УДК 519.6:512.972

МИНАЕВ Ю.Н,
КЛИМЕНКО И.А.,
ФИЛИМОНОВА О.Ю.,
МИНАЕВА Ю.И.

«МЯГКИЕ» ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ МОДЕЛЕЙ КРОНЕКЕРОВОЙ (ТЕНЗОРНОЙ) АЛГЕБРЫ

Рассматриваются вопросы представления объекта в условиях неопределенности, в том числе представления нечеткой переменной в виде нечеткого множества в форме тензорной модели двух видов: Кронекерово (тензорное) произведение значения и функции принадлежности и многомерный массив. Показана рациональность применения тензорного подхода (базиса) к моделированию неопределенности, дающему возможность исключить при анализе функцию принадлежности. Приведены примеры реализации операций нечеткой математики в тензорном базисе как процедуры «мягких» вычислений.

We consider the questions of presentation of object in conditions of uncertainty, including fuzzy variable, present in the manner of the fuzzy set, in the form a tensor's models of two types: Kronecker (tensor) product a value by membership and multivariate array. We are Shown rationality of using an tensor approach (base) to modeling of uncertainty, enable exclude at the analysis a membership function. Examples to realization of operations fuzzy mathematicians as procedures "soft" calculations are cited.

Введение

Управление в условиях неопределенности представляет ключевую проблему современной теории и практики управления. Предложенная Л. Заде парадигма – теория нечетких множеств (ТНМ) – позволила решить ряд прикладных задач [1]. Обобщенное понятие неопределенности впервые рассмотрено в работах М. Блэка [2]. Функции принадлежности (ФП) позволили *объективно* представить *субъективно* определенные объекты и тем самым расширить возможности применения (принцип нечеткого расширения (ПНР)) стандартных методов и моделей к условиям неопределенности. Недостаточность ФП с точки зрения представления неопределенности была показана практически одновременно с созданием теории НМ.

В работах [3, 4] предложены т.н. *интуиционистские* НМ (*IFS*), определяемые на универсуме *U*: *IFS* над *U* – множество упорядоченных троек: элемент универсума, степень членства *M*, степень не-членства *N* так что $M + N \leq 1$ и $M, N \in [0, 1]$. Когда M + N = 1 получаем НМ, и если M + N < 1 есть неопределенность [4], которая равна $I = 1 - M - N$. На основании упорядоченных троек *IFS* дополнительно предложены несколько обобщений НМ. В последнее время применение ТНМ расширилось настолько, что возникли сомнения в правомочности такого подхода. В работе [5] отмечено, что теория НМ « *... наиболее успешно используется там и тогда, где и когда нечеткость порождается присутствием человека и его разума»*.

Предложенная Л. Заде ФП требует безусловного определения методов ее получения и операции над ними. В целом ряде случаев ФП получить или невозможно или ее эвристическая формулировка не отражает объективных условий явления или процесса. «Следствием этой недосказанности служит «зоопарк» операций над нечеткими множествами, за последние годы разросшийся в рамках этой теории до неприличных размеров…» [5]. В работах Г. Крона [6] показано, что представление объекта исследования (измерения) в виде тензора есть более адекватным, чем в виде величины. Тензорная модель позволяет анализировать объект в разных системах координат, понимая под системами не только декартовы (прямоугольные или косоугольные, прямолинейные или непрямолинейные) координаты, но и точки зрения. Является естественным и закономерным рассмотреть неопределенность, наложив минимальные ограничения на ее сущность, не прибегая к дополнительным эвристикам типа ФП или ПНР, на уровне тензорных моделей.

Современное состояние исследований

ТНМ как способ описания неопределенности имеет прямую связь с известной идеей Галилея о *координатизации.* Любые объекты, являющиеся предметом математического исследования: кривые, поверхности, отображения, величины и другие могут быть «координатизированы» или «измерены». Но для такой координатизации «обычных» чисел, обычной стандартной (архимедовой) метрики, как показывает практика, в целом ряде случаев далеко не достаточно. Встречаясь с новым типом объектов, необходимо рассматривать их «в условиях неопределенности», для которой может потребоваться конструировать и новые типы «величин» (объектов), что их координатизируют, и новые метрики. Напомним, что обобщением понятия числа является *матрица*, которая в общем случае рассматривается как проекция тензора.

