = 0.92$ . На рис. 17 показаны функции мультифрактального спектра для обоих участков.





**Рис.16.** Флуктуационная функция  $F_2(s)$  для температурного ряда

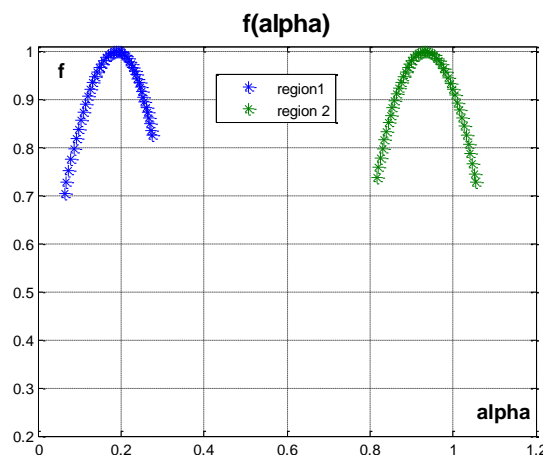
Таким образом, можно сделать вывод, что на интервалах от двух месяцев до полугода (участок 1) ряд температурной зависимости является антиперсистентным, а при временных значениях от полугода до полутора лет (участок 2), ряд обладает сильной долгосрочной зависимостью.

Учитывая большое число значений временного ряда, можно предположить наличие мультифрактальных свойств.

### 9. Заключение

В работе рассмотрено исследование выборочных мультифрактальных характеристик, полученных методом мультифрактального флуктуационного анализа, по реализациям самоподобных и мультифрактальных процессов не-

большой длины. Показано, что для реализаций с теоретическим дискретным мультифрактальным спектром в выборочном спектре появляются дополнительные ложные значения, что может приводить к ошибочной интерпретации результатов.



**Рис. 17.** Функции  $f(\alpha)$  для участков антиперсистентной и персистентной зависимости

Проведен фрактальный анализ температурных рядов по городу Киеву за 50 лет. Показано наличие временных интервалов с антиперсистентной и персистентностью зависимости.

Автор выражает большую благодарность профессору Горбаню И.И. за проявленный интерес и полезные обсуждения свойств фрактальных случайных процессов.

### Список литературы

1. Федер Е. Фракталы / Е. Федер – М.: Мир, 1991. – 254 с..
2. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с..
3. Шредер М. Фракталы, хаос и степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая. / М.Шредер. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 528 с.
4. Riedi R.H. Multifractal processes, in Doukhan P., Oppenheim G., Taqqu M.S. (Eds.), Long Range Dependence: Theory and Applications, p. 625–715, Birkhuser. 2002.
5. Kantelhardt J.W. Multifractal detrended fluctuation analysis of non-stationary time series / J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, A. Bunde, S. Havlin, E. Koscielny-Bunde, H.E. Stanley // Physica A. – 2002. – № 316. – P. 87-114.
6. Kantelhardt J.W. Fractal and Multifractal Time Series. – 2008 [Электронный ресурс]: <http://arxiv.org/abs/0804.0747>
7. Олемской А.И. Мультифрактальный анализ временных рядов / А.И. Олемской, В.Н. Борисюк, И.А. Шуда // Вісник СумДУ. Серія «Фізика, математика, механіка». – 2008. – №2. – С.70-81.
8. Oswiecimka P. Wavelet versus detrended fluctuation analysis of multifractal structures / P. Oswiecimka, J. Kwapin, S.Drozd // Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. - Vol. 74. -2006. -P. 161-203.
9. Божокин С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». – 2001. – 128 с.

10. Kantelhardt J.W. Detecting long-range correlations with detrended fluctuation analysis / J.W. Kantelhardt, E. Koscielny-Bunde, H.H.A. Rego, S. Havlin, A. Bunde // *Physica A*. – 2001. – № 295. – P. 441-454.
11. Павлов А.Н. Мультифрактальный анализ сигналов / А.Н. Павлов, В.С. Анищенко // *Известия Саратовского университета. Серия «Физика»*. - 2007. -Т. 7. -Вып. 1.-С.3-25
12. Veneziano D. Multifractal analysis: pitfalls of standard procedures and alternatives / D. Veneziano, G.E. Moglen, R.L. Bras // *Phys. Rev. E*. -1995. -V.52. - P.1387–1398.
13. Borak S. Stable distributions / Borak, S., W. Hardle, R. Weron in *Statistical tools for finance and insurance*. Berlin: Springer. -2005. -P. 21-44
14. Nakao H Multi-scaling properties of truncated Levy flights / H. Nakao // *Phys. Lett. A*. – 2000. –V.266 –P. 282-289
15. Архив погоды по городам СНГ [Электронный ресурс]: [http://thermo.karelia.ru/weather/w\\_history.php](http://thermo.karelia.ru/weather/w_history.php)