В работе [7] раскрыты особенности НМ как формы моделирования неопределенности. Отмечено, что переход от обычной характеристической функции множества к ФП есть совершенно естественным, однако, идея НМ как ФП не является единственной. Развитие ТНМ в связке с ФП не обязано идти в направлении безусловного использования ФП, так как в ряде ситуаций ФП построить невозможно или она такова, что не отражает действительной информации, заложенной в эмпирическом утверждении. Нечеткую математику в [7] рекомендуется рассматривать в виде системы образующих (возможно даже бесконечной), на которой заданы правила перехода от одних образующих к другим. Современные исследования неопределенности, моделируемой в форме НМ, показывают, что создание новых операций на основе аналогов классических – результат пересечения или объединения – не есть рациональным. Операции нечеткой математики должны определяться экспериментально. Завершая обзор работы [7], укажем, что современный поход к моделированию неопределенности состоит не в создании новых способов построения ФП, а в создании механизмов извлечения нечеткости, что, в свою очередь, приводит к новой концепции получения нечетких знаний.

В этой связи укажем, что тензор есть объектом, который может моделировать множество отдельных значений, в том числе нечеткий (неоднозначный) объект, не требуя при этом обязательного назначения ФП. При необходимости параметр, аналогичный ФП, всегда может быть приближенно вычислен.

Постановка основных задач

Проведенный анализ позволил определить обстоятельства, которые обусловили специфику постановки задач:

- неопределенность представляет собой сложный объект, предполагать возможность решения задач, опираясь исключительно на теорию НМ, что имеет место сегодня, абсолютно неправильно;
- теория НМ в современном виде игнорирует получение новых знаний, в т.ч. нечетких, на основании представленной информации.

Особенности постановок основных задач состоят в следующем:

- условия неопределенности ограничены следующими случаями: нечеткая переменная (НП) как элемент НМ- подмножества упорядоченных пар, интервал, числовой ряд; тензорное (матричное) представление объекта в условиях неопределенности (неоднозначности) для всех рассматриваемых случаев, что должно дать возможность получения новых знаний из рассматриваемых условий неопределенности (неоднозначности);
- выполнение арифметических операций при тензорном представлении объектов должно исключать возможность субъективных оценок или выводов;
- необходимо обеспечить инвариантность результатов по отношению к ФП или в общем случае отказ от использования ФП;
- исключить или по возможности ограничить применение эвристик при выполнении арифметических и логических операций.

Представление НП системой тензорных моделей

Наделение объекта (переменной) субъективной ФП создает новый (более сложный) объект – НП, чем тот, который задан первоначально, в этом достоинство и недостаток ТНМ. Тензорная модель создается на первоначальном этапе и не наделяет объект дополнительными свойствами. Моделирование объекта в тензорном базисе естественно требует соответствующего моделирования арифметических (алгебраических) операций над ними и должно включать этапы:

- визуализация тензор-переменных (ТП), определение рациональной формы модели (целесообразность и возможность использования тензоров низких рангов);
- визуализация алгебраических операций над тензор-переменными и их инвариантами;
- определение связи между результатами, полученными в тензорном базисе, и результа-

тами, полученными при помощи ПНР на стандартных НМ.

Моделирование операций нечеткой математики должно включать определенные предостережения, если они выполняются в определенной модельной среде, в частности, учитывать особенности системы математического моделирования *Matlab*. Это касается, прежде всего, главных определений и способов реализации операции. В системе математического моделирования *Matlab* не проводится различия между НЧ и НП, хотя, как показано в [8], между ними есть существенное различие, но использование системы заставляет игнорировать это обстоятельство. Кроме того, нечеткая арифметика построена на эвристическом принципе нечеткого расширения [4], который не определяет величину, обратную НП или НЧ.

ПНР позволил перенести все операции четкой арифметики на нечеткую. Его можно рассматривать как принцип *инвариантности* арифметических операций относительно замены типа переменной (четкая $\Leftrightarrow$ нечеткая). Но некоторые понятия в условиях неопределенности кроме математического содержания должны получать, и получают на практике дополнительные ударения, это касается, в частности, понятия расстояния.

Нечеткая математика, как показано в работах [9, 10], эффективно реализуется в тензорном базисе, если ввести аналог НП – тензор-переменную, определяемую как *Kronecker*'ово (тензорное) произведение пар «значение – ФП» и вычисляемую на универсальном множестве $E\{x\}$, где $x \in E$, или только на «усеченной» совокупности упорядоченных пар $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, $\forall x \in E$, x∈E. Где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – ФП, принимающая свои значения на множестве *M* значений ФП и определяющая степень принадлежности *x* в $\tilde{A}$, то $\tilde{A}$ – нечеткое подмножество множества *E*, $\mu_{\tilde{A}} \to [0,1]$. Например, для ФП типа $trimf\ (x, [a\ b\ c])$ можно определить ТП на УМ или только на множестве значений $[a\ b\ c] \in E$.

Будем рассматривать неопределенность как ситуацию, в которой присутствует неоднозначность, в частности, ограничимся тем случаем, когда измерение (представление) состояния объекта исследования или его отдельных характеристик возможно в виде НМ, включая нечеткий интервал и высказывания естественного языка типа «больше», «меньше», «близко к ...», «приблизительно одинаково ... » и др.

Предложенные случаи необходимо представить в унифицированном виде, позволяющем применять стандартную математику, минимально требующую дополнительных расширений, основанных на эвристических «правдоподобных» предположениях [11]. Учитывая неизбежную «мягкость» вычислений, желательно предусмотреть минимальный контроль точности.

Уточним рассматриваемые объекты в нотации ТНМ:

НП с произвольной ФП –

$$\tilde{x}_{\mathrm{var}} = \{x_i / \mu_i^x\},\ i = 1, n;$$
$$\tilde{x}_{\mathrm{var}} = \{x_1 / \mu_1^x, x_2 / \mu_2^x, ..., x_n / \mu_n^x\}; \qquad (1)$$

НП с треугольной ФП –

$$\tilde{x}_{trimf} = \{x_i / \mu_i^x\} = \{x_1 / 0, x_2 / 1, x_3 / 0\};$$

интервал –

$$^x I = [\underline{x}, \overline{x}] = [x^{\min}, x^{\max}] = [x_1, x_2];$$

нечеткий интервал –

$$^x \tilde{I} = [x_i / \mu_i^x],\ \mathrm{i} = 1, 4;$$
$$^x \tilde{I} = [x_1 / 0, x_2 / 1, x_3 / 1, x_4 / 0].$$

В соответствии с работой [12] тензор это многомерный массив. Более формально, *N*-мерный или *N*-порядковый тензор – элемент тензорного произведения *N* векторных пространств, каждое из которых имеет *собственную систему координат*. Это понятие не противоречит понятию тензора в физике (тензорное поле) и в инженерном проектировании (тензор мощности, например, в смысле Г. Крона [6]). Тензор третьего порядка имеет три индекса, тензор второго порядка – два индекса (матрица), однопорядковый тензор – один индекс (вектор), тензоры порядка три и выше названы высокопорядковыми тензорами.

Представим НП с произвольной ФП (1) в виде двух массивов одномерных векторов $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\mu_x = \{\mu_1^x, \mu_2^x, ..., \mu_n^x\}$. ТП определена как $T_x = x \otimes \mu_x^T$, где индекс ^{T} – символ транспонирования. ТП с матрицами 9 × 9 и 3 × 3, соответствующие НП *примерно 5* с треугольной ФП, приведены ниже: *TDt* – ТП, определенная на УМ, *TDts* – усеченная ТП, *TDts*0 – свертка.

ТП *TDt.x* = [0:10/8:10];

muxDt = *trimf* (*x*, [1 5 7]);

TDt = *kron* (*muxDt*, *x*');

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.08 & 0.47 & 0.86 & 1.25 & 0.47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0.94 & 1.72 & 2.50 & 0.94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.23 & 1.41 & 2.58 & 3.75 & 1.41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.31 & 1.88 & 3.44 & 5.00 & 1.88 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.39 & 2.34 & 4.30 & 6.25 & 2.34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.47 & 2.81 & 5.16 & 7.50 & 2.81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.55 & 3.28 & 6.02 & 8.75 & 3.28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.63 & 3.75 & 6.88 & 0.00 & 3.75 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x = [0:10/8:10];

TDts = *kron* ([1 5 7], [0 1 0]');

$$TDts = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 5.0 & 7.0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$TDts\ 0 = свертка\ \ (TDt) = \begin{pmatrix} 0.3385 & 0.7292 & 0 \\ 0.8854 & 3.3073 & 0 \\ 1.4323 & 5.8854 & 0 \end{pmatrix}$$

Нормы:

[*norm* (*TDts*, '*fro*') *norm* (*TDts*0, '*fro*')]

7.0042   8.6603

Отметим основные особенности ТП *TDt*, *TDts*, *TDts*0. Хотя они моделируют один и тот же объект – НП *примерно 5* с треугольной ФП, но у них практически совпадают только первые инварианты, все остальные характеристики разные, тензоры *TDts*, *TDts*0 не подобны, но эквивалентны, т.к. относятся к одному и тому же объекту. Поэтому при использовании тензорных моделей этот факт необходимо учитывать.

Собственные значения:

*TDts*0 = $[0\ 3.5108\ 0.135]^T$,

TDts =$[\,5.0\ \ 0\ \ 0]^T$.

Инварианты:

I_1 = 0 +3.5108+0.135=3.6458, I_1 = 5.0+0+ 0=5;

I_2 = 3.5108* 0.135=0.474, I_2=0;

I_3 = 0, I_3=0.

НП с Гауссовой, треугольной и трапециевидной ФП и их тензорные аналоги, представленные в виде диадных тензоров с матрицами 9×9 и 3×3 , приведены на рис. 1 и рис. 2.

Математический объект $T_x = x \otimes \mu_x^T$, $\mu_x \to [0,1]$, называемый *тензор-переменной,* позволяет получить дополнительные знания, которые могут быть извлечены из нечеткости и использованы как результат структурирования

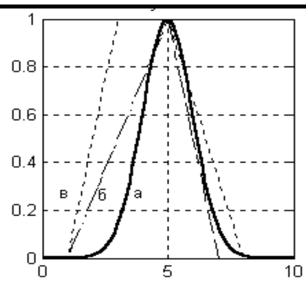

Рис. 1. Анализируемые ФП:
а) Гауссова,б) треугольная,
в) трапециевидная

неопределенности (знания, полученные из нечеткости) в виде алгебраической системы.

Прежде всего, отметим, что тензор, получаемый в результате *Kronecker*'ова произведения, является так называемым *диадным тензором* [13], матрица которого всегда является квадратной размерностью $n\times n$ (n – размерность векторов из тензорного произведения), все инварианты диадного тензора (кроме первого) равны нулю. Напомним, что 1-й инвариант (след) для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

равен: $\mathrm{Tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, где λ_i – собственные значения матрицы A.

Каждый тензор может быть разложен на симметричную A^{sym} и кососимметричную части A^{skw} :

$$A^{sym} = \frac{1}{2}(A + A^T)\,,\ A^{skw} = \frac{1}{2}(A - A^T)\,,$$

где $A = A^{skw} + A^{sym}$; девиаторную A^{dev} и изотропическую A^{iso} части:

$$A^{dev} = A - \frac{1}{3}(TrA)I\,,\ A^{iso} = \frac{1}{3}(TrA)I\,,$$

где I – тензор идентичности, в базисной нотации $I = \delta_{ij}e_ie_j$, δ_{ij} – символ *Kronecker'a*, $A = A^{iso} + A^{dev}$. Отметим, что A^{skw} , A^{sym} могут рассматриваться как тензорные функции, девиаторная A^{dev} и изотропическая A^{iso} части тензора представляют собой вариабельную и константную части тензора *A*, что особенно актуально в условиях моделирования неопределенности.

Известно, что в теории и практике применения НМ особую роль играют треугольные и трапециевидные ФП в силу их простоты и прозрачности применения. Тензорные модели НП с треугольными ФП представляют собой тензоры с матрицами 3×3 . Для приближенных вычислений, которые составляют основу нечеткой математики, прибегают к так называемой *свертке* тензоров,

$$\left(A \right)_n^n \to \left(B \right)_m^m, \ m < n .$$

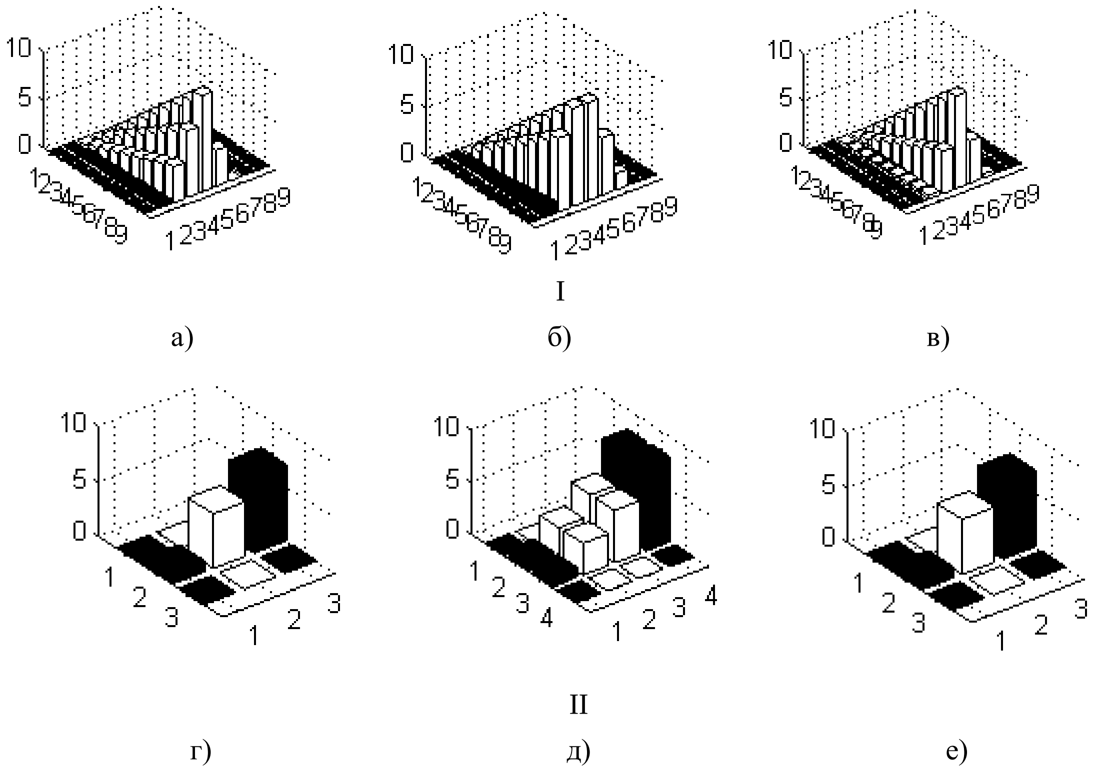

Рис. 2. Тензорные аналоги НП с ФП: I – тензоры с матрицей 9 × 9, II – тензоры с матрицей 3 × 3; а), г) – треугольная ФП; б), д) – трапециевидная ФП; в), е) – гауссова ФП

В соответствии с работой [14] операция получения тензора $b_{k \dots m}$ из тензора $a_{ijk \dots m}$ называется *свертыванием* тензора $a_{ijk \dots m}$ по индексам *i* и *j*. Точно так же можно определить свертывание тензора $a_{ijk \dots m}$ по любой другой паре индексов. При каждом свертывании тензора его валентность понижается на две единицы. Например, при свертывании двухвалентного тензора получают тензор a_{ii} нулевой валентности, то есть инвариант, являющийся следом тензора $[a_{ij}]$, $a_{ii} = tr([a_{ij}])$.

В отличие от диадного тензора с матрицей 3×3, который имеет только один ненулевой инвариант, свернутый тензор с такой же матрицей, имеет все три ненулевых инварианта, которые через собственные значения тензора представляются в виде:

$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$,

или в следовой форме

$$Tr(A) = I_1, \ Tr(A^2) = I_1^2 - 2I_2,$$

$$Tr(A^3) = I_1^3 - 3I_1 I_2 + 3I_3 .$$

Операция свертывания двух тензоров состоит в их умножении и свертывании полученного в результате умножения тензора по индексам, принадлежащим разным сомножителям. В результате свертывания тензоров валентностей *p* и *q* получается тензор валентности $(p + q - 2)$ (так называемое умножение со сверткой). Отметим, что свертывание тензоров можно выполнять по любому количеству *r* таких пар индексов. В результате этого свертывания получается новый тензор, валентность которого на 2*r* единиц меньше суммы валентностей исходных тензоров.

Тензорное представление НП, заданных в естественном виде. Объекты исследования можно также представлять в виде столбцов таблицы, например:

$$\tilde{x} = \{x_j / \mu_j^x\}, \to [x_1 \ \ \mu_1^x; \ x_2 \ \ \mu_2^x; \ \cdots \ x_J \ \ \mu_J^x] \to$$

$$\to \begin{pmatrix} x_1 & \mu_1^x \\ x_2 & \mu_2^x \\ \dots & \\ x_J & \mu_J^x \end{pmatrix}, \mu_j^x \to [0,1],$$

такое представление будем называть *естественным*, $\tilde{x} = \{x_j / \mu_j^x\} \to tx = [\,]_2^J$. Для НП со стандартной треугольной ФП (без учета УМ) имеем: $\tilde{X}_{trimf} = (3\ \ 0;5\ \ 1;7\ \ 0)$. Способ образования ТП приводит к тому, что в первом случае (диадный тензор) и во втором (естественное представление НП), матрица тензора $\boldsymbol{A}$ вырождена (или не является квадратной) и обратная матрица не существует, поэтому следует использовать *псевдообратную* матрицу $\boldsymbol{A}^+$, которая определяется как такая матрица $\boldsymbol{A}^+$, что $\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. Псевдобратная матрица – не единственная и ее вид зависит от способа построения, доминирование псевдообратной матрицы в тензорных моделях неопределенности предопределяет «мягкость» всех вычислительных процедур.

Эквивалентные и подобные матрицы. Две прямоугольные матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одной размерности $I \times J$ *эквивалентны*, если существуют такие квадратные матрицы $\boldsymbol{S}$, размерности $I \times I$, и $\boldsymbol{T}$, размерности $J \times J$, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{SAT}$.

Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг. Две прямоугольные матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ одной размерности $N \times N$ ***подобны***, если существует такая невырожденная матрица $\boldsymbol{T}$, что $B = T^{-1}AT$. Матрица $\boldsymbol{T}$ называется преобразованием подобия. Подобные матрицы имеют один и тот же ранг, след, определитель и спектр (одинаковые инварианты, одинаковые характеристические полиномы).

В работе показано, что матрицы ТП, полученные в результате реализации ТП $T_x = x \otimes chf^{\,T}$, где x – усеченное подмножество УМ, $chf^{\,T}$ – характеристическая функция (левый столбец табл.) и $T_x = x \otimes \mu_x^T$, $\mu_x \to [0,1]$ – правый столбец таблицы, являются такими, что все инварианты, кроме первого, имеют нулевые значения (отметим, что необходимое условие подобия состоит в совпадении характеристических полиномов матриц A и B).

В ТНМ для НМ $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ определены расстояния [4]: линейное (Хэмминга) и квадратичное (Евклида). В *Kronecker*'овой алгебре определена норма *Hilbert-Schmidt* (также называемая нормой *Frobenius'a*), которая определяется как $\| X - Y \|^2 = \mathrm{Tr}((X-Y)(X-Y)^T)$, где X, Y – матрицы на $\boldsymbol{R}$ размерностью $n \times m$. Эта проблема известна как проблема *ближайшего Kronecker'ова произведения*, в работе норма *Frobenius'a* принимается как расстояние между матрицами.

Алгебраические операции в *Kronecker'*-овой алгебре

Прежде всего, коротко представим определения *Kronecker*'овых операторов произведения и суммы. Для их детального математического описания следует обратиться к работе [15]. Пусть

$$A = \left(a_{ij} \right) \text{ и } B = \left(b_{ij} \right)$$

две матрицы порядка $n1 \times n2$ и $m1 \times m2$ соответственно. *Kronecker*'ово произведение $C = A \otimes B$ есть таким, что:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots a_{1n_2}B \\ \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1n1}B & \cdots a_{n1n_2}B \end{pmatrix}$$

Тензорная сумма определена только для квадратных матриц, тензорная сумма $A \otimes B$ двух квадратных матриц A и B определена в терминах тензорного произведения как: $A \otimes B = A \otimes I_m + ... + I_n \otimes B$, где n – порядок матрицы A, m – порядок матрицы B, $\boldsymbol{I}_n$ и $\boldsymbol{I}_m$ – матрицы идентичности порядка n и m соответственно, «+» – обычный оператор матричного сложения. Прямая сумма тензоров (матриц тензоров) в блок-диагональной форме имеет вид:

$$\mathrm{A} \oplus \mathrm{B} = \begin{pmatrix} (\mathrm{A})_n^n & (0)_m^n \\ (0)_n^m & (\mathrm{B})_m^m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Детерминант прямой суммы –

$$\det(A \otimes B) = (\det A)(\det B),$$

след прямой суммы –

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = (\mathrm{Tr}A)(\mathrm{Tr}B).$$

Детерминант тензорного произведения –

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$$

след тензорного произведения –

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = (\mathrm{Tr}A)(\mathrm{Tr}B).$$

Часто возникает необходимость работы с ТП, у которых матрицы содержат только по одному ненулевому элементу, например,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i1} \end{pmatrix} \text{ и } g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i2} \end{pmatrix}.$$

Тензорная сумма $(g_1 \otimes g_2)$ в этом случае определяется таким образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g_{i2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{i1} + g_{i2} \end{pmatrix}.$$

Двойная свертка полученного выражения дает $(g_1 + g_2)$, то есть совпадает с естественным представлением. Матричное исчисление делает использование оператора векторизации матриц *vec* и оператора *Kronecker'*ова произведения очень важным. Оператор *vec* векторизует матрицу, «складывая» ее в столбец (при соглашении, что колонка предшествует строке). Пример рассмотренный алгебраических преобразований в *Kronecker'*овой алгебре представлен далее.

Пример.

Заданы две НП: <*примерно 5*> $\rightarrow \tilde{5} \underline{\underline{\Delta}} \{3/0,\ 5/1,\ 7/0\}$ и

<*примерно 7*> $\rightarrow \tilde{7} \underline{\underline{\Delta}} \{3/0,\ 5/1,\ 7/1,\ 9/0\}$, где $\underline{\underline{\Delta}}$ – равно по определению.

Вычислить в тензорном базисе:

<*примерно 5*> ⊕ <*примерно 7*> и <*примерно 5*> ⊗ <*примерно 7*>.

1^0. Определяем ТП – аналоги НП <*примерно 5*> и <*примерно 7*>:

$$\tilde{5} = \{3/0,\ 5/1,\ 7/0\} \rightarrow \mathrm{T}^{(5)} = [3\ 5\ 7] \otimes [0\ 1\ 0]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{7} = \{3/0,\ 5/1,\ 7/1,\ 9/0\} \rightarrow \mathrm{T}^{(7)} = [3\ 5\ 7\ 9] \otimes [0\ 1\ 1\ 0]^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$^0.\ T^{(5)} \oplus T^{(7)} = C_{\text{с}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{T}^{(5)}\right)_3^3 & (0)_4^3 \\ (0)_3^4 & \left(\mathrm{T}^{(7)}\right)_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

$$3^0.\ T^{(5)} \oplus T^{(7)} = C_{\text{пр}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 15 & 21 & 27 & 15 & 25 & 35 & 45 & 21 & 35 & 49 & 63 \\ 9 & 15 & 21 & 27 & 15 & 25 & 35 & 45 & 21 & 35 & 49 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Свойства тензора, остающиеся неизменными при преобразованиях координат, определяются системой его инвариантов, которые зависят от коэффициентов характеристического уравнения. Инварианты это константы, значения которых сохраняются при смене системы координат. Возможность замены анализа неопределенности, представленной тензором, анализом его инвариантов, открывает новые пути для решении задач управления в условиях неопределенности. Отметим, что значения следов

$(C_{\text{c}} = T^{(5)} \oplus T^{(7)}$, $\text{Tr}\, C_{\text{c}} = 17$) и ($C_{\text{пр}} = T^{(5)} \oplus T^{(7)}$, $\text{Tr}\, C_{\text{пр}} = 60$)

совпадают с дефадзифицированным значением суммы и произведения НП <*примерно* 5> и <*примерно* 7>, то есть

$$\tilde{5} +_f \tilde{7} = \tilde{12}, \ \tilde{5} *_f \tilde{7} = \tilde{60}.$$

В общем случае для НП $\tilde{x} = \{x_i / \mu^{x_i}\}_{i=1}^n$ тензорное произведение векторов $[x_i] \otimes [\mu^{x_i}]$ обладает свойством, что след $\text{tr}([x_i] \otimes [\mu^{x_i}])$ совпадает с дефадзифицированным значением НП $\tilde{x}$, $def(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \mu^{x_i} \sum_{i=1}^n \mu^{x_i} = 1$.

Выводы

Предложено представлять объект в условиях неопределенности, в т.ч. НП, тензорными моделями, формируемыми как тензорное (Кронекерово) произведение компонент НП (значение ⊗ ФП) или как массив ”значение - ФП ”, размерностью $2 \times n$, где n – количество α-уровней в представлении НП или количество значений, которыми представляется объект. Предложенный поход позволяет, с одной стороны, рассматривать объект в условиях неопределенности без обязательного использования ФП, с другой, позволяет все операции над НП выполнять на уровне формальных моделей матричного исчисления без необходимости применять разнообразные эвристические приемы и принципы типа принципа нечеткого расширения для пояснения и неформального обоснования применяемых методов и моделей.

Список литературы

1. Zadeh L.A. Fuzzy algorithms // Information and Control. – 1968 – №12. – P. 94 – 102.
2. Блэк М. Метафора // Теория метафоры. – М.: Прогресс, 1990. – С. 153 – 172.
3. Atanassov, K. Intuitionistic fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. – 1986. – №20 – P. 87 – 96,
4. Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets // Fuzzy Sets and Systems. – 1989. – №33. – P. 37 – 46.
5. Воробьев О.Ю. Эвентология – очеловеченная математика [Электронный ресурс] / Институт вычислительного моделирования СО РАН. – Красноярский государственный университет, 2005. – Режим доступа: http://eventology-theory.ru /000.htm.
6. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М. : Сов. радио, 1978. – 720 с.
7. Поспелов Д.А. Из истории развития нечетких множеств и мягких вычислений в России [Материалы круглых столов, проведенных Д.А.Поспеловым], (Москва, 1991, 1998); с послесловием В.Б.Тарасова // Новости Искусственного Интеллекта. – №2-3. – М. : ВЦ РАН, 2001. – 36 с.
8. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств.– М.: Радио и связь,1982.– 432 с.
9. Минаев Ю.Н. Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. Часть 1 – тензор-переменная в системе нечетких множеств / Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова // Электронное моделирование. – К. : ИПМЭ НАН Украины, 2008. – № 1, т.30 – С. 43 – 59.
10. Минаев Ю.Н. Нечеткая математика на основе тензорных моделей неопределенности. Часть 2 – нечеткая математика в тензорном базисе / Ю.Н. Минаев, О.Ю. Филимонова // Электронное моделирование. – К. : ИПМЭ НАН Украины, 2008. – № 2, т.30 – С. 4 – 21.
11. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа; пер. с англ. И.А. Вайнштейна; под ред. С.А. Яновской. – М. :Издательство «НАУКА», 1975. – 465 с.
12. Kolda T.G. Tensor Decompositions and Applications [Siam Review] / T.G. Kolda, B.W.Bader // Society for Industrial and Applied Mathematics [Электронный ресурс]. – Vol. 51, № 3 – P. 455 – 500. – Режим доступа: http://www.siam.org/journals/sirev/51-3/70111.html.
13. Brannon R.M. Elementary and Intermediate // Vector and Tensor Analysis [UNM REPORT]. – Albuquerque : University of New Mexico, 2002. – 204 p.
14. Акивис М.А. Тензорное исчисление: учеб. пособие / М.А. Акивис, В.В. Гольдберг. – 3-е изд., перераб. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
15. Graham A. Kronecker product and matrix calculus with applications / A. Graham. – USA, NY : Wiley, 1981. – 130 p